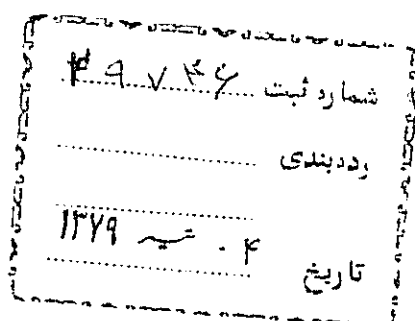
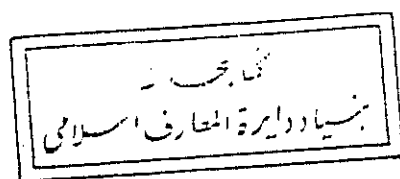


Publications of the Institute
for the History of Arabic-Islamic Science

Islamic Mathematics
and
Astronomy
Volume 56



Publications of the
Institute for the History of
Arabic-Islamic Science

Edited by
Fuat Sezgin

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
56

al-Kāshī
Ghiyāthaddīn Djamshīd ibn Mas'ūd ibn Maḥmūd
(d. 832/1429)

Texts and Studies
Collected and Reprinted

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

ISLAMIC
MATHEMATICS
AND
ASTRONOMY

Volume
56

AL-KĀSHĪ
GHIYĀTHADDĪN DJAMSHĪD IBN MAS'ŪD IBN MAḤMŪD
(d. 832/1429)

TEXTS AND STUDIES

Collected and reprinted
by
Fuat Sezgin

in collaboration with
Mazen Amawi, Carl Ehrig-Eggert,
Eckhard Neubauer

1998

Institute for the History of Arabic-Islamic Science
at the Johann Wolfgang Goethe University
Frankfurt am Main

Q23

. 77

1977

v. 56



۳۰۱۳۸۳

100 copies printed

© 1998

Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften
Beethovenstrasse 32, D-60325 Frankfurt am Main
Federal Republic of Germany

Printed in Germany by
Strauss Offsetdruck, D-69509 Mörlenbach

TABLE OF CONTENTS

Boncompagni, Baldassare: <i>Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali.</i> Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Rome) 10. 1877. pp. 294-302. ...	1
Luckey, Paul: <i>Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik.</i> Mathematische Annalen (Berlin) 120. 1948. pp. 217-274.	11
Luckey, Paul: <i>Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters.</i> Forschungen und Fortschritte (Berlin) 24. 1948. pp. 199-204.	69
Luckey, Paul: <i>Die Rechenkunst bei Ġamšīd b. Mas'ūd al-Kāshī mit Rückblicken auf die ältere Kunst des Rechnens.</i> Wiesbaden 1951. X, 142 pp.; 1 pl.	75
Luckey, Paul: <i>Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risāla al-Muḥīṭiyya) von Ġamšīd b. Mas'ūd al-Kāshī übersetzt und erläutert.</i> Herausgegeben von Alfred Sigel. Berlin 1953. VI, 95 pp.	227
Luckey, Paul: <i>Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik. II. Rechnen und Algebra.</i> Orientalia (Rome) N.S.22. 1953. pp. 166-189.	330
Aaboe, Asger: <i>al-Kāshī's iteration method for the determination of sin 1°.</i> Scripta mathematica (New York) 20. 1954. pp. 24-29. .	354
Sayılı, Aydın: <i>Uluğ Bey ve Semerkanddeki ilim faaliyeti hakkında Gıyasüddin-i Kāshī'nin mektubu ('Ghiyāth al Dīn al Kāshī's letter on Ulugh Bey and the scientific activity in Samarqand).</i> Ankara 1960. 115 pp.	361

INTORNO ALLA SOMMA DELLE QUARTE POTENZE DEI NUMERI NATURALI

Gemscid ben Masud ben Mahmud, soprannominato Ghijath ed-Din Alkasciani, matematico ed astronomo, morto prima del 1450 (*), è autore d'un opera in-

(*) F. Woepcke avverte giustamente che il detto Gemscid fu uno degli astronomi ch'ebbero parte alla compilazione delle tavole d'Ulug Beg, ma che morì prima del compimento di questo lavoro (ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, ecc. TOMO VI, ROMA, ecc. 1864, pag. 245, lin. 15-18, N.º 5. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS DU BRITISH MUSEUM DE LONDRES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22, lin. 15-18. — JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, ecc. OU RECUEIL, ecc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE - TOME X. ANNÉE 1865. PARIS, ecc. 1865, pag. 112, lig. 17-20, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS DU BRITISH MUSEUM DE LONDRES. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 32, lin. 17-20). — Nella traduzione data da Tommaso Hyde d'un passo della « Storia degli uomini illustri » di Daulat-Sciah di Samarkand si legge in fatti (TABULÆ LONG. AC LAT. STELLARUM FIXARVM, EX OBSERVATIONE ULUGH BEIGHI, ecc. Ex tribus invicem collatis MSS Persicis jam primum Luce ac Latio donavit. & Commentariis illustravit, THOMAS HYDE, ecc. OXONII, ecc. CICIDCLXV, pag. 21ª, non numerata, lin. 25-28, pag. 22ª, non numerata, lin. 1-9, Praefatio ad Lectorem. — SYNTAGMA DISERTATIONVM QUAS OLIM AUCTOR DOCTISSIMUS THOMAS HYDE S. T. P. SEPARATIM EDIDIT, ecc. OMNIA DILIGENTER RECOGNITA A GREGORIO SHARPE, ecc. VOLUMEN PRIMUM. OXONII, E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO. MDCLXVII, pag. 65ª, numerata xiii, lin. 14-26, PRÆFATIO. — PROLÉGOMÈNES DES TABLES ASTRONOMIQUES D'ULOUG-BEG PUBLIÉES AVEC NOTES ET VARIANTES, ecc. PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. cxxxvij, lin. 3-16):

: Rex Sapiens, Justus,
: Victoriosus ac Prudens fuit, qui in mundo celsum gradum obtinuit, rerumq; sensu
: pilum ferre potuit. In ipsius seculo doctorū virorū gradus in summa suā abside
: positus fuit, & excellentibus viris in tempore eius dignitates maxime contige-
: runt. In Scientiā Geometriæ subtilissima præstitit, & in Questionibus de Theo-
: ricis ocella reservavit: Adeo ut viri præcellentes ac sapientes unanimi-
: ter consentiant quod in diebus Islamismi, imò à tempore Dilkarnain ad hoc us-
: que momentum, nullum Regem sapientiā ac scientiā Ulugh-Beigh-Ghurghāno
: parem in sede principatūs fuisse collocatum. In scientiis Mathematicis plenam
: cognitionem adeptus est: & Observationes Stellarum concinnavit cum consensu
: sapientū sui temporis, qualis erat Gloria sapientū & doctorum Cāli Rume-
: us, & Mulan Ghijath-eddin Ghimshid: hi autem viri magni & excellentes, opere
: nondum absoluto, fato cecidere. :

Abu-Mohammed Mustafā in un passo d'una sua opera storica tradotto dall'Hyde, parlando d'Ulug Beg, dice (TABULÆ LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 20ª, lin. 17-21. — SYNTAGMA DISERTATIONVM, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. 64ª, numerata xii, lin. 7-11. — PROLÉGOMÈNES DES TABLES ASTRONOMIQUES D'ULOUG-BEG, ecc., pag. cxxxvj, lin. 17-22):

: Ipse idem est qui Observationes Ulugh-Beighicas quæ hodie inter homines te-
: rantur, edidit; multasque in eisdem faciendis opes impendit. Operam cum eo
: navavit primò, excellentissimus ille Ghijath-eddin Ghimshid, qui tamen mortuus est
: prius quàm Observationes absolventur, & haud procul à dicto Observatorio se-
: pulchus est. :

il che mostra, che Gemscid morì prima che fossero terminate le osservazioni astronomiche ch'egli ed altri erano stati incaricati di fare da Ulug-Beg. — Nella traduzione francese data in luce da Luigi Amelio Sédillot della prefazione alle dette tavole di Ulug-Beg si legge: (PROLÉGOMÈNES DES TABLES ASTRONOMIQUES D'ULOUG-BEG TRANSDUCTION ET COMMENTAIRE, PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1853, pag. 4, lin. 14-28, pag. 5, lin. 1-11):

« Et comme Dieu (héui soit son nom) a tiré du trésor
: de sa miséricorde cette sentence: « Il n'y a pas de choses
: que nous ne possédions pas, et nous ne les accordons
: que dans une proportion qui nous est connue, » il a
: gratifié son humble et misérable serviteur des honneurs
: et des insignes d'une grandeur et d'une distinction par-
: ticulières; il a voulu que le sens de ce vers, « Nos traces
: montrent ce que nous fîmes; regardez donc attentive-
: ment les traces que nous avons laissées après nous, »

: fût compris dans l'écriture admirable des temps, et il a
: déployé les étendards de la gloire et de la renommée sur
: le sommet de la coupole des orbes célestes; il a permis
: que les planètes fussent observées avec le secours d'un
: maître infatigable, le savant des savants, qui suit le dra-
: peau de la vertu et de la sagesse, marche dans la voie de
: la certitude, et sait vaincre les difficultés les plus gran-
: des, notre maître Selah-el-Millah-We-el-Din (la prospérité
: de la religion et de la croyance) Musa, connu sous le

titolata « Chiave del calcolo » (*), della quale il compianto Francesco Woepcke

« nom de Cadi-Zadeh-el-Roumi, que la miséricorde
« et le pardon soient sur lui; et aussi de l'admirable
« Molla, renommé parmi les plus célèbres en ce monde,
« celui qui possède à fond et qui a complété les sciences

« des anciens, qui peut résoudre les questions les plus ar-
« dues, notre maître Gaiath-el-Millah-We-el-Din (l'aide de
« la religion et de la croyance) Djemchid; que Dieu
« répande une douce fraîcheur sur la terre qui le couvre ».

Questo passo della detta prefazione alle tavole d'Ulug Beg mostra che quando essa fu composta Gemscid era già morto. Ora si sa che queste tavole furono terminate nell'anno 853 dell'Egira (TABVLÆ || LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 23^a, non numerata, lin. 16—17. — SYNTAGMA || DISSERTATIONVM || QUAS OLIM, ecc. EDIDIT, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. xiv, lin. 30—31, PRÆFATIO. — PROLEGOMENES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'ULOUG-BEG, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. cxxxj, lin. 11—13), che, secondo l'uso civile arabo di incominciare l'Egira nel giorno 16 di luglio del 622, incominciò nel giorno 24 di febbraio del 1449 (Vergleichungs-Tabellen || der || Muhammedanischen und Christlichen Zeitrechnung, ecc. herausgegeben von || Dr. Ferdinand Wüstenfeld. || Leipzig, 1854, ecc., pag. 36, col. 3^a, lin. 3), e terminò nel giorno 13 di febbraio del 1450 (Vergleichungs-Tabellen, ecc., pag. 36, col. 3^a, lin. 4).

Tommaso Hyde nella « Praefatio ad Lectorem » premessa alla sua edizione delle tavole d'Ulug-Beg scrive (TABVLÆ || LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 22^a, non numerata, lin. 28, pag. 23^a, non numerata, lin. 1—9. — SYNTAGMA DISSERTATIONVM, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. xiv, lin. 15—23):

« eorum quos Ulugh Beighus in auxilium vocavit, nomina in ipsius Praefatione

« plenius scribuntur: eorum enim primus est مولانا صلاح الدين موسى المشتهر

« بقاضى زاد الرومى Mulana Salâh-eddin MUSA qui celebratus est cogno-

« mento Cadi-zade Rumæus. (Hunc Author noster vocat حضرت استادى و

« سندى Praeceptorum ac Fulcrum suum.) Persæ pronuntiant Cadi Zâde. Se-

« cundus est مولانا غياث الدين جمشيد Mulana Gijâth-eddin GJIMSHID.

« Quorum Hic (cujus est Liber Astronomicus dictus السبا Scala cœli) in ipso

« ferè operis limine, Ille verò priusquam ad umbilicum perductus esset, manu fuit

« occubuit ».

Secondo questo passo della prefazione medesima Gemscid sarebbe morto quando la compilazione delle dette tavole astronomiche d'Ulug Beg era appena cominciata, cioè vari anni prima dell'853 dell'Egira. — La medesima opera di Gemscid intitolata « Scala coeli » menzionata dall'Hyde in questo passo della sua « Praefatio » suddetta è citata da Hagi Chalfa, morto nel settembre del 1658 (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLÜGEL, ecc. TOMUS PRIMUS, ecc. LEIPZIG, ecc. M. DCCC. XXXV, pag. xiii, lin. 14—15) in due passi del suo celebre « Lessico bibliografico » (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO, ecc. COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLÜGEL, ecc. TOMUS TERTIUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. XLII, pag. 610, lin. 15—23, n.° 7224. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLÜGEL, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. LII, pag. 580, lin. 13—16, n.° 14725), nel primo de' quali egli la dice divisa in sei dissertazioni, ed indica il contenuto di ciascuna di tali dissertazioni, e nel secondo cita una traduzione della medesima « Scala coeli ».

Giovanni Enrico Hottinger cita anch'egli la medesima « Scala coeli » di Gemscid così (JOH. HENRICI HOTTINGERI, S. TH. D. || PROMPTUARIUM; || Sive || BIBLIOTHECA ORIENTALIS, ecc. HEIDELBERGÆ, ecc. CIO 150 LIX, pag. 251, lin. 25, pag. 252, lin. 1—2):

« e Scala
« coeli, seu de distantia & magnitudine corporum coelestium.
« um, authore Gemshido, Gajathoddino. »

Ciò che si è detto di sopra nella presente nota, intorno al tempo in cui morì Gemscid, mostra 1° che per errore Hagi Chalfa (LEXICON, ecc. TOMUS TERTIUS, ecc., pag. 610, lin. 17, n.° 7224), ed A. Kuenen (CATALOGUS || CODICVM ORIENTALIVM || BIBLIOTHECAE ACADEMIAE LUGDUNO BATAVAE || AUCTORIBUS || P. DE JONG ET M. J. DE GÖGE, || VOLUMEN TERTIUM. || LUGDUNI BATAVORVM, ecc. MDCCCLXV, pag. 75, lin. 24) dissero morto il medesimo Gemscid nell'anno 919 dell'Egira; 2° che anche per errore nel catalogo intitolato « CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHES || ORIENTAUX || DE || LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG. || IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES. || 1852 » (pag. 118, lin. 1—5) egli dicesi morto nell'887 dell'Egira.

(*) Del testo arabo di quest'opera si hanno i seguenti esemplari manoscritti:

Londra: British Museum, Additional Manuscripts, n.° 7470 (Rich.) (CATALOGUS || CODICVM MANUSCRIPTORVM ORIENTALIVM || QUI || IN MUSEO BRITANICO || ASSERVANTUR. || PARS SECUNDA, || CODICES ARABICOS AMPECTENS. || LONDINI: || IMPENSIS CURATORVM MUSEI BRITANNICI. || MDCCCLII, pag. 109, col. 2^a, lin. 1—43, Codex CCCCXIX). — Londra: « Library of the India Office », manoscritto n.°

Bull. di Bibl. e di St. d. Sc. Mat. e Fis. t. X. (Maggio 1877).

tradusse dall'arabo in francese la prefazione, ed un passo relativo alla somma

039 (già n.º 756), carte 15—22 (CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHES || ORIENTAUX || DE LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG, ecc. pag. 118, lin. 13—14. — PROLEGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUC-BEG || TRADUCTION ET COMMENTAIRE, || PAR M. P. E. A. SÉDILLOT, ecc., pag. 226, lin. 6—9). — Leida: Biblioteca dell'Università, Codice 185 Gol. CATALOGUS || LIBRORUM || TAM IMPRESSORUM QUAM MANUSCRIPTORUM || BIBLIOTHECÆ || PUBLICÆ || UNIVERSITATIS || LUGDUNO-BATAVÆ. || Cura & Operâ || WOLFERDI SENGUERDII, ecc. JACOBI GRONOVII, ecc. || JOHANNIS HEYMAN, ecc. LUGDUNI APUD BATAVOS, ecc. M D CCXVI, pag. 452, col. 2ª, lin. 35—37, MANUSCRIPTI || LIBRI ORIENTALES, ecc., n.º 1049. — CATALOGUS || CODICUM ORIENTALIUM || BIBLIOTHECÆ ACADEMIÆ LUGDUNO BATAVÆ || AUCTORIBUS || P. DE JONG ET M. J. DE GOEJE. || VOLUMEN TERTIUM, ecc., pag. 75, lin. 22—28, pag. 76, lin. 1—3, Codex MXXXVI (Cod. 185. Gol.). — Berlino: Biblioteca Reale, manoscritti già posseduti da A. Sprenger, n.º 1824 (carte numerate 1—78), e n.º 1824 a carte numerate 1—176) (A CATALOGUE || OF THE || BIBLIOTHECA ORIENTALIS || SPRENGERIANA. || GIESSEN. || WILHELM KELLER, PRINTER. || JANUARY 1857, pag. 100, lin. 12—16, n.º 1824). — Pietroburgo: Biblioteca Imperiale, Codice n.º 131 (CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHES || ORIENTAUX || DE LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG, ecc., pag. 118, lin. 1—11, Codex CXXXI).

Il primo di questi manoscritti fece parte d'una collezione di manoscritti orientali, già posseduta da Claudio Giacomo Kich, ed acquistata dal *British Museum* per voto del Parlamento Inglese nel giorno 25 di aprile del 1825 per la somma di 7,500 lire sterline, dalla vedova del medesimo Claudio Giacomo Kich (A HANDBOOK FOR || READERS || AT || THE BRITISH MUSEUM. || BY || THOMAS NICHOLS || ASSISTANT IN THE BRITISH MUSEUM. || LONDON: || LONGMANS, GREEN, AND CO. || 1866, pag. 151, col. 2ª, lin. 50—54, pag. 152, col. 1. lin. 1—7). È quindi descritto in un catalogo manoscritto posseduto dal *British Museum* di questa collezione (Catalogus || Codicum Arabicorum || qui in || Bibliotheca Richiana || exstant; || raptim et nimis propteranter || sed pro viribus opibusque suis || confecti || I. Forshall, || 1836. || Fol. 2, carta 59, recto). Questo manoscritto, del quale si servì il Woepcke per la sua traduzione menzionata di sopra, si compone di 110 carte, nell'ultima delle quali trovasi subito dopo l'esemplare contenuto nel codice medesimo della detta « Chiave del Calcolo » una nota, che nel catalogo stampato de'codici orientali del *British Museum* è tradotta così [(CATALOGUS || CODICUM MANUSCRIPTORUM ORIENTALIUM || QUI IN MUSEO BRITANNICO || ASSERVANTUR. || PARS SECUNDA, ecc., pag. 99, col. 2ª, lin. 38—43):

“ Finis transcriptionis hujus codicis excellentis
incidit in feriam secundam mensis Shawwâl, anno
997: quem exaravit pauper erga Deum, ” Abd al-

razzâc Ibn “ Abd Allah Ibn ” Abd al-Razzâc Ibn
Jamshîd Ibn Mîr “ûd Ibn Jamshîd, qui fuit auctor
hujus libri illustris. ”

Quindi è chiaro che l'esemplare della « Chiave del Calcolo » di Gemscid contenuto nel detto codice « *Additional manuscripts*. n.º 7470 » fu terminato di scrivere in un lunedì del mese Sciawal dell'anno 997 dell'Egira, il qual mese, secondo il precitato uso civile arabo d'incominciare l'Egira nel 16 luglio del 622, incominciò nel giorno 13 di agosto del 1589 (Vergleichungs-Tabellen, ecc. herausgegeben von || Dr. Ferdinand Wûstenfeld, ecc., pag. 40, col. 1ª, lin. 47, col. 2ª, lin. 47, pag. 41, col. 4, lin. 47). — Intorno alla detta « Chiave del calcolo » di Gemscid sono date notizie da Hagi Khalifa (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc., pag. 12, lin. 19—28, n.º 12563, pag. 13, lin. 14—18, n.º 12591), che oltre quest'opera e la « Scala coeli » menzionata di sopra (pag. 295, lin. 12—44), cita anche altri lavori dello stesso Gemscid (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc., pag. 324, lin. 27—31, pag. 325, lin. 11—14, n.º 12684. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. LEIPZIG, ecc. M. DCCC. XXXVII, pag. 16, lin. 16—17, n.º 1645. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS QUARTUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. XLV, pag. 155, lin. 12—16, n.º 7033).

In un codice manoscritto della Biblioteca Bodleiana d'Oxford trovasi un esemplare d'un opera astronomica di Gemscid, che da Giovanni Uri nel suo catalogo de'codici manoscritti della Biblioteca medesima è indicato nel modo seguente (BIBLIOTHECÆ || BODLEIANÆ || CODICUM || MANUSCRIPTORUM || ORIENTALIUM, ecc. CATALOGUS, ecc. A JOANNE URI || CONFECTUS. || PARS PRIMA. || OXONII, || E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO. || M DCC LXXXVII. — CODICES MANUSCRIPTI || ARABICI. — MATHEMATICI || ET || GEOGRAPHI || IN FOLIO, pag. 191, col. 2ª, lin. 7—13, Cod. DCCCLXXXI, 4o):

di alcune serie di cubi (*). Nella traduzione fatta dal Woepcke di questo passo si legge (**):

« Quatorzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés » des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme » de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième du » reste. Nous l'ajoutons à la somme des dits nombres, et nous multiplions ce qui » en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quan- » tité cherchée.

« Exemple. Nous désirons additionner les carré-carrés des nombres suivant » l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce » qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité; il reste vingt. Nous en » prenons le cinquième, ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un; il pro- » vient vingt cinq. Nous multiplions cela par quatre-vingt onze, ce qui est la » somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante » quinze ».

In questo passo della suddetta « Chiave del calcolo » è data ed applicata al caso di $n = 10$ la formola

$$(1) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \left((1+2+3 \dots + n) \div \frac{1}{5} (1+2+3+ \dots + (n-1) + n-1) \right) (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

« 4^o Liber, cum Tabulis, de Stella-
rum vagarum et fixarum magnitudine,
et eorumque a centro terrae distantia, so-
lia 12 efficiens. Composuit GAIATHRED.

« DIN GIEMSHID, BEN MASUD BEN MAH-
MUD, inscriptisque: Tractatus ad un-
guem factus. »

Gemscid corresse anche le tavole Ilkhanie Regie di Nassir-Eddin (BIBLIOTHEQUE ORIENTALE, ecc. PAR MONSIEUR D'HERBELOT, || A PARIS, ecc. M. DC. XCVII, ecc., pag. 934, col. 2^a, lin. 55—62. — PRO-
LÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || PUBLIÉS, ecc. PAR M. L. P. E. A. SÉDIL-
LOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. xcix, lin. 10—11, pag. c, lin. 1—2, 31—33). — Vari lavori del sud-
detto Gemscid sono da lui stesso citati nella prefazione alla detta « Chiave del calcolo » (ANNALI || DI
MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc. 1864, pag. 245, lin. 31—37, pag. 246, pag. 247, lin. 1—2, n.° 5. — PAS-
SAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22, lin. 31—37,
pag. 23, pag. 24, lin. 1—2. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié ||
PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE 1865, ecc., pag. 112, lin. 31—34, pag.
113, pag. 114, lin. 1—18. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc.
PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 32, lin. 31—34, pag. 33, pag. 34, lin. 1—18).

Si è già detto di sopra (pag. 254, lin. 6—7) essere stato avvertito dal Woepcke che Gemscid ebbe parte nella compilazione delle tavole astronomiche di Ulug-Beg. L'illustre Luigi Amelio Sédillot descrisse accuratamente sei esemplari manoscritti di queste tavole (PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || PUBLIÉS, ecc. PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. cxxxvii, lin. 10—31, pag. cxxxix—cxl, pag. cxli, lin. 1—4). Un altro esemplare manoscritto delle tavole medesime, trovati in un codice manoscritto contrassegnato « Codex Arabicus, n.° CXXXI » ora posseduto dalla Biblioteca Vaticana, e del quale Monsignore Stefano Evodio Assemani ha dato una descrizione (SCRIPTORUM VETERUM || NOVA COLLECTIO || E VATICANIS CODICIBUS EDITA || AB AN-
GELO MAIO || BIBLIOTHECAE VATICANAE PRAEFECTO. || TOMUS IV. || ROMAE || TYPIS VATICANIS || MDCCC.
XXXI CODICES ARABICI || VEL A CHRISTIANIS SCRIPTI VEL AD RELIGIONEM || CHRISTIANAM SPECTANTES,
pag. 437, lin. 1—29, COD. CCLXIX), che comincia così (SCRIPTORUM VETERUM || NOVA COLLECTIO,
ecc. TOMUS IV, ecc., pag. 437, lin. 1—7):

« CCLXIX.

« Codex in fol. m. humile. foliorum 88, arabice litteris et sermone e-
legantissime exaratus, inter codices arabicos a I. S. Assemano in vaticanum
bibliothecam ex oriente inlatus, olim trigessimus tertius. Ibi continentur.
« Tabulae astronomicae, iuxta observationes a Salsheddino Moze, cogno-
mento Cadizade romaeo, et a Gaishehdino Gemscid, Sarmacenae iussu Oghli
Beiki, Tamerlani nepotis, factas; a quo etiam titulum sumpsit. »

(*) ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 245—248, N.° 5. — PASSAGES RELATIFS ||
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22—25. — JOURNAL || DE || MA-
THÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TO-
ME X. ANNÉE 1865, ecc., pag. 112—116, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE
SÉRIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, ecc., pag. 32—36.

(**) ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 247, lin. 25—32, pag. 248, lin. 1—5. —
PASSAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS || DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 24, lin.
29—32, pag. 25, lin. 1—9. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE
1865, ecc. pag. 115, lin. 20—23, pag. 116, lin. 1—9, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOM-
MATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 35, lin. 20—23,
pag. 36, lin. 1—9.

Pietro di Fermat, morto in Castres in età di 37 anni nel giorno 12 di gennaio del 1665 (*), in una lettera stampata nel 1679 (**), e diretta ad Egidio di Roberval in data « Du 4. Novembre 1636 » (***), scrive (****):

« Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in
» quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singu-
» lis set summa quadrato-quadratorum quintupla ».

Cioè:

« Si ha

$$5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) ».$$

Questa formola si deduce facilmente dalla (1). Essendo in fatti:

$$(2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(3) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ed avendosi per ciò

$$\begin{aligned} 2+3+\dots+n &+ \frac{1}{5} \left(1+2+3+\dots+(n-1)+n-1 \right) (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = \left(\frac{5}{5} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{1}{5} \right) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{5} \left((4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right) \end{aligned}$$

la (1) dà

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} \left((4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right);$$

quindi

$$5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Il Sig. Emilio Brassinne nel suo lavoro intitolato « PRÉCIS || DES || OEUVRES MA-

(*) BIOGRAPHIE || TOULOUSAINE, ecc. TOME PREMIER. || A PARIS || CHEZ L. G. MICHARD, ecc. 1820, pag. 218, col. 1^a, lin. 22—26, 33—43. — REVUE || DES || DEUX MONDES. || TOME DIXIÈME || QUINZIÈME ANNÉE. — NOUVELLE SÉRIE || PARIS, ecc. 1845, pag. 694, lin. 37—40, nota (2), 15 MAI 1815 — FERMAT || PAR || M. LIBRI || PARIS || IMPRIMERIE DE H. FOURNIER ET C.^{ie} || 7 RUE SAINT-BENOIT. || 1845 (In 8.^o, di 32 pagine, nella seconda delle quali si legge: « EXTRAIT DE LA REVUE DES DEUX MONDES, || LIVRAISON DU 15 MAI 1845 »), pag. 18, lin. 37—40, nota (2). — MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME II. || TOULOUSE, ecc. 1853, pag. 10, lin. 21—38. — PRÉCIS || DES || OEUVRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE; || PAR E. BRASSINNE, ecc. PARIS, || MALLET-BACHELIER, ecc. 1853, pag. 10, lin. 21—38.

(**) VARIA OPERA || MATHEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, || SENATORIS TOLOSANI. || Accesserunt electae quaedam ejusdem Epistolae, vel || ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, || vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, || aut Physicam pertinentibus scriptae. || TOLOSÆ. || Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta || Collegium PP. Societatis JESU. || MDC. LXXIX, pag. 146, pag. 147, lin. 1—28. — Il Sig. Brassinne ne ha dato un estratto nel 1852 (MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME III, ecc., pag. 138, lin. 1—26. — PRÉCIS || DES || OEUVRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE || DE DIOPHANTE; || PAR E. BRASSINNE, ecc., pag. 138, lin. 1—26.

(****) VARIA OPERA || MATHEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, ecc., pag. 146, lin. 3. — Vedi sopra, pag. 262, lin. 21—23.

(****) VARIA OPERA || MATHEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, ecc., pag. 146, lin. 22—24. — Vedi sopra, pag. 262, lin. 1—31, 40—50.

» THÉMATIQUES || DE P. FERMAT », ecc traduce ed espone il passo riportato di sopra della detta lettera del Fermat così (*) :

« Problème. — Trouver la somme des quatrième's puissances
» des termes de la progression naturelle, 1, 2, 3. . . x. Si vous
» multipliez le quadruple du plus grand nombre augmenté de 2,
» par le carré du triangle des nombres, et si du produit vous re-
» tranchez la somme de leurs carrés, vous obtiendrez la somme
» quintuple de leurs quatrième's puissances. (Si les nombres sont
» 1, 2, 3. . . x, la formule de Fermat sera :

$$» \Sigma x^4 = (4x - 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2. »$$

Per errore in questo passo del detto lavoro del Sig. Brassinne trovasi

$$» \Sigma x^4 = (4x - 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2 »$$

in vece di

$$» 5 \Sigma x^4 = (4x + 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2 ».$$

Dalle (2), (3) avendosi

$$\left(1+2+3+\dots+n + \frac{1}{5}(1+2+3+\dots+(n-1)+n-1) \right) (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = \frac{(2n(n+1)-1)n(n+1)(2n+1)}{30} \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

la (1) dà

$$(1) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} (**).$$

(*) MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME III, ecc., page 138, lin. 2—9. — PRÉCIS || DES || ŒUVRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE; || PAR E. BRASSINNE, ecc., pag. 138, lin. 1—9.

(**) RÉSUMÉS ANALYTIQUES || PAR || M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY || MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, || DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC..... || À TURIN || DE L'IMPRIMERIE ROYALE || 1833, pag. 70, lin. 5. — MANUEL || DES CANDIDATS || À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE || PAR EUGÈNE CATALAN, etc. TOME PREMIER, ecc. PARIS, || MALLET-BACHELIER, ecc. 1857, pag. 83, lin. 7. — ANNALI || DI MATEMATICA || PURA ED APPLICATA || PUBBLICATI DA || BARNABA TORTOLINI, ecc. TOMO IV. || ANNO 1861. || ROMA, ecc. 1861, pag. 47, lin. 13, N.º 1. — INTORNO || AD UNA FORMOLA SOMMATORIA DELLE POTENZE INTERE || DE' NUMERI NATURALI || NOTA || DI F. SIACCI (lin. 4.º, di 4 pagine, nella quarta delle quali, numerata 4 (lin. 19—20) si legge: « Estratta dagli Annali di Matematica pura ed applicata, || Tomo IV. Num. 1. Gennaio e Febbraio. Roma 1861. »), pag. 2, lin. 13. — CENNI || SOPRA ALCUNI RISULTATI OTTENUTI || NELL'ANALISI ALGEBRICA E DIFFERENZIALE || DA G. B. MARSANO || PROFESSORE DI MATEMATICHE IN GENOVA || GENOVA || CO'TIPI DEL R. I. DE' SORDO-MUTI || 1862, pag. 5, lin. 21. — TRATTATO || DI || ALGEBRA SUPERIORE || DI || GIOVANNI NOVI, ecc. PARTE PRIMA. || ANALISI ALGEBRICA. || FIRENZE. || FELICE LE MONNIER. || 1863, pag. 177, lin. 6. — ARCHIV || DER || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Herausgeber: || Dr. Johann August Grunert, ecc. Vierundfunzigster Theil. || Greifswald, ecc. 1872, pag. 71, lin. 16, Erstes Heft. — Essendo

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$$

la (4) può anche scriversi così (ÉLÉMENTS || D'ALGÈBRE; || PAR M. BOURDON, ecc. PARIS, ecc. 1834, pag. 697, lin. 8. — ÉLÉMENTS || D'ALGÈBRE, || PAR M. BOURDON, ecc. PARIS, ecc. 1860, pag. 521, lin. 8. — ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 247, lin. 40—41. — PASSAGES RELATIFS || À DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc., ROME, ecc. 1864, pag. 25, lin. 22—23. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE 1865, etc., pag. 116, lin. 22—24. — PASSAGES RELATIFS || À DES || SOMMATIONS

Se

$$S_m = a^m + (a+r)^m + (a+2r)^m + \dots + (a+(n-1)r)^m$$

si ha la seguente formola :

$$S_m = \frac{(a+nr)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2} r S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} r^2 S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} r^3 S_{m-3} - \dots - \frac{nr^m}{m+1} \quad (2).$$

Se in questa formola pongasi

$$a = r = 1$$

DE SERIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 36, lin. 23-24),

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{6n^3 + 15n^2 + 10n - 1}{30}$$

(*) NOUVELLES ANNALES || DE || MATHÉMATIQUES. || JOURNAL, ecc. Rédigé par MM. || TERQUEM, ecc. ET || GERONO, ecc. TOME PREMIER. || PARIS, ecc. 1842, pag. 176, lin. 5-21. — ALGÈBRE || ÉLÉMENTAIRE || A L'USAGE || DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES || ET || AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT, || DEUXIÈME ÉDITION, || COMPRENANT TOUTES LES MATIÈRES EXIGÉES POUR L'ADMISSION || A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. || PAR M. LIONNET, ecc. PARIS || MALLET-BACHELIER, ecc. 1858, pag. 253, lin. 7-22. — ALGÈBRE || ÉLÉMENTAIRE || A L'USAGE || DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES, || ET || AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT, || PAR M. LIONNET, ecc. TROISIÈME ÉDITION || PARIS, || GAUTHIER-VILLARS, ecc. SUCCESSION DE MALLET-BACHELIER, ecc. 1868, pag. 254, lin. 7-22. — TRAITÉ || D'ALGÈBRE, || PAR CHOQUET, ecc. PARIS, || MALLET-BACHELIER, ecc. 1856, pag. 293, lin. 3-21. — Se in questa formola si scrive b in vece di r si ha la seguente

$$(a+nb)^{m+1} - a^{m+1} - nb^{m+1} - \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} b^2 S_{m-1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 S_{m-2} - \dots - (m+1) b^m S_1 = \frac{(m+1)b}{(m+1)b}$$

che il P. Giovanni Prestet, morto nel giorno 8 di giugno del 1690 (DICTIONNAIRE || DE LA || LANGUE FRANÇOISE, || ANCIENNE ET MODERNE, || DE PIERRE RICHELLET || AUGMENTÉ, ecc. TOME PREMIER. || A-D. || Imprimé à Lyon, *de se vend* || A PARIS, || Chez JACQUES ESTIENNE, rue Saint Jacques, à la Vertu. || MDCCLXXXVIII. || AVEC PRIVILEGE DU ROY, pag. xcviij, col. 2^a, lin. 26-38) dà nella edizione intitolata « ELEMENS || DES || MATHÉMATIQUES || OU || PRINCIPES GÉNÉRAUX || DE || TOUTES LES SCIENCES, || QUI ONT LES GRANDEURS POUR OBJET. || CONTENANT UNE MÉTHODE COURTE ET FACILE || pour || comparer ces grandeurs *de* pour découvrir leurs rapports par le moyen || des caracteres des nombres, *de* des lettres de l'alphabet. Dans laquelle || les choses sont démontrées selon l'ordre Géométrique, *de* l'Analyse renduë || beaucoup plus facile, *de* traitée plus à fond que l'on n'a fait jusqu'ici. || A PARIS, || Chez ANDRÉ PRALARD, Marchand Libraire, rue Saint Jacques, || à l'Occasion || M. DC. LXXV. || AVEC PRIVILEGE DU ROY » (pag. 178, lin. 21-42) scrivendo :

« DIXIÈME PROBLÈME.

- » LXI. Si nous prenons la Table des puissances, & que la grandeur a soit considérée comme le premier terme d'une progression arithmétique, & b comme la différence qui regne dans cette progression : la somme de telles puissances qu'on voudra de tous les termes de la progression, peut se trouver ainsi.
- » On prend dans la Table des puissances le rang de la puissance plus haute d'un degré que les puissances cherchées, & l'on élève au même degré le terme qui suit immédiatement & de plus près le dernier de la progression ; & l'on en retranche.
- » 1.^o Le premier terme de la progression élevé à ce même degré.
- » 2.^o Le produit du nombre de tous les termes par la différence élevée à ce même degré.
- » 3.^o Chaque terme de la progression élevé à chacune des puissances qui sont moindre d'un degré que les puissances cherchées, & multiplié dans chacun de ces degrés par ce qui multiplie un pareil degré du premier terme a au rang que l'on a pris dans la Table des puissances. Ensuite on divise le reste qu'on trouve par la puissance du premier terme a , qui a même degré que les puissances cherchées, multiplié par le nombre de la cellule où cette puissance se trouve au rang que l'on a pris. Et l'espérant qu'on trouve est aussi la somme cherchée. Les exemples éclairciront ces règles.

Questa formola è applicata quindi nella edizione stessa (pag. 179, pag. 180, lin. 1-17) ai casi di $a=5$, $b=3$, $n=4$, $m=2$, $m=3$. Questa edizione della quale la Biblioteca Casanatense di Roma possiede un esemplare contrassegnato « X. V. 64 » si compone di 432 pagine, nelle 3^a-4^a delle quali trovasi una dedicatoria firmata (pag. 4^a, lin. 24-25): « Votre tres-humble, tres-obeissant, & tres-obligé serviteur, J. P. ».

e quindi successivamente

$$m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad m = 4$$

si hanno le formole

$$(2) \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(5) \quad S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

$$(6) \quad S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad (*)$$

delle quali le prime tre sono identiche colle (2) (3), e la quarta è identica colla (4).

La (6) si può anche dimostrare direttamente, come ha avvertito il Sig. Dostor, sostituendo nella

$$n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

successivamente in vece di n tutti i numeri dall'1 ad n , e sommando quindi le eguaglianze che così si ottengono (**).

In simil modo possono dimostrarsi direttamente le (3) (5). ✓

Sommando in fatti le

$$1^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

$$2^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

$$3^3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 \cdot 5}{6},$$

$$4^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 7}{6},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n-1)^3 = \frac{(n-1)n(2n-1) - (n-1)(n-2)(2n-3)}{6},$$

$$n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1)}{6},$$

si ha

(*) Dalle (3) (5) (6) si hanno anche le seguenti

$$S_2 = \frac{2n+1}{3} S_1; \quad S_3 = S_1^2, \quad S_4 = \frac{3n^2+3n-1}{5} S_2.$$

Dalla prima di queste ultime tre formole si ha anche, a motivo della seconda (ARCHIV || der || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 72, lin. 9-12):

$$S_1 S_2 = \frac{1}{3} (2n+1) S_3.$$

(**) ARCHIV || der || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 70, lin. 17-23, pag. 71, lin. 1-16.

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

Sommando similmente le

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4},$$

$$2^3 = \frac{2^2 \cdot 3^2 - 1^2 \cdot 2^2}{4},$$

$$3^3 = \frac{3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2}{4},$$

$$4^3 = \frac{4^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 4^2}{4},$$

$$\dots$$

$$(n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2 - (n-2)^2 (n-1)^2}{4},$$

$$n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2 - (n-1)^2 n^2}{4},$$

{

si ha

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

È da notare che la (1) può scriversi così

$$S_4 = (S_1 + \frac{1}{3} (S_1 - 1)) S_3;$$

quindi

$$6 S_1 S_3 = S_2 + 5 S_4,$$

$$S_1 S_2 = \frac{1}{6} S_3 + \frac{5}{6} S_4 \quad (**).$$

B. BONCOMPAGNI.

(*) Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt von Johann August Grunert ecc. Erster Theil. Erste Abtheilung. Element der theoretischen und praktischen Arithmetik. Leipzig, 1841, pag. 340, lin. 22—36, pag. 341, lin. 1—11.

(**) ARCHIV der MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 72, lin. 5—14.

Die Ausziehung der n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik.

Von

P. LUCKEY in Gönningen/Kr. Reutlingen.

1. Einleitung.

Die Art und Weise, auf welche islamische Mathematiker des Mittelalters Wurzeln gegebener ganzer Zahlen zu finden lehrten, wurde bisher nur durch Schriften bekannt, die das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln behandeln. Was ich an Texten, Übersetzungen und Auszügen hierüber im gedruckten Schrifttum fand, betrifft Werke der folgenden Gelehrten: al-Karağī¹⁾ (= „al-Karhī“, Anfang des 11. Jahrhunderts), an-Nasawī²⁾ (erste Hälfte des 11. Jahrhunderts), al-Ḥaṣṣār³⁾ (nach Suter wahrscheinlich 12. Jahrhundert), Ibn al-Bannā⁴⁾ (1251–1321), al-Qalaṣādī⁵⁾ (starb 1486) und Bahā'addīn⁶⁾ (starb 1621). Von diesen waren die beiden ersten und der letzte sicher oder sehr wahrscheinlich Perser und wirkten im Osten. Ibn al-Bannā' aus Marokko und al-Qalaṣādī aus Spanien wirkten im islamischen Abendland, und dasselbe wird für al-Ḥaṣṣār gelten, der nach Angabe von Ibn Ḥaldūn seinem Rechenbuch das Kompendium des Ibn al-Bannā' zugrunde legte.

Neben solchen uns arabisch erhaltenen Werken sind mittelalterliche Übersetzungen und sonstige mittelalterliche Schriften heranzuziehen, von denen ich hier nur den auf eine arabische Vorlage zurückgehenden „Liber Algorithmi de pratica arismetrice“⁷⁾ nenne, der in einer Handschrift dem Johannes von Sevilla (um 1140) zugewiesen wird.

An-Nasawī zieht Quadrat- und Kubikwurzeln aus, die übrigen nur Quadrat-

¹⁾ HOCHHEIM, A.: Al Kāfi fil Hisāb des ... Alkarkhi II. Zehntes Progr. Höh. Gewerbesch. zu Magdeburg, 1879. Progr. Nr. 224.

²⁾ SUTER, H.: Über das Rechenbuch des ... el-Nasawī. Bibl. Math. (3) 7, 113–119 (1906).

³⁾ SUTER, H.: Das Rechenbuch des ... el-Ḥaṣṣār. Bibl. Math. (3) 2, 12–40 (1901).

⁴⁾ MARRE, A.: Le Talkhys d'Ibn Albannā. Atti Acc. Pont. de'Nuovi Lincei 17, 289–319 (1864).

⁵⁾ WOEPCKE, F.: Traduction du traité d'arithmétique d'... Alkalçadi. Atti Accad. Pont. de' Nuovi Lincei 12 (1859), Sonderdruck: Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise ... par M. F. WOEPCKE, 1. partie, II, Rom 1859.

⁶⁾ Essenz der Rechenkunst von ... Beha-eddin. Arabisch u. deutsch herausgegeben von NESSELMANN, F., Berlin 1843.

⁷⁾ Trattati d'arimetica pubbl. da B. BONCOMPAGNI, II, Roma 1857.

wurzeln. Al-Bīrūnī (973–1048), verfaßte nach eigener Angabe^{a)} eine 100 Blätter starke „Abhandlung über die Bestimmung der Kubik- und höheren Wurzeln“. ‘Omar Haiyāmī (starb 1123) sagt in seiner Algebra^{b)}:

Von den Indern hat man Methoden zur Bestimmung der Seiten der Quadrate und Kuben, Methoden, die auf geringes Probieren (istiqrā') gegründet sind, nämlich die Kenntnis der Quadrate der neun Ziffern, d. h. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 9^2$ und ebenso ihrer gegenseitigen Produkte, d. h. des Produktes $2 \cdot 3$ und dergleichen. Von uns ist eine Schrift über den Beweis der Richtigkeit jener Methoden und darüber, daß sie den Forderungen genügen. Wir haben übrigens ihre Arten vermehrt, nämlich in Gestalt der Bestimmung der Seiten des Quadratoquadrats (x^4), des Quadratokubus (x^5), des Kubokubus (x^6) (usw.) bis zu beliebiger Höhe, worin keiner (uns) zuvorkam, und jene Beweise sind rein arithmetische, gegründet auf die arithmetischen (Bücher) der Elemente (Enklids).

Die Arbeiten dieser beiden hervorragenden Perser über die Ausziehung der Wurzeln von höherem als dem dritten Grade sind nicht auf uns gekommen^{a)}. Man hat die dem modernen Mathematiker naheliegende Vermutung ausgesprochen, daß ‘Omar Haiyāmī mit der binomischen Entwicklung für beliebig hohe Exponenten etwa in der Weise arbeitete, wie wir das im 16. Jahrhundert bei Apian, Stifel und anderen Mathematikern der Renaissance beobachten. Dieses auch uns für die niedrigsten Wurzelexponenten noch geläufige Verfahren tritt uns im Abendland für die Wurzelexponenten $n = 2$ und $n = 3$ schon bei Leonardo Pisano entgegen. Wir wollen es, um es kurz zu benennen, als das „Verfahren der Renaissance“ bezeichnen, ohne damit sagen zu wollen, daß es nur den Mathematikern der Renaissance eigentümlich und von ihnen erfunden sei.

Die Inder zogen nach allem, was wir bisher wissen – und das stimmt mit der Äußerung ‘Omar Haiyāmīs überein – nur Quadrat- und Kubikwurzeln aus, und nach übersetzten Quellen und Darstellungen von Quellenforschern gründet sich ihr Verfahren der Bildung der Quadrate und Kuben mehrstelliger Zahlen und dementsprechend auch ihr Verfahren der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln auf die fertige Formel des binomischen Lehrsatzes für $n = 2$ und $n = 3$, wie bei den Mathematikern der Renaissance. Sie besaßen aller-

^{a)} Al-Bīrūnī, Chronologie orient. Völker, herausgegeben von SACHAU, E., Leipzig 1878, Neudruck Leipzig 1923, S. XXXII. – Siehe auch WIEDEMANN, E.: Beitr. Gesch. Naturw. LX, S. 73 = S.B. phys.-med. Soz. in Erlangen 52/53, 73 (1920–21).

^{b)} WOEPCKE, F.: L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī. Paris 1851, Text S. 9, Übers. S. 13.

^{a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Schon Abul-Wafā' al-Būzāgānī (starb 998) verfaßte eine uns nicht erhaltene „Schrift über die Ermittlung der Seite des Kubus und des Quadratoquadrats und dessen, was aus beiden zusammengesetzt ist“. Vgl. J. asiatique (5) 5, 253–54 (1855). Auch hier dürfte es sich um arithmetische und nicht, wie WOEPCKE meint, um geometrische Methoden zur Ausziehung von Wurzeln höheren Grades gehandelt haben.

dings die Binomialkoeffizienten und ihre Erzeugungsweise in Form des sogenannten Pascalschen Dreiecks in einer speziellen Einkleidung¹⁰⁾.

Schon sehr früh, in den Anfängen in den *Chandaḥ-sūtra* des Piṅgala (nach DATTA und SINGH vor 200 v. Chr.), behandeln sie nämlich in ihrer Metrik die Bestimmung der Anzahl der möglichen Zusammenstellungen von langen und kurzen Silben zu einem n -silbigen Versfuß. v kurze und $n-v$ lange Silben ergeben durch ihre verschiedenen Verteilungsmöglichkeiten auf n Stellen $\binom{n}{v}$ n -silbige Versfüße (ebenso wie sich aus v Nullen und $n-v$ Einsen $\binom{n}{v}$ n -stellige dyadische Zahlen bilden lassen). Z. B. erhält man für $n=3$, $v=2$

die Versfüße $\cup \cup -$, $\cup - \cup$, $- \cup \cup$

(oder die dyadischen Zahlen 001 , 010 , 100).

Von der Möglichkeit der Erfüllung mit sinnvollen Worten und dem Wohlklang der entsprechenden Verse wird bei dieser Entfaltung des kombinatorischen Verstandes offenbar abgesehen. Die sukzessive Bildung und Anzahlbestimmung dieser möglichen Versfüße für $n=1, 2, \dots$ führte zum Pascalschen Dreieck auf Grund seines Bildungsgesetzes

$$\binom{n}{v} = \binom{n-1}{v-1} + \binom{n-1}{v},$$

ferner zu der Erkenntnis

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2$$

in der Einkleidung, daß die Anzahl der n -silbigen Versfüße 2^n beträgt (ebenso wie die Anzahl der n -stelligen dyadischen Zahlen von $00\dots 0$ bis $11\dots 1$).

A. N. SINGH¹⁰⁾ sagt im Zusammenhang hiermit, „die Entwicklung von $(a+b)^n$ für ganze Werte von n sei in Indien seit sehr frühen Zeiten bekannt gewesen. Belege für $n > 3$ bringt er am angeführten Orte nicht bei. Aus jener prosodischen Lehre scheint mir zwar die Bildung und kombinatorische Verwendung der Zahlen $\binom{n}{v}$ erwiesen zu sein, nicht aber die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes. Nach der Meinung von L. ALSDOFF¹⁰⁾ hat jene Lehre die Bindung an die Metrik nie aufgegeben. G. CHAKRAVARTI¹⁰⁾ weist aber nach, daß solche kombinatorische Betrachtungen auch für andere Dinge aus ver-

¹⁰⁾ SINGH, A. N.: On the use of series in Hindu mathematics. *Osiris* 1 (1936), S. 606–628. Siehe insbes. S. 623–24. – ALSDOFF, L.: Die Pratyayas. Ein Beitrag zur indischen Mathematik. *Z. Ind. u. Iranist.* 9, 97–157, (1933–34). – CHAKRAVARTI, G.: Growth and Development of Permutations and Combinations in India. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 24, 79–88 (1933).

schiedenen Bereichen des indischen Lebens und der indischen Wissenschaft angestellt wurden.

Schon M. CANTOR¹¹⁾ konnte auf Grund der Übersetzungen von COLEBROOKE¹²⁾ und einer Arbeit von Albr. Weber über indische Kombinatorik berichten.

Im folgenden teile ich erstmalig aus dem islamischen Bereich die Behandlung der Ausziehung von Wurzeln beliebigen Grades aus Zahlen mit und weiterhin erstmalig^{12a)} aus diesem Bereich das Vorkommen des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten und der Erzeugungsweise der Binomialkoeffizienten in der Form des Pascalschen Dreiecks.

Wenn ich von jetzt ab kurz vom binomischen Lehrsatz spreche, so ist stets der Satz für ganze positive Exponenten gemeint, denn andere Fälle kommen nicht in Frage. Die Kenntnis des fertigen binomischen Lehrsatzes ist keine notwendige Voraussetzung für elementare arithmetische Verfahren zur Ausziehung von n -ten Wurzeln aus Zahlen. Hierin irrt TROPFKE¹³⁾, der durch M. CANTOR¹¹⁾ (S. 777) verführt sein dürfte. Es wird sich nämlich zeigen, daß die islamischen Mathematiker zwei Methoden der Wurzelausziehung kannten. Die eine ist freilich diejenige auf Grund der fertigen Formel des binomischen Lehrsatzes nach der Weise der Renaissance. Aber sie scheint mir, wenigstens für höhere Werte von n , historisch die jüngere zu sein. Älter dürfte die andere Methode sein, und sie ist auch die elementarere, weil sie die Formel des fertigen binomischen Lehrsatzes nicht voraussetzt, vielmehr die Bildung nach dieser Formel und damit die Bildung der jeweilig mit der Potenz einer Zahl multi-

¹¹⁾ CANTOR, M.: Geschichte der Mathematik I³ (1907), 619–20.

¹²⁾ COLEBROOKE, H. T.: Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara, London 1817.

^{12a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Lange nach Abschluß der obigen Arbeit werde ich durch einen Hinweis bei HANKEL¹⁴⁾ (S. 269) aufmerksam auf den Artikel: TYTLER, J.: Essay on the Binomial Theorem, as known to the Arabs. Asiatic Researches 18, Calcutta 1820. TYTLER berichtet aus der mir nicht zugänglichen Schrift *Khazanat ul Ilm* von Khan Jee in Patna und nach unmittelbaren Mitteilungen ihres Verfassers über das Vorkommen des binomischen Lehrsatzes und der Binomialkoeffizienten bei al-Kāšī, wo auch ich diese Gegenstände fand, und in dem Werk „Hauptpunkte des Rechnens“ (*‘uyūn al-ḥisāb*) von Muḥammad Bāqir Zainal‘ābidīn al-Yazdī (Anfang des 17. Jahrh.). Diese Schrift, die uns in Mosul, Teheran und Bankipore erhalten ist und sich auch mit der Sexagesimalrechnung befaßt, scheint, nach den im Katalog von Bankipore wiedergegebenen Kapitelüberschriften zu urteilen, von al-Kāšī's „Schlüssel“ abhängig zu sein. TYTLER gibt aus ihr eine Stelle wieder, in der die Berechnung der Binomialkoeffizienten an folgendem Beispiel erläutert wird: $\binom{12}{1} = 12$, $\binom{12}{2} = (12 - 1) \cdot \frac{12}{2} = 66$, $\binom{12}{3} = (12 - 2) \frac{66}{3} = 220$ usw.

Mein obiges „erstmalig“ trifft also nicht zu. Abgesehen von HANKEL'S kurzem Hinweis scheint aber keiner unserer Mathematikhistoriker die Note TYTLER'S beachtet zu haben. TYTLER behandelt nicht die von mir nach al-Kāšī dargestellte Erzeugung der Binomialkoeffizienten.

¹³⁾ TROPFKE, J.: Geschichte der Elementar-Mathematik II³ (1933), 174.

plizierten Binomialkoeffizienten bei jeder Wurzelausziehung aus einer Zahl erneut vollzieht. Diese Methode ist das bekannte Ruffini-Hornersche Verfahren zur näherungsweise Auflösung algebraischer Gleichungen. [PAOLO RUFFINI (1765–1822) entwickelte dieses Verfahren, das er auch besonders auf die Wurzelausziehungen anwandte, zuerst in einer 1804 preisgekrönten und gedruckten Abhandlung¹⁴⁾. WILLIAM GEORGE HORNER (1786–1837) legte, anscheinend unabhängig von Ruffini, dieselbe, vielfach nach ihm allein benannte Methode 1819 durch DAVIES GILBERT der Royal Society vor¹⁵⁾]. Das frühe Vorkommen des Ruffini-Hornerschen Verfahrens braucht um so weniger zu überraschen, als dieses Verfahren im 13. Jahrhundert und schon früher den Chinesen nicht nur zu Wurzelausziehungen, d. h. zur Lösung der reinen Gleichungen $x^n - q = 0$, sondern auch zur Lösung gemischter algebraischer Gleichungen dritten Grades und höherer Grade diente. Die Chinesen wandten das Verfahren in einer äußeren Anordnung an, wie sie uns ganz ähnlich in der islamischen Mathematik für die reinen Gleichungen begegnet. Ich gedenke darauf in einer künftigen Arbeit zurückzukommen, die von den Näherungslösungen gemischter algebraischer Gleichungen im Mittelalter handeln soll. Diese Untersuchung wird eine notwendige Ergänzung und Fortsetzung der vorliegenden Arbeit bilden. Denn die Näherungslösungen der reinen Gleichungen fanden ihre naturgemäße Fortsetzung und Verallgemeinerung in denjenigen der gemischten, mit welchen sie logisch zusammengehören, und welchen man erfolgreich mit denselben Methoden wie den reinen beizukommen suchte. Das kommt in den Werken über Mathematikgeschichte nicht immer klar zum Ausdruck, wenn die Wurzelausziehungen und die Näherungsverfahren für gemischte algebraische Gleichungen in der Behandlung auseinandergerissen werden.

Den Stoff der vorliegenden Untersuchung schöpfe ich hauptsächlich aus dem Werk „Schlüssel der Rechner über das Rechnen“¹⁶⁾ (vollendet am

¹⁴⁾ RUFFINI, Paolo: Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado. Modena 1804. – Näheres über diese 175 Quartseiten umfassende Abhandlung, die ich nicht einsah, und über Ruffinis spätere Veröffentlichungen über den Gegenstand bringt die Arbeit: CAJONI, FL.: Horner's method of approximation anticipated by Ruffini. Bull. Amer. Math. Soc. 17, 409–14 (1910–11). Eine italienische Übersetzung von CAJONIS Aufsatz gab GINO LORIA im Boll. bibl. stor. sc. mat. 13, 81–86 (1911).

¹⁵⁾ HORNER, W. G.: A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1819, Part I, S. 308–35. Nach SMITH, D. B.: Hist. of Math., I, 1923, S. 459 erschien die Arbeit erneut im Ladies' Diary 1838 und in verbesserter Form in The Mathematician von 1843 (1845?). Andere Arbeiten HORNERS über seine Methode teilt CAJONI¹⁴⁾ mit, der auch deren Ausbreitung durch A. DE MORGAN und J. R. YOUNG schildert. Nach E. T. WHITTAKER u. G. ROBINSON (The Calculus of Observations, 2. Aufl., 1926, S. 100) gab für die Kubikwurzelausziehung ALEXANDER INGRAM vor HORNER das Verfahren im Appendix seiner Ausgabe von HUTTON'S Arithmetic (Edinburgh 1807).

¹⁶⁾ Aus dem „Schlüssel“ übersetzte WOEPCKE einen Teil des Vorworts und

2. März 1427), kürzer gewöhnlich „Schlüssel des Rechnens“ genannt, einer Schrift, die hoch über den bisher veröffentlichten Rechenbüchern der islamischen Spätzeit steht. Sie hat zum Verfasser den persischen Astronomen und Mathematiker Ġamšīd b. Masʿūd b. Maḥmūd al-Kāšī (d. h. „der Kāšāner“), zubenannt Ġiyāṭaddīn (d. h. „Hilfe der Religion“). K. (= al-Kāšī) ist als einer der Astronomen bekannt, die in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts zu Samarqand an der Sternwarte Ulūğ Begs¹⁷⁾ wirkten und am astronomischen Tafelwerk dieses gelehrten Fürsten arbeiteten. Für jene Zeit, in der die mathematischen Wissenschaften beim Islam als erstarrt und versandet gelten, bedeutet der Gelehrtenstab des Ulūğ Beg einen Lichtblick, in dem K. der Glanzpunkt ist. Seine Leistungen sind bisher noch nicht genügend gewürdigt worden. Nur aus zweiter Hand ist seine elegante und überaus genaue Bestimmung von $\sin 1^\circ$ aus $\sin 3^\circ$ durch Lösung einer trinomischen kubischen Gleichung nach einem Iterationsverfahren bekannt, für das HANKEL¹⁸⁾ Worte höchsten Lobes fand. „Diese schöne Methode der Auflösung numerischer Gleichungen“, sagt er, „steht allen seit Viète im Occidente erfundenen Approximationsmethoden an Feinheit und Eleganz nicht nach . . . Wir dürfen wohl diese Methode das Originellste und Bedeutendste nennen, was uns die gesamte Literatur der Araber bietet.“ Als C. SCHÖY¹⁹⁾ sich mit diesem Gegenstand nach einer anderen Quelle zu beschäftigen begann, riß ihm der Tod die Feder aus der Hand. K.s flüssige Berechnung von π , bei der er die Genauigkeit bedeutend weiter treibt als Archimedes, und K.s Einführung der Dezimalbrüche konnten in TROPFKE'S Geschichte der Elementarmathematik bisher nur in einer Fußnote²⁰⁾ erwähnt werden. Ich behalte mir vor, über diese Gegenstände aus den Quellen Näheres zu bringen^{20a)}.

Vom „Schlüssel“ – so sei das erwähnte große Werk K.s über das Rechnen kurz genannt – sind uns in verschiedenen Bibliotheken des Morgen- und Abendlandes Handschriften erhalten. Wegen der Zeitumstände konnte ich nur eine Photokopie der Leidener Handschrift²¹⁾ und die Handschrift des Instituts für

einige Summationsformeln ins Französische: WOERCKE, F.: Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, *Annali di mat. pura ed appl. pubbl. da B. TORTOLINI*, 6, 225–48 (Rom 1864); s. S. 245–48.

¹⁷⁾ Vgl. BARTHOLD, W.: Ulūğ Beg und seine Zeit. Deutsch von W. HINZ, Leipzig 1935. Dieses Buch bringt auch Nachrichten über die wissenschaftliche Betätigung des Ulūğ Beg und über die Person al-Kāšīs.

¹⁸⁾ HANKEL, H.: Zur Geschichte der Mathematik, S. 289–93, Leipzig 1874.

¹⁹⁾ SCHÖY, C.: Beiträge zur arabischen Trigonometrie. *Isis* 5, 385–89 (1923).

²⁰⁾ TROPFKE¹³⁾, I³, S. 175 (1930). TROPFKE beruft sich auf D. E. SMITH (*Hist. of Math.* II, 1925, 238–40), dieser auf Professor SALIH MOURAD in Istanbul.

²¹⁾ Cat. cod. or. Bibl. Ac. Lugd. Bat. auct. P. de Jong et M. J. de Goeje III (Leiden 1865), S. 75 Nr. 1036 (Cod. 185 Gol.). Der Leidener Bibliothek der Rijks-Universiteit schulde ich großen Dank für Besorgung einer vorzüglichen Photokopie der drei ersten Bücher dieser Schrift, ferner einer Photokopie von Nr. 1021 (Cod. 556(6) Warn.), dem Rechenbuch von an-Nasawī.

(Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften in Berlin²²) benutzen, was mir aber für den vorliegenden Zweck ausreichend erscheint. Die Wurzel-
ausziehung und der binomische Satz sind der Inhalt des fünften Kapitels des
ersten Buches. Dieses Kapitel steht in der Leidener Handschrift auf den 17 Sei-
ten 12^a bis 20^a; in der Handschrift des Instituts fehlt es. Ferner behandelt das
fünfte Kapitel des dritten Buches (*Leiden* 40^a–42^b, *Inst.* 8^a–10^b) das Ausziehen
von Wurzeln aus Sexagesimalzahlen. Trotz der teilweise ermüdenden Um-
ständlichkeit, mit welcher der Verfasser die Zusammenhänge und Rechnungen
in Worten darlegt, würde ich es an sich für geboten halten, die vollständige
Übersetzung der beiden Kapitel vorzulegen. Ich verzichte darauf nur, weil die
Zeitverhältnisse Kürze gebieten, und gebe deshalb auch nur das aus dem In-
halt wieder, was mir am wichtigsten erscheint.

Leider nennt K. seine Vorgänger nicht. Er gehört aber zu den für den Hi-
storiker erfreulichen Männern, die das kennzeichnen, was sie als ihr geistiges
Eigentum in Anspruch nehmen, und erscheint hierbei ehrlich. Im Kapitel
über Wurzelausziehungen erklärt er nichts als eigene Erfindung, es sei denn
die Anordnung, die er dem Schema der Wurzelausziehung gibt. Das ist aus
dem Anfang der weiter unten (S. 268) übersetzten Stelle zu ersehen. Er über-
liefert uns also hier – und das gilt auch für den binomischen Lehrsatz – älteres
Gut, für das sich in Zukunft hoffentlich über die mitgeteilten Stellen bei
al-Bīrūnī und 'Omar Ḥaiyāmī hinaus ältere Belege finden lassen. Beweise gibt
K. nicht, wohl aber vernünftige Erläuterungen.

2. Renaissanceverfahren und Ruffini-Horner'sches Verfahren.

Zur Klärung der Begriffe soll ausgeführt werden, was rein mathematisch
unter dem Verfahren der Renaissance und dem Ruffini-Horner'schen Verfah-
ren verstanden werden soll. Beide Methoden stelle ich in der Art und nur in
der Allgemeinheit dar, die mir für meinen mathematikhistorischen Zweck er-
forderlich erscheinen, wobei ich von vornherein auch auf die später zu behan-
delnde Arbeit des Mittelalters an den gemischten algebraischen Gleichungen
Rücksicht nehme.

Die Koeffizienten des Polynoms

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$$

seien gegebene positive oder negative ganze Zahlen. Außer a_0 können einzelne
von ihnen oder alle auch gleich Null sein.

²²) Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Naturw. u. d. Med. 7, 160, Nr. 1, 2 (1939). Das ge-
nannte Institut ließ mir diese Handschrift auf längere Zeit ins Haus, wofür ich be-
sonders dankbar bin.

Die Funktion (5_l) kann als allgemeiner Vertreter dieser Funktionen dienen, wobei man für den Fall (5_a) $K = 0$, $l = a$ und $l_0 = a_0$, $l_1 = a_1$, ..., $l_n = a_n$ setzt. Diese Funktion (5_l) ist eine ganze rationale Funktion φ_l von l , deren Koeffizienten $l_0, l_1, \dots, l_n$ von $a_0, a_1, \dots, a_n$ und von den schon in den der Funktion (5_l) vorhergehenden Funktionen vorkommenden Zahlen $a, b, \dots, k$ abhängen. Es lassen sich also nacheinander die Koeffizienten $b_0, b_1, \dots, b_n$, dann $c_0, c_1, \dots, c_n$ usw. bis $l_0, l_1, \dots, l_n$ bestimmen, und so kann man die Werte $\varphi_a(a), \varphi_b(b), \dots, \varphi_l(l)$ nacheinander ausrechnen. Wie die genannten Koeffizienten praktisch zu finden sind, ist später auszuführen. Nur vom letzten dieser Koeffizienten bei jeder Funktion, also allgemein von l_n , sei schon jetzt gesagt:

$$(6) \quad l_n = \varphi_l(0) = \varphi_h(k).$$

Also ist

$$(6a) \quad \varphi_l(l) - \varphi_h(k) = f(a + b + \dots + k + l) - f(a + b + \dots + k) = \\ = f(L) - f(K) = l_0 l^n + \dots + l_{n-1} l$$

diejenige Funktion von l , welche übrigbleibt, wenn man in $\varphi_l(l) = f(a + b + \dots + k + l) = f(L)$ das von l unabhängige Glied l_n wegläßt. Man kann $f(T) = f(a + b + \dots + s + t)$ aus $f(a)$ und lauter solchen Funktionen zusammensetzen:

$$(7) \quad \varphi_l(t) = f(T) = f(a + b + \dots + s + t) = \\ = f(a) + [f(a + b) - f(a)] + [f(a + b + c) - f(a + b)] + \dots + \\ + [f(a + b + \dots + s + t) - f(a + b + \dots + s)].$$

Ist T als mehrstellige Zahl gegeben, so kann nach diesem Verfahren der sukzessiven Berechnung schließlich der Wert

$$f(T) = \varphi_l(t)$$

gefunden werden, den die gegebene Funktion $f(x)$ für $x = T$ annimmt.

Es sei nun T nicht gegeben, und es sei von der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = 0$$

eine oder die positive Wurzel x_0 gesucht, falls eine solche vorhanden ist. Da wir uns auf positive Wurzeln beschränken, sei von jetzt ab mit „Wurzel“ stets eine positive Wurzel gemeint.

Man sucht dann die Zahlen $a, b, \dots$ nacheinander so zu bestimmen, daß entweder die Bedingungen

$$(V_a) \quad \varphi_a(a) \leq 0 < \varphi_a(a + 10^a)$$

$$(V_b) \quad \varphi_b(b) \leq 0 < \varphi_b(b + 10^b)$$

$\dots$	$\dots\dots\dots$
(V_k)	$\varphi_k(k) \leq 0 < \varphi_k(k + 10^k)$
(V_l)	$\varphi_l(l) \leq 0 < \varphi_l(l + 10^l)$
$\dots$	$\dots\dots\dots$
(V_t)	$\varphi_t(t) \leq 0 < \varphi_t(t + 1)$

erfüllt werden, oder die Bedingungen, die aus diesen Bedingungen (V) dadurch hervorgehen, daß man in ihnen jedes Zeichen $<$ durch das Zeichen $>$ ersetzt. Diese Ersetzung soll von jetzt ab nicht mehr besonders ausgesprochen werden.

Selbst bei ganz blindem Probieren erfordert die Lösung jeder dieser Forderungen (V), also die Bestimmung jeder der Größen $a, b, \dots, t$ wegen deren in (3) angegebenen Form höchstens 10 Versuche, da höchstens mit den Ziffern $\lambda = 0, 1, \dots, 9$ durchzuprobieren ist. Sind $a, b, \dots, t$ gefunden, so sind

$$A = a, \quad B = a + b, \dots, \quad L = a + b + \dots + t$$

die auf eine, zwei, $\dots, (n - t + 1)$ gültige Ziffern bestimmten Näherungswerte einer oder der Lösung x_0 von (I), und die Erfüllung der letzten dieser Vorschriften, nämlich

$$(V_t) \quad f(T) \leq 0 < f(T + 1)$$

zeigt an, daß als Näherungswert

$$T = a + b + \dots + t$$

der ganzzahlige Teil einer oder der Wurzel

$$x_0 = T + T', \quad 0 \leq T' < 1$$

von (I) gefunden ist.

Ist die erste Bedingung (V_a) erfüllbar, und ist $f(x)$ in dem Intervall von a bis $a + 10^a$ monoton, so ist jede der Bedingungen (V) auf genau eine Weise erfüllbar, und das Verfahren liefert in dem genannten Intervall genau eine Wurzel. Ist $f(x)$ für alle nicht negativen x monoton steigend, und ist $f(0) < 0$, so hat (I) genau eine Wurzel. Dieser Fall liegt vor bei der Ausziehung der n -ten Wurzel aus einer ganzen Zahl q , denn hierbei ist (I) die „reine“ oder „binomische“ Gleichung (Kreisteilungsgleichung) $x^n - q = 0$, wo q wie n eine natürliche Zahl ist.

Das beschriebene Verfahren wollen wir als die „Methode der sukzessiven Stellenbestimmung“ bezeichnen. In dem Gang dieses Verfahrens, soviel wir davon bisher gekennzeichnet haben, stimmen die Methode der Renaissance und die Ruffini-Hornersche Methode völlig überein. Die Unterschiede betreffen

nur die von uns bisher noch nicht angegebene Art der Berechnung der Koeffizienten $l_0, l_1, \dots, l_n$ der in (5_l) definierten Funktion

$$(5_l) \quad f(a + b + \dots + k + l) = f(L) = f(K + l) = \\ = l_0 l^n + l_1 l^{n-1} + \dots + l_n = \varphi_l(l) = \varphi_k(k + l).$$

Es bestehen zwei Unterschiede. Der erste Unterschied ist folgender:

Die Renaissancemethode findet die Koeffizienten $l_0, l_1, \dots, l_n$ aus $K = a + b + \dots + k$ und den Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ von $f(x)$ auf Grund der Entwicklung

$$(S_{Re}) \quad f(K + l) \\ = l_0 l^n + l_1 l^{n-1} + \dots + l_n.$$

Die Ruffini-Hornersche Methode findet die Koeffizienten $l_0, l_1, \dots, l_n$ aus k und den Koeffizienten $k_0, k_1, \dots, k_n$ der vorhergehenden Funktion φ_k auf Grund der Entwicklung

$$(S_{Ru}) \quad \varphi_l(l) = \varphi_k(k + l) \\ = l_0 l^n + l_1 l^{n-1} + \dots + l_n.$$

Der zweite Unterschied betrifft die Art, wie die Koeffizienten der Taylorentwicklungen (S_{Re}) und (S_{Ru}) elementar berechnet werden.

Die Renaissancemethode entwickelt die einzelnen Glieder von $f(K + l) = a_0 (K + l)^n + a_1 (K + l)^{n-1} + \dots + a_n$ nach der als bekannt vorausgesetzten fertigen Formel des binomischen Satzes und erhält also für die Koeffizienten l_v der Potenzen von l :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_0 = a_0 \\ l_1 = a_0 \binom{n}{1} K + a_1 \\ l_2 = a_0 \binom{n}{2} K^2 + a_1 \binom{n-1}{1} K + a_2 \\ \dots \dots \dots \\ l_n = a_0 K^n + a_1 K^{n-1} + \dots + a_n \end{array} \right.$$

Die Ruffini-Hornersche Methode berechnet die Koeffizienten l_v der Potenzen von l in $\varphi_l(l)$ aus den Koeffizienten k_v der Potenzen von k in $\varphi_k(k)$ nach dem sogenannten Horner'schen Schema, das wir weiter unten angeben werden.

Da diese beiden Unterschiede in den Methoden voneinander unabhängig sind, wären durch andere Kombination noch zwei weitere Methoden möglich. Die eine dieser Varianten würde die Koeffizienten der Potenzen von l in der Entwicklung von $f(K + l)$ aus denjenigen von $f(K)$, also aus $a_0, a_1, \dots, a_n$, nach dem Horner'schen Schema berechnen; die andere würde die Koeffizienten der Potenzen von l in der Entwicklung von $\varphi_k(k + l)$ aus denjenigen von $\varphi_k(k)$ unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes berechnen.

Bei allen Verfahren wurde die Zahl

$$(6) \quad l_n = \varphi_l(0) = \varphi_h(k)$$

schon für die Bedingungen (V_h) gebildet.

Als „Hornerisches Schema“ bezeichnet man folgendes Verfahren der Koeffizientenbildung:

	$k_{-1,0}$	$k_{-1,1}$	$k_{-1,2}$	$\dots$	$k_{-1,n-1}$	$k_{-1,n}$
$k_{0,-1}$	$k_{0,0}$	$k_{0,1}$	$k_{0,2}$	$\dots$	$k_{0,n-1}$	$k_{0,n}$
$k_{1,-1}$	$k_{1,0}$	$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$\dots$	$k_{1,n-1}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$k_{n-1,-1}$	$k_{n-1,0}$	$k_{n-1,1}$				
$k_{n,-1}$	$k_{n,0}$					

Von den Zahlen dieses Systems sind die außerhalb des rechten Winkels stehenden folgendermaßen gegeben:

$$(9a) \quad \begin{cases} k_{-1,\nu} = k_\nu & (\nu = 0, 1, \dots, n), \\ k_{\mu,-1} = 0 & (\mu = 0, 1, \dots, n). \end{cases}$$

In der obersten Zeile des Systems stehen also die schon bekannten Koeffizienten k_ν von $\varphi_h(k)$, in der vordersten Spalte lauter Nullen. Die übrigen Zahlen werden berechnet nach der Vorschrift:

$$(9b) \quad k_{\mu,\nu} = k \cdot k_{\mu,\nu-1} + k_{\mu-1,\nu} \quad \left(\begin{matrix} \mu = 0, 1, \dots, n \\ \nu = 0, 1, \dots, n - \mu \end{matrix} \right).$$

Dann sind die entstehenden Zahlen der Hypotenuse des dreieckigen Systems die gesuchten Koeffizienten l_ν von $\varphi_l(l)$:

$$(9c) \quad l_0 = k_{n,0}, \quad l_1 = k_{n-1,1}, \quad l_2 = k_{n-2,2}, \quad \dots, \quad l_n = k_{0,n}.$$

Schon Ruffini gab dieses Schema in einer Anordnung, die nur äußerlich von derjenigen Horners abweicht. Bei Ruffini sind die Elemente der Zeile $k_{0,0}, k_{0,1}, \dots, k_{0,n}$ um eine Stelle nach rechts verschoben, die der folgenden Zeile um zwei Stellen usw., so daß die erste Spalte des innerhalb des rechten Winkels stehenden Hornerischen dreieckigen Systems bei Ruffini zur Hypotenuse und die Hypotenuse des Hornerischen Systems bei Ruffini zur letzten Spalte wird.

Das Ruffini-Hornerische Schema beruht bekanntlich auf der Koeffizientenvergleichung in folgenden Verwandlungen, die man als „Hornerisches Divisionsverfahren“ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 (x) &= k_{-1,0} x^n + k_{-1,1} x^{n-1} + \dots + k_{-1,n} = (x-k) (k_{0,0} x^{n-1} + k_{0,1} x^{n-2} + \\
 &\quad + \dots + k_{0,n-1}) + k_{0,n} \\
 k_{0,0} x^{n-1} + k_{0,1} x^{n-2} + \dots + k_{0,n-1} &= (x-k) (k_{1,0} x^{n-2} + \\
 &\quad + \dots + k_{1,n-2}) + k_{1,n-1} \\
 &\dots\dots\dots \\
 k_{n-2,0} x^2 + k_{n-2,1} x + k_{n-2,2} &= (x-k) (k_{n-2,0} x + k_{n-2,1}) + k_{n-2,2} \\
 k_{n-2,0} x + k_{n-2,1} &= (x-k) k_{n-1,0} + k_{n-1,1} \\
 k_{n-1,0} &= k_{n,0}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(x) &= k_{0,n} + k_{1,n-1} (x-k) + k_{2,n-2} (x-k)^2 + \dots + \\
 &\quad + k_{n-1,1} (x-k)^{n-1} + k_{n,0} (x-k)^n.
 \end{aligned}$$

Setzt man hierin $x = k + l$, so ergibt das für die Funktion $\varphi_k(k+l) = \varphi_l(l)$ die in (9c) angegebenen Koeffizienten, was zu beweisen war.

In dem Sonderfall

$$f(x) = x^n, \quad \text{also } a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

ist das Horner'sche Schema (bei Anwendung einer gebräuchlichen Schreibweise)

	1	0	0	0	0	
a	1	a	a ²	a ³	a ⁴	
	1	2a	3a ²	4a ³		
	1	3a	6a ²			
	1	4a				
	1					
						

und ergibt für $a = 1$ das „arithmetische“ oder „Pascalsche Dreieck“. In diesem Fall ist

$$(10) \quad a_{\mu,\nu} = \binom{\mu + \nu}{\mu} = \binom{\mu + \nu}{\nu},$$

und die Formel (9b) geht für $\mu + \nu = n$ über in die Formel für die Bildung der Binomialkoeffizienten

$$(11) \quad \binom{n}{\nu} = \binom{n-1}{\nu-1} + \binom{n-1}{\nu}.$$

Um also für eine Potenz x^n oder allgemeiner für ein Polynom $f(x)$ die Koeffizienten der Entwicklung von $(x + h)^n$ bzw. von $f(x + h)$ zu finden, ist das Horner'sche Schema ein primitiveres und elementarerer Mittel als die Formel des binomischen Lehrsatzes, deren Koeffizienten durch das Horner'sche Schema oder eine ihm äquivalente kombinatorische Betrachtung erst sukzessive erzeugt werden.

Beim Vergleich beider Methoden aus dem Gesichtspunkt ihrer praktischen Brauchbarkeit bieten zwar die Koeffizienten l_v der maßgebenden Funktion $\varphi_l(l)$ in der durch die fertigen Binomialkoeffizienten ermöglichten geschlossenen Form

$$l_v = a_0 \binom{n}{v} K^v + a_1 \binom{n-1}{v-1} K^{v-1} + \dots + a_v, \quad v = 0, 1, \dots, n$$

ein übersichtliches und besonders bei den reinen Gleichungen einfaches Bild. Dies bedeutet aber keine Einfachheit für die Zahlenrechnung, da die Potenzen $K^v, K^{v-1}, \dots$ der mehrstelligen Zahl $K = a + b + \dots + k$ alle auszurechnen und mit den betreffenden Binomialkoeffizienten und Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung zu multiplizieren sind. Die Rechnung kann allerdings durch Benutzung der bereits ausgerechneten Potenzen des vorhergehenden Näherungswertes $I = a + b + \dots + i$ erleichtert werden, wodurch man dem Ruffini-Horner'schen Verfahren schon näherkäme.

Beim Ruffini-Horner'schen Verfahren dagegen ist gemäß der Formel (9b) jede auftretende Multiplikation eine solche einer im allgemeinen mehrstelligen Zahl mit einer einstelligen Zahl k , und die Berechnung aller l_v vollzieht sich bei übersichtlicher Anordnung einfach und sicher nach der stets wiederholten Operation (9b). Alle Rechnungen können im Schema der Wurzelanziehung selbst ausgeführt werden.

Bei der Quadratwurzelanziehung

$$f(x) = x^2 - q = 0, \quad \text{also } a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -q,$$

brauchen die beiden Methoden in der praktischen Handhabung noch keine deutlichen Unterschiede zu zeigen, da die zur Bestimmung der Verbesserung l , also der Dezimalstelle λ dienende Funktion $\varphi_l(l)$ nach beiden Methoden leicht auf die Form

$$(12) \quad \varphi_l(l) = \varphi_k(k) + (2K + l)l = (K^2 - q) + (2K + l)l$$

zu bringen ist. Wie die Koeffizienten dieser Funktion für $l = b$ und für $l = c$ nach dem Ruffini-Horner'schen Verfahren entstehen, zeigt das Buchstabenschema auf S. 234.

Bei der Kubikwurzelanziehung

$$f(x) = x^3 - q = 0, \quad \text{also } a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -q,$$

macht sich der Unterschied schon in der Bestimmung der zweiten Verbesserung c , also der dritten Ziffer γ , stark durch die Form geltend, in der die Koeffizienten von $\varphi_c(c)$ auftreten. Bei der Renaissancemethode entsteht nämlich

$$(13_{Re}) \quad \varphi_c(c) = c^3 + 3Bc^2 + 3B^2c + (B^3 - q) = \\ = c^3 + 3(a+b)c^2 + 3(a+b)^2c + [(a+b)^3 - q].$$

Beim Ruffini-Hornerschen Verfahren dagegen erhält man nach dem auf dieser Seite wiedergegebenen Buchstabenschema:

$$(13_{Ru}) \quad \varphi_c(c) = c^3 + (3a + 3b)c^2 + [3a^2 + (3a + b)b + (3a + 2b)b]c + \\ + [(a^3 - q) + [3a^2 + (3a + b)b]b],$$

und bei den Koeffizienten von c^1 und c^0 übersieht man nicht ohne weiteres die Identität.

	1	0	0	— q
a	1	a	a^2	$a^3 - q$
	1	$2a$	$3a^2$	
	1	$3a$		
	1	$3a$	$3a^2$	$a^3 - q$
b	1	$3a + b$	$3a^2 + (3a + b)b$	$(a^3 - q) + [3a^2 + (3a + b)b]b$
	1	$3a + 2b$	$[3a^2 + (3a + b)b] + (3a + 2b)b$	
	1	$3a + 3b$		
	1	$3(a + b)$	$3(a + b)^2$	$(a + b)^3 - q$

Anfang des Ruffini-Hornerschen Verfahrens für $\sqrt[3]{q}$.

Wir werden also über die Frage, ob ein Autor nach der Renaissancemethode oder nach der Methode von Ruffini und Horner verfährt, nicht bei seiner Art der Ausziehung der Quadratwurzel, wohl aber bei der Kubikwurzel eine sichere Entscheidung erwarten dürfen.

Die hier nach ihrem mathematischen Kern mit modernen Darstellungsmitteln gekennzeichneten beiden Methoden der sukzessiven Stellenbestimmung lassen natürlich in ihrer praktischen Handhabung je nach der mathematischen Ausdrucksweise von Völkern, Schulen und Personen verschiedene Erscheinungsformen zu. Insbesondere werden wir z. B. bei den islamischen Mathematikern nur Rechnungen erwarten dürfen, die bloß mit positiven Zahlen arbeiten. Auch wir noch gehen übrigens beim Wurzelziehen nicht von $x^n - q = 0$, sondern von $x^n = q$ aus.

Um Mißverständnisse zu verhindern, sei ferner gesagt, daß ich die Ausdrücke „(Ruffini-)Hornerische Methode“ und „Hornerisches Schema“ in dem heute üblichen, oben gekennzeichneten Sinne²³⁾ gebrauche. Es steht nicht zur Erörterung, inwieweit diese Verfahrensweisen sich in Darstellung und Handhabung mit den ursprünglichen Entwürfen von Ruffini und Horner decken. Diese Entwürfe, besonders aber deren Weiterbildungen dürften auf dem Boden der Bestrebungen von LAGRANGE und anderen erwachsen sein, den Differentialquotienten ohne infinitesimale Betrachtungen rein formal als „Ableitung“ einzuführen.

Das sogenannte Hornerische Divisionsverfahren ist wie das Euklidische

²³⁾ Im Gebrauch der Bezeichnungen „(Ruffini-) Hornerisches Schema“ und „(Ruffini-) Hornerische Methode“ herrscht keine Übereinstimmung. Unter dem (Ruffini-) Hornerischen Schema verstehe ich die Bildung des ganzen dreieckigen Systems von S. 228, wobei als Elemente der Hypotenuse alle Koeffizienten der Taylorentwicklung des Polynoms entstehen. Auch die bloße Bildung der ersten auszurechnenden Zeile $k_{0,0}, \dots, k_{0,n}$ zwecks Berechnung des ersten Gliedes $k_{0,n}$ der Taylorentwicklung findet man als „Hornerisches Schema“ bezeichnet. Das ist z. B. für $n = 3$ weiter nichts als die Anwendung der Formel

$$k_0 k^3 + k_1 k^2 + k_2 k + k_3 = [(k_0 k + k_1) k + k_2] k + k_3.$$

Diese Ausrechnungsweise liegt z. B. dem graphischen Verfahren von J. A. von SEGNER (1758/59) und demjenigen von E. LILL (1867) zugrunde. Von der in dieser Formel wiederholten Anwendung des distributiven Gesetzes machen wir übrigens für $k = 10$ unbewußt beim dekadischen Rechnen immerzu Gebrauch. Unter der Ruffini-Hornerischen Methode verstehe ich die oben beschriebene Methode der sukzessiven Bestimmung der Stellen einer Wurzel einer algebraischen Gleichung unter Verwendung des Hornerischen Schemas. Die Bedingungen (V₁) von S. 226 treten sowohl bei der Renaissancemethode wie bei der Methode von Ruffini und Horner auf. Sie sind, wenn keine anderen Hilfsmittel herangezogen werden, durch Probieren zu erfüllen. Sehr oft erweist sich bei ihrer Lösung die Newtonsche Näherungsmethode, bei jedem Schritt in der Genauigkeit zunächst auf die Bestimmung einer gültigen Ziffer beschränkt, als nützlich. Diese Verwendung der Newtonschen Näherungsmethode rechne ich nicht zum Begriff der (Ruffini-)Hornerischen Methode.

Auf das „erweiterte“ oder „verallgemeinerte“ Hornerische Schema sei hier hingewiesen (vgl. WILLERS, FR. A.: Methoden der prakt. Analysis, S. 53, 1928), ferner auf die Möglichkeit, die Bildung des nicht verallgemeinerten Ruffini-Hornerischen Schemas als Bildung einer Tafel dividierter Differenzen bei Wiederholungen des Arguments aufzufassen, so daß dann Newtons Interpolationsformel für wiederholte Argumente das transformierte Polynom liefert (vgl. WHITTAKER und ROBINSON²⁴⁾ S. 104).

Teilerverfahren, zu dem es ein Gegenstück bildet, sowohl auf ganze Zahlen wie auf Polynome anwendbar. Insbesondere kommt das Verfahren ebenso wie das zu ihm inverse Multiplikationsverfahren schon rein arithmetisch zur Verwendung bei der Verwandlung einer nach Potenzen von 10 entwickelten Zahl in eine nach Potenzen von 60 entwickelte und umgekehrt. Diese Anwendungen im Bereich der ganzen und der gebrochenen Zahlen sind zum Teil alt (vgl. weiter unten S. 254–55). Aber es ist leicht möglich, daß auch im Bereich der Polynome schon früher jemand eines dieser Verfahren, ohne viel Aufhebens davon zu machen, anwandte, etwa um die Taylorsche Reihe, zunächst für Polynome, abzuleiten. Dieser Weg erscheint mir übrigens für die lehrhafte Darbietung des binomischen Lehrsatzes beachtenswert, da die Binomialquotienten und ihr Bildungsgesetz hierbei in einer natürlichen und, wie sich zeigen wird, einer historischen Entwicklung entsprechenden Weise entstehen.

3. Vorbereitungen zur Wurzelausziehung. Die Quadratwurzel.

Die Überschrift des fünften Kapitels aus dem ersten Buch von K.s „Schlüssel“ lautet wörtlich: „Über die Bestimmung der ersten Seite (*ḡil' auwal*) aus den Geseiteten (*muḡalla'āt*)“. Das bedeutet: Über die Bestimmung der Wurzel aus den Radikanden, aber mit demselben Rechte kann man übersetzen: der Grundzahl (a)²⁴) aus den Potenzen (a^n). In der Folge $a, a^2, a^3, \dots$, die K. auch nach der anderen Seite in $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \dots$ fortsetzt, nennt er nämlich die Zahl a „erste Seite“ in bezug auf a^n für $n > 2$ und „Wurzel“ (*ḡiḡr*) in bezug auf a^2 . „Wurzel“ bedeutet also bei ihm nur Quadratwurzel. In bezug auf a^3 heiße a „Kubikwurzel“ ($ka'b$); K. weist darauf hin, daß diese Bezeichnung, die „Würfel“ bedeutet, eigentlich der Potenz a^3 zukommt. a^2 heiße, sagt er, „Gewurzeltes“ (*maḡḡūr*, d. h. das, was „gewurzelt“ wird oder werden soll, Radikand) oder „Vermögen“ (*māl*) oder „Geviert(es)“ (*murabba'*, Quadrat), a^3 „Gewürfeltes“ (*muka'ab*) oder „Kubus“ ($ka'b$) usw., allgemein heiße a^n „Geseitetes“ (*muḡalla'*, d. h. das, was „geseitet“, d. h. radiziert wird).

„Jeder Radikand, zu dem eine Wurzel (Seite) gefunden wird, aus der jener Radikand in Wahrheit erzeugt wird, wird *rational* (*munṭaq* = aussprechbar) genannt, und ein solcher, zu dem nicht in dieser Weise eine Wurzel (Seite) gefunden wird, *irrational* (*aṣamm* = stumm).“ Hiernach heißt also z. B. 25 für das Quadratwurzelausziehen *rational*, für das Kubikwurzelausziehen *irrational*. „Die rationalen Radikanden fallen alle in die Stelle der Einer, die rationalen Quadrate fallen nicht in die Zehner, wohl aber in die Hunderter, nicht in die Tausender, wohl aber in die Zehntausender. Das Gewürfelte fällt in die Tau-

²⁴) Ein Symbol wie a gebraucht K. nicht. Er sagt: „jede Zahl“. Auch alle anderen im folgenden vorkommenden Größen- und Operationssymbole sind von mir zur Vereinfachung der Darstellung eingeführt.

sender, dann in die Tausender der Tausender (Millioner).“ Es kann also z. B. 90 keine Quadratzahl, 80 oder 800 keine Kubikzahl sein. „Das Verfahren der Bestimmung hiervon ist folgendes: Wir nehmen soviel Stellen wie der Radikand, den wir gerade wünschen, angibt (d. h. soviel Stellen, wie der Wurzelexponent angibt), und nennen sie (diese Abteilung von Stellen) *Zyklus (daur)* des Rationalen und des Irrationalen. Dann nehmen wir einen zweiten Zyklus von eben jener (Stellen)zahl, und so, soweit es geht. Dann ist jener Radikand rational in der ersten (Stelle) jenes Zyklus und irrational in den übrigen.“ Ist also z. B. der Radikand einer Kubikwurzel 20 346417, so werden von rechts nach links die Zyklen 417, 346, 20 gebildet, und es wird der Radikand als rational in der ersten, d.-h. niedrigsten Stelle jedes Zyklus, z. B. in der Stelle 6 des zweiten Zyklus, und als irrational in der zweiten Stelle 4 und der dritten Stelle 3 dieses Zyklus bezeichnet. (Die Zyklen und die Stellen innerhalb der Zahlen und der Zyklen werden von rechts nach links gezählt.)

5	7	6
33	17	81
25		
8		
74	9	
68		
68	76	
		5
11	46	
10	7	
5		

$\sqrt[3]{331781} \approx 576$ bei al-Kāšī.

		Stellenwert		
		10^0	10^2	10^4
		1	0	-33 17 81
10^2	5	1	5	-8 17 81
		1	10	
		1	10	-8 17 81
10^1	7	1	107	7 49
		1	114	-68 81
		1	114	-68 81
10^0	6	1	1146	68 76
		1	1152	-5
		1	1152	-5

$\sqrt[3]{331781} \approx 576$ nach dem Ruffini-Hornersehen Verfahren.

	1	0	-q
a	1	a	$a^2 - q$
	1	2a	
	1	2a	$a^2 - q$
b	1	2a + b	$(a^2 - q) + (2a + b)b$
	1	$(2a + b) + b$	
	1	2(a + b)	$(a + b)^2 - q$

Anfang des Ruffini-Hornersehen Verfahrens für $\sqrt[3]{q}$.

Das Ausziehen der Quadratwurzel beschreibt K. zuerst allgemein, um es dann an dem Beispiel $\sqrt{331\,781}$ zu erläutern. Da die Ausdehnung auf Radikanden mit beliebig vielen Stellen nichts Neues bringt, gebe ich die Beschreibung sogleich an diesem Beispiel und beschränke mich dabei auf die S. 234 wiedergegebene letzte der drei von K. mitgeteilten Ausführungsformen. Diese Form, sagt er, sei bei Radikanden mit zahlreichen Ziffern leichter und sei von ihm selbst ausgedacht. Sie unterscheidet sich nicht wesentlich von den heute üblichen Schemen. Wegen der Beziehung zum Verfahren für die n -te Wurzel kann ich es nicht vermeiden, die Technik des Verfahrens umständlich und in enger Anlehnung an den Text zu schildern.

Die senkrechten und waagerechten Linien des Schemas schreibt K. alle so vor, wie sie hier (S. 234) gezogen sind. Über alle ungeraden Stellen der Radikanden, also über die Ziffern 1, 7, 3 setzen wir ein Zeichen, um diese rationalen Stellen abzusondern. Oder – so ist es in unserem Schema nach der Leidener Handschrift ausgeführt – wir verdoppeln die senkrechten Linien, die je zwei Zyklen gegeneinander abgrenzen.

Dann suchen wir die größte Zahl von Einern, die so beschaffen ist, daß, wenn wir sie mit sich selbst multiplizieren und das Ergebnis von dem letzten Zyklus 33 abziehen, nichts übrigbleibt oder weniger als das Abgezogene. (Das entspricht unseren Forderungen (V_a) von S. 225, die sich hier $a^2 \leq q < (a + 10^n)^2$ schreiben lassen.) Die letzte rationale Stelle 3 ist dabei „nach ihrer Ziffer“ (*bišūratihī*) zu nehmen, d. h. sie ist mit der links von ihr stehenden 3 als 33 zu lesen, nicht als 330 000. Daß weniger als das Abgezogene übrigbleiben soll, ist ein offenbar vom Verfahren der Division beeinflusster Fehler, der unserem sonst so richtig denkenden Autor kaum zuzutrauen ist. Daß derselbe Fehler schon bei al-Ḥaṣṣār und wieder bei Bahāʾaddīn auftritt, kann vielleicht als Steckbrief für Abhängigkeiten dienen. Bei an-Nasawī steht, es solle „weniger als die gewünschte Zahl“ übrigbleiben. Die Zahl von der gewünschten Eigenschaft wird gleich 5 gefunden. Wir setzen sie über die letzte rationale Stelle 3 – hier beginnt die „Zeile des Ergebnisses“ – und unter sie in dieselbe Spalte in einem Abstand, der durch den für die folgende Rechnung erforderlichen Raum bestimmt wird. Es ist die 5 ganz unten. Nun multiplizieren wir die obere 5 mit der unteren 5 und subtrahieren das Ergebnis 25 von der in denselben Spalten stehenden 33. Das Ergebnis 8 setzen wir darunter, nachdem wir einen waagerechten Trennungsstrich gezogen haben. Dann addieren wir die obere 5 zu der unteren 5 und verschieben das Ergebnis 10 um eine Stelle nach rechts, nachdem wir einen Trennungsstrich über das, was vorher dastand, nämlich die untere 5, gezogen haben. Die Einer unserer 10 stehen jetzt in der Spalte der irrationalen Stelle 1 des Radikanden, die rechts von der letzten rationalen Stelle 3 steht.

Nunmehr suchen wir die größte, über die vorletzte rationale Stelle 7 und unter sie rechts von der verschobenen 10 zu schreibende Einerzahl von der

Eigenschaft, daß, wenn wir diese obere Einerzahl nacheinander mit den Stellen des „Unteren“, d. h. mit den Stellen der aus 10 und der gesuchten Einerzahl zu bildenden Zahl multiplizieren, das Produkt sich von dem, was vom Rest des Radikanden in den entsprechenden Spalten über ihm steht, abziehen läßt, d. h. kleiner als der Rest des Radikanden oder diesem Rest gleich ist. (Das sind unsere Forderungen V_b , die sich hier $(2a + b)b \leq q - a^2 < (2a + b + 10^b) \cdot (b + 10^b)$ schreiben lassen.) Wir finden 7, bilden also $7 \cdot 107 = 749$, so daß $817 - 749 = 68$ übrigbleibt. Jetzt addieren wir die eben gefundene obere 7 zu dem „Unteren“, d. h. zu 107 und verschieben die erhaltene 114 um eine Stelle nach rechts, nachdem wir vorher über die 107 den Trennungsstrich gezogen haben. Darauf wiederholt sich das Verfahren; man findet 6 als letzte Stelle des Ergebnisses und hat als Ergebnis 576 mit dem Rest 5.

Bezeichnen wir die nacheinander gefundenen Bestandteile der Wurzel 576 mit

$$a = 500, \quad b = 70, \quad c = 6,$$

so ist also vom Radikanden aus abwärts gerechnet worden durch sukzessives Subtrahieren von

$$a^2, \quad (2a + b)b, \quad (2a + 2b + c)c$$

und von unten an aufwärts durch sukzessives Bilden von

$$a, \quad 2a + b, \quad 2a + 2b + c.$$

Jede der letztgenannten Zahlen heißt beim jeweiligen Stand der Rechnung „das Untere“, während die entsprechenden jeweilig als Teilergebnis über den Radikanden geschriebenen Zahlen a, b, c „das Obere“ heißen. Die Ziffern des „Oberen“ und des „Unteren“ sind geschickt in solche Spalten geschrieben worden, daß nach dem Multiplizieren des „Oberen“ mit dem „Unteren“ „nach ihrer Ziffer“ das zu subtrahierende Ergebnis a^2 oder $(2a + b)b$ oder $(2a + 2b + c)c$ an die richtige Stelle kommt.

Als eigene Erfindung kann K. hier nur die Anordnung der Ausführung bezeichnen, insbesondere, wie er auch hervorhebt, die Neuerung, daß er jedes der Produkte $107 \cdot 7 = 749$, $1149 \cdot 6 = 6876$, also $(2a + b)b$ usw. wie wir Modernen auf einmal bildet, hinschreibt und abzieht.

Völlig klar wird uns die Technik des Verfahrens, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß sie aus der Technik des Rechnens auf der Staubtafel hervorging. Beim Abwärtsrechnen bedeutet nämlich jeder waagerechte Trennungsstrich, daß das über ihm Stehende gelöscht und durch das darunter Geschriebene ersetzt wird. Z. B. tilgt der erste, unter 25 gesetzte Strich die 33 und ersetzt sie durch 8. Die 25 hat der geschickte Staubtafelrechner wohl gar nicht erst hingeschrieben. Ebenso wird beim Aufwärtsrechnen durch den untersten

Trennungsstrich die darunter stehende 5 gelöscht und durch die darüber geschriebene verschobene 10 ersetzt, und so fort. K. selbst sagt an verschiedenen Stellen, daß diese Striche diese Bedeutung des Auslöschens haben. Sie treten schon ebenso beim Schema der gewöhnlichen Division auf und dürfen sich nicht weiter als die auszulöschenden Ziffern erstrecken. Hier haben wir einen Beitrag zur Geschichte des Striches beim Rechnen.

Auf der Staubtafel würden also in jeder Phase der Wurzelausziehung nur drei Zeilen stehen: oben die Ziffern des Ergebnisses, darunter das, was vom Radikanden jeweilig übriggeblieben ist, und unten die Zahlen a , $2a + b$, $2a + 2b + c$. Für das Beispiel sind diese Phasen

5	5 7	5 7 6	5 7 6
331781	81781	6881	5
5	107	1146	

Genau diese Technik des Quadratwurzelziehens auf der Staubtafel beschreibt nun der 400 Jahre vor K. lebende Nasawī im 12. Kapitel des 1. Buches seiner Schrift „Das Befriedigende über das indische Rechnen“²⁵⁾, während sein Zeitgenosse al-Karağī nicht das Schema, sondern die darin wirklich ausgeführten sukzessiven Rechnungen angibt. Wie Suters Wiedergabe zeigt, ist bei N. (= an-Nasawī) die Anordnung in den drei Zeilen diejenige, die wir durch Rückverwandlung von K.s Verfahren in das Staubtafelverfahren erhielten. Auch die Vorschriften für die Rechenschritte lauten sehr ähnlich. Geringe Abweichungen sind bemerkenswert. Wo K. in der zweiten Phase seines Beispiels sagt: addiere das Obere (7) zu dem Unteren (107), würde N. sagen: verdoppele die 7 (von 107). K. hat sich hier, wie wir sehen werden, besser der Vorschrift für den allgemeinen Fall der Ausziehung der n -ten Wurzel angepaßt. Denn in diesen gliedert sich, wie er selbst bemerkt, die Quadratwurzelziehung als Sonderfall ein. Er habe sie nur gesondert voraufgeschickt, um ihr Verständnis dem Anfänger zu erleichtern. Das bedeutet, daß K. die Quadratwurzel nach demselben Verfahren auszieht wie die höheren Wurzeln. Dieses Verfahren aber ist, wie wir bei den höheren Wurzeln deutlich sehen werden, zunächst das Ruffini-Hornersche und nicht das Verfahren der Renaissance. Al-Ḥaṣṣār, der ebenfalls auf der Staubtafel rechnet, verfährt nicht wesentlich anders als N., läßt aber die Ziffern des Ergebnisses nicht über dem Radikanden entstehen. Ibn al-Bannā' schreibt sie unter die des Radikanden, ebenso al-Qalaṣādī, der nicht ein so klares schriftliches Schema angibt wie sein Zeitgenosse K. Von letzterem scheint Bahā'addīn in der Anordnung abhängig

²⁵⁾ Ich benutzte die oben ²¹⁾ erwähnte Photokopie der Handschrift, die auch Suren seiner vereinfachten Übersetzung²⁾ zugrunde legte. Leider ist diese schlechte Handschrift die einzige bisher bekannte des Textes.

zu sein, wie er ja auch den oben (S. 235) erwähnten Fehler mit ihm teilt. Schon beim Schema der Division zeigt sich diese Abhängigkeit.

Unter Hinweis auf K. und Bahā'addīn sei bemerkt, daß TROPPERS Angabe (I³ S. 77), die „Araber“ hätten die nicht gültigen Ziffern ausgestrichen, einer Verbesserung bedarf, ebenso seine Bemerkung (II³ S. 176), Gemma Frisius sei der erste, der dem Doppelten des jeweiligen Teilergebnisses die neugewonnene Ergebniszahl anfügt.

Als Grundlage des beschriebenen Verfahrens kann man die Formel

$$(14) (a + b + c + \dots)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + \dots \approx q$$

betrachten, die der Formel (7) (S. 225) entspricht und durch wiederholte Anwendung von (12) (S. 230) entsteht. Unabhängig vom Wurzelausziehen geben Ibn al-Bannā' (S. 299–300) und al-Qalaṣādī (S. 12 des Sonderdrucks) ein Schema zum Quadrieren mehrstelliger Zahlen, das sich auf dieselbe Formel gründen läßt.

4. Die n -te Wurzel nach dem Ruffini-Hornersehen Verfahren.

Auch das Ausziehen der n -ten Wurzel beschreibt K. für beliebiges $n = 3, 4, \dots$. Statt dieser sehr langatmigen Beschreibung erläutere ich das Verfahren sogleich an dem später von ihm gegebenen Beispiel $\sqrt[3]{44\,240\,899\,506\,197}$. Wenn meine Darstellung auch hierbei immer noch recht schwerfällig ausfällt, so liegt das daran, daß ich in enger Anlehnung an die Vorschriften des Textes die Prozedur, so, wie sie ablief, schildern will. Ich glaube das dem Leser und mir nicht ersparen zu können, damit nicht, wie es bei der chinesischen Lösungstechnik infolge mangelhafter Zuführung des Materials der Fall war, Zweifel aufkommen können, ob und inwieweit das Ruffini-Hornersehe Verfahren vorliegt.

Wie die ausgeführte Rechnung auf S. 239 zeigt, teilen wir den Radikanden von rechts nach links in Zyklen von je $n = 5$ Stellen ab, die wir durch Doppellinien voneinander trennen. Durch waagerechte Doppellinien wird das Schema ferner in $n = 5$ Abteilungen zerlegt, deren Höhen von den Erfordernissen der Rechnungen abhängen, die in die Abteilungen hineinkommen werden. Die unterste dieser Abteilungen heißt „Welle“²⁶⁾ der Seite, die zweite von unten „Welle des Quadrats“, darüber folgt die „Welle des Kubus“, dann die „Welle des Quadratoquadrats“, an die sich für $n = 5$ als letzte die „Welle des Quadratokubus“ anschließt²⁷⁾. Diese oberste der n -Wellen heißt auch „Welle der

²⁶⁾ Das Wort *saif*, das z. B. „Schlachtreihe“ bedeutet, gebe ich durch „Welle“ wieder, nicht durch „Reihe“, um die Kollision mit dem mathematischen Fachausdruck „Reihe“ zu vermeiden. Das Wort „Welle“ wähle ich im Sinne seines Gebrauchs im Angriffskampf.

²⁷⁾ In meiner Übersetzung des Schemas (S. 239) sind die „Welle der Seite“ und die „Welle des Quadrats“ auf die rechte Hälfte des Blattes gesetzt. Diese ist also an die linke Hälfte unten angesetzt zu denken. Zur bequemen Zurechtfindung habe ich den Radikanden und die Zeile des Ergebnisses über der rechten Hälfte wiederholt.

Zehle d. Ergebnisses									
5		3		0					
Welle der Zahl, falls sie der Quadratoibus ist	4	4	2	4	0	8	9	9	5
	3	1	2	5					
	1	2	9	5					
	1	0	5	6	9	5	4	9	3
	2	4	2	1	3	5	0	2	
	2	4	2	1	3	5	0	2	
Zweites der Zahl, d. i. Welle des Quadratoquadrats	4	1	2	6	9	4	9	5	8
Drittes der Zahl, d. i. Welle des Kubus									

Zehle d. Ergebnisses									
5		3		0					
Welle der Zahl, falls sie der Quadratoibus ist	4	4	2	4	0	8	9	9	5
	3	1	2	5					
	1	2	9	5					
	1	0	5	6	9	5	4	9	3
	2	4	2	1	3	5	0	2	
	2	4	2	1	3	5	0	2	
Zweites der Zahl, d. i. Welle des Quadratoquadrats	4	1	2	6	9	4	9	5	8
Drittes der Zahl, d. i. Welle des Kubus									

$$\sqrt[3]{44\,240\,899\,506\,197} \approx 536 \text{ bei al-Kāšī.}$$

(Der rechte Teil ABCD ist in der Doppellinie AB an den linken Teil unten angesetzt zu denken.)

Zahl“, da sie der „Zahl“, d. i. dem Radikanden zukommt, der als n -te Potenz der gesuchten Zahl, hier als Quadratokubus, aufzufassen ist. Die zweite Welle von oben heißt auch „Welle des Zweiten der Zahl“, darunter folgt die „Welle des Dritten der Zahl“ und so fort. Die Ziffern des Ergebnisses schreiben wir wieder über die „rationalen“ Stellen des Radikanden in die „Zeile des Ergebnisses“.

Wenn ich bei meinen Erläuterungen mit a, b usw. sowohl die nackten Ziffern $\alpha = 5, \beta = 3$, usw. wie auch die Zahlen $a = 500, b = 30$, usw. bezeichne, die diese Ziffern nach ihrem Stellenwert bedeuten, so ist diese Zweideutigkeit unschädlich und vereinfacht die Darstellung. Auch soll bei zwei aufeinander folgenden Verbesserungen k und l gelegentlich k als Zehner und l als Einer behandelt werden.

Wir suchen die größte Einerzahl (einstellige Zahl), deren n -te = 5-te Potenz sich vom letzten Zyklus 4424 abziehen läßt. (Das sind die Forderungen $(\sqrt[n]{a})$ von S. 225, die sich hier $a^5 \leq q < (a + 10^a)^5$ schreiben lassen.) Hierzu haben wir eine Tabelle der Potenzen der einstelligen Zahlen zur Hand. Wir finden $a = 5$ und schreiben diese Ziffer in die Zeile des Ergebnisses über die letzte rationale Stelle 4, ferner unter sie in dieselbe Spalte in die Welle der Seite, und zwar ganz zu unterst, denn in allen Wellen mit Ausnahme der Welle der Zahl wird aufwärts gerechnet.

Ebenso wie schon bei der Quadratwurzel sind auch hier Ziffern wie $a = 5$ und spätere Bildungen wie a^2 oder $(5a + b)b$ nicht stets in diejenigen Spalten gesetzt, die ihnen nach dem für den Radikanden gültigen Stellenwert zukommen. Sie werden vielmehr zweckmäßigerweise in solche Spalten geschrieben, daß die in der Welle der Zahl entstehenden Ziffern, die dann vom Radikanden abgezogen werden, in die richtigen Stellen gelangen.

Nun multiplizieren wir die obere Ziffer $a = 5$ mit der unteren $a = 5$ und setzen das Ergebnis $a^2 = 25$ ganz unten in die Welle des Quadrats, derart, daß die 5 von 25 in dieselbe Spalte fällt, wie die 5 der Welle der Seite, nämlich in die Spalte der letzten rationalen Stelle 4 des Radikanden. Dann multiplizieren wir „das Obere“, d. h. $a = 5$, mit dem, was ganz unten in die Welle des Quadrats geschrieben wurde, nämlich $a^2 = 25$, und setzen das Ergebnis $a^3 = 125$ entsprechend wie vorhin ganz unten in die Welle des Kubus. Das geht so fort, bis wir schließlich $a^n = a^5 = 3125$ in die Welle der Zahl unter den Radikanden so setzen, daß die 5 Einer unter die rationale Stelle 4 des letzten Zyklus 4424 zu stehen kommen. Die Subtraktion ergibt 1299, und der über diesen Ziffern stehende Trennungsstrich besagt wieder wie bei der Quadratwurzelauszählung, daß das über ihm Stehende als gelöscht und die 1299 an die Stelle von 4424 gesetzt zu denken ist.

Jetzt addieren wir die obere Ziffer $a = 5$ zur unteren, in die Welle der Seite

gesetzten $a = 5$ einmal für die Welle des „Zweiten der Zahl“. Das Ergebnis $2a = 10$ setzen wir in die Welle der Seite über $a = 5$, nachdem wir letzteres durch einen darüber gesetzten Strich gelöscht haben. Hierauf multiplizieren wir wiederum „das Obere“ $a = 5$ mit dem in der Welle der Seite erhaltenen $2a = 10$ und addieren das Ergebnis $2a^2 = 50$ zu dem ganz unten in der Welle des Quadrats stehenden $a^2 = 25$. Das über den Trennungsstrich geschriebene Ergebnis $3a^2 = 75$ wird wieder mit $a = 5$ multipliziert und das Ergebnis $3a^3 = 375$ wird zu dem Untersten in der Welle des Kubus, nämlich zu $a^3 = 125$, addiert, so daß sich $4a^3 = 500$ ergibt. Das geht so fort, bis wir bei der Welle des „Zweiten der Zahl“, in unserem Falle der des Quadratoquadrats, anlangen, wo wir $4a^3 \cdot a = 2500$ zu dem vorhandenen $a^4 = 625$ addieren, um über dem Trennungsstrich $5a^4 = 3125$ zu erhalten.

Hierauf addieren wir das „Obere“ $a = 5$ zum „Unteren“ $2a = 10$ in der Welle der Seite zum zweitenmal, nämlich diesmal für die Welle des „Dritten der Zahl“. Das in der bisherigen Weise in die Welle der Seite einzutragende Ergebnis $3a = 15$ wird wieder mit dem „Oberem“ $a = 5$ multipliziert und das Ergebnis $3a^2 = 75$ zu dem $3a^2 = 75$ der Welle des Quadrats addiert, so daß sich $6a^2 = 150$ ergibt. Das geht so weiter, bis wir bei der Welle des „Dritten der Zahl“, d. i. hier schon bei der Welle des Kubus, anlangen, wo die Addition von $6a^2 \cdot a = 750$ zu $4a^3 = 500$ die Summe $10a^3 = 1250$ ergibt.

Wiederum wird nun $a = 5$ zu dem jetzt in der untersten Welle obenauf stehenden $3a = 15$ addiert. Man erhält $4a = 20$, addiert dann $4a \cdot a = 100$ zu $6a^2 = 150$ der Welle des Quadrats und erhält $10a^2 = 250$. Mit diesem Ergebnis rechnet man nicht so weiter, da man schon in der Welle des „Vierten der Zahl“ angelangt ist.

Jetzt ist nur noch das obere $a = 5$ nochmals zu der bisher obersten Zahl $4a = 20$ der Welle der Seite zu addieren, so daß sich auf der Front dieser Welle, der Welle des „Fünften der Zahl“, die Zahl $5a = 25$ ergibt.

Nunmehr haben die $n = 5$ Wellen mit ihren Fronten ihre ersten Angriffsziele erreicht, nämlich die Zahlen

$$5a = 25, \quad 10a^2 = 250, \quad 10a^3 = 1250, \quad 5a^4 = 3125, \quad a^5 = 3125.$$

Die letzte, a^5 , wurde vom Radikanden abgezogen. Die übrigen beziehen jetzt neue Ausgangsstellungen: „Der Augenblick des Verschiebens ist gekommen.“

Das in der Welle des „Zweiten der Zahl“ stehende $5a^4 = 3125$ verschieben wir um eine Stelle nach rechts, das in der Welle des „Dritten der Zahl“ stehende $10a^3 = 1250$ um zwei Stellen, und so fort, endlich das in der Welle der Seite

		10 ⁴	10 ³	10 ²	10 ¹	10 ⁰	10 ⁰ -- Stellenwert
		1	0	0	0	0	-44240899506197
10 ⁴	5	1	5	25	125	625	3125
			<u>5</u>	<u>50</u>	<u>375</u>	<u>2500</u>	-1299
		1	10	75	500	3125	
			<u>5</u>	<u>75</u>	<u>750</u>		
		1	15	150	1250		
			<u>5</u>	<u>100</u>			
		1	20	250			
			<u>5</u>				
		1	25				
			1	25	250	1250	3125
10 ³	3	1	<u>253</u>	<u>759</u>	<u>77277</u>	<u>3981831</u>	105605195
			<u>3</u>	<u>768</u>	<u>70581</u>	<u>4880474</u>	-24213502
		1	256	26527	1406858	39452405	
			<u>3</u>	<u>777</u>	<u>81812</u>		
		1	259	27304	1488770		
			<u>3</u>	<u>786</u>			
		1	262	28090			
			<u>3</u>				
		1	265				
			1	265	28090	1488770	39452405
10 ²	6	1	<u>2656</u>	<u>15928</u>	<u>16848816</u>	<u>6034317896</u>	2421350208176
			<u>6</u>	<u>2824936</u>	<u>1505719616</u>	<u>403558367696</u>	-21
			<u>6</u>	<u>15872</u>	<u>17045448</u>	<u>915680384</u>	
		1	2662	2840908	1522765064	412694958080	
			<u>6</u>	<u>16008</u>	<u>17141496</u>		
		1	2668	2856916	1539906560		
			<u>6</u>	<u>18044</u>			
		1	2674	2872960			
			<u>6</u>				
			1	2680			
Stellenwert		1	2680	2872960	1539906560	412694958080	-21

$\sqrt[5]{44240899506197} \approx 536$ nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren.

	1	0	0	0	0	$-q$
a	1	a	a^2	a^3	a^4	$a^5 - q$
	1	$a + a = 2a$	$a^2 + 2a \cdot a = 3a^2$	$a^3 + 3a^2 \cdot a = 4a^3$	$a^4 + 4a^3 \cdot a = 5a^4$	
	1	$2a + a = 3a$	$3a^2 + 3a \cdot a = 6a^2$	$4a^3 + 6a^2 \cdot a = 10a^3$		
	1	$3a + a = 4a$	$6a^2 + 4a \cdot a = 10a^2$			
	1	$4a + a = 5a$				
	1	$5a$	$10a^2$	$10a^3$	$5a^4$	$a^5 - q$
b	1	$5a + b$	$10a^2 + (5a + b)b$	$10a^3 + [10a^2 + (5a + b)b]b$		
	1	$(5a + b) + b = 5a + 2b$	$[10a^2 + (5a + b)b] + [(5a + b) + b]b$			
	1	$(5a + 2b) + b = 5a + 3b$				
	1	$(5a + 3b) + b = 5a + 4b$				
	1	$(5a + 4b) + b = 5a + 5b$				
	1	$5a + 5b = 5(a + b)$	 = $10(a + b)^2$	 = $10(a + b)^3$	 = $5(a + b)^4$	 = $(a + b)^5 - q$

Anfang des Ruffini-Hornerschen Verfahrens für $\sqrt[5]{q}$.

stehende $5a = 25$ um $n - 1 = 4$ Stellen, so daß seine letzte Stelle 5 in die Spalte der auf die vorletzte rationale Stelle 5 des Radikanden folgende irrationale Stelle 9 gelangt, d. h. in die Spalte der zweiten Stelle des vorletzten Zyklus.

Von jetzt ab fasse ich mich kürzer als der Autor. Wir suchen nun die größte, über die vorletzte rationale Spalte, also hier mit dem Stellenwert der Zehner über die Ziffer 5 des Radikanden zu setzende Einerzahl b so, daß

$$\begin{aligned} & [(\langle b + 5a \rangle b + 10a^2)b + 10a^3]b + 5a^4]b = \\ & [(\langle b + 25 \rangle b + 250)b + 1250]b + 3125]b = \\ & b^5 + 25b^4 + 250b^3 + 1250b^2 + 3125b \end{aligned}$$

sich vom Rest $q - a^5 = 12990895[506197]$ des Radikanden abziehen läßt. (Das ist die Forderung (V_b) von S. 225.) Wir finden $b = 3$, das wir über die eben genannte 5 und in dieselbe Spalte in die Welle der Seite neben die verschobene 25 setzen. Jetzt wiederholt sich mit der oberen Ziffer $b = 3$ und den in den einzelnen Wellen stehenden Zahlen $5a + b$, $10a^2$, $10a^3$, $5a^4$ dasselbe Spiel, wie früher mit der oberen Ziffer $a = 5$ und den anfangs in den Wellen stehenden Zahlen a , a^2 , a^3 , a^4 . Alles geht so fort wie früher, bis die Einerstelle der Wurzel, hier $c = 6$, und schließlich der letzte Rest 21 gefunden ist.

Auf S. 242 habe ich dem Schema K.s das moderne Schema des Ruffini-Hornerschen Verfahrens gegenübergestellt, auf S. 243 den Anfang in Buchstabenrechnung. In der Anordnung hielt ich mich im wesentlichen an die von L. SCHNUTKA²⁸⁾ gegebenen Muster.

Der Vergleich zeigt, daß K. nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren rechnet. Alle Zahlen seines Schemas findet man in anderer Anordnung im modernen Schema wieder²⁹⁾, und in beiden Mustern entstehen alle Zahlen in derselben Reihenfolge und durch dieselben Rechnungen. Daß im modernen Schema negative Zahlen auftreten, liegt natürlich daran, daß hier die Gleichung in der Form $x^n - q = 0$ zugrunde gelegt wurde, während K. von der Form $x^n = q$ ausgeht. Auch K.s Verschiebungen der Koeffizienten um eine, zwei, drei oder vier Stellen beim Übergang zur Bestimmung der nächsten Stelle sind leicht zu erklären. Der Hauptunterschied in der Anordnung besteht darin, daß das moderne Schema für die Bestimmung jeder Ziffer des Ergebnisses zweidimensional ist. Die Spalten nach der aus Einsen bestehenden Spalte entsprechen K.s „Welle der Seite“, „Welle des Quadrats“ usw.

²⁸⁾ SCHNUTKA, L.: Elemente der höheren Mathematik, 2. Aufl. S. 504-5, 560-62. Leipzig u. Wien 1921; SCHNUTKA, L.: Zahlenrechnen, S. 92-99. Leipzig u. Wien 1923.

²⁹⁾ Die zu addierenden, klein gedruckten Produkte $k \cdot k_{\mu, \nu-1}$ pflegt der geschickte Rechner nicht hinzuzuschreiben; auch K. läßt sie in den einfachsten Fällen weg.

Wurum hat K. nicht die übersichtlichere zweidimensionale Anordnung gewählt? Das kommt nur daher, daß sein schriftliches Schema aus dem Rechenverfahren auf der Staubtafel entstanden ist und jeder seiner Subtraktionsstriche in der Welle der Zahl die Auslöschung der darüber stehenden Ziffern, jeder Additionsstrich in den übrigen Wellen die Auslöschung der darunter stehenden Ziffern andeutet. Wir werden sehen, daß K. später, wo es sich um die dauernde übersichtliche Niederlegung der Binomialkoeffizienten handelt, selbst die zweidimensionale Anordnung des Pascalschen Dreiecks wählt.

5. Die Ausziehung der Kubikwurzel bei an-Nasawī.

Die einzige bisher bekanntgewordene islamische Darstellung der Kubikwurzelausziehung, die des Nasawī, deckt sich in der Ausführung ebenso wie wir das für die Quadratwurzelausziehung sahen, mit dem Verfahren K.s, nur daß eben N. (= an-Nasawī) auf der Staubtafel rechnet. Zum Nachweis bringe ich im folgenden die Übersetzung von N.s Beschreibung der Kubikwurzelausziehung aus ganzen Zahlen im 14. Kapitel des 1. Buches seiner Schrift „Das Befriedigende über das indische Rechnen“^{29a)}. Dieses älteste bisher bekannte islamische Zeugnis für das Verfahren von Ruffini und Horner^{29a)} zeigt, daß das Verfahren schon in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts im Gebrauch war, und auch schon früher, denn N. hat es, wie sich zeigen wird, von Vorgängern übernommen.

Über die Rechenbücher dieser Vorgänger und sein eigenes äußert sich N. selbst im Vorwort³⁰⁾. Das ursprünglich von ihm für die Lehrbücherbibliothek³¹⁾ des Buyiden Mağd-ad-Daula (1029 entthront) in persischer Sprache verfaßte Buch ging in die Bibliothek des Šaraf-al-Mulūk über, auf dessen Befehl N., der an die hundert Jahre alt geworden sein soll³²⁾, die uns vorliegende arabische Fassung schrieb. Der Verfasser sagt weiter³³⁾:

Ich hatte die Werke der Früheren und Späteren (der Alten und Modernen) über diesen Gegenstand studiert und gefunden, daß einige von ihnen sich (auf allerhand Dinge) einlassend und übermäßig lang sind, wie das von al-Kindī und das von al-Muğtabā al-Anṭākī al-Muṭlawī (?), andere (übermäßig lang sind

^{29a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Das Vorkommen bei Kūšyār ist noch älter^{27a)}.

³⁰⁾ Das Vorwort ist abgedruckt im Cat. cod. or. Bibl. Ac. Lugd. Bat.²¹⁾ III, S. 68, Leiden 1865, und übersetzt von Woercke (J. asiat., 6. sér., 1, 492-95, 1863), der auch (S. 496-500) die Kapitelüberschriften mitteilt.

³¹⁾ *ḥazānat daftar* übersetze ich so wegen des Gebrauchs von *daftar* in demselben Vorwort.

³²⁾ Al-Baihaqī, *Tatimmat Šurūḥ al-Ḥikma* ed. by M. Shafīʿ, I, Lahore 1935, S. 109.

³³⁾ Das in runden Klammern Stehende füge ich zur Erläuterung oder Ergänzung hinzu; das in Winkelklammern Gesetzte ist vielleicht zu streichen.

und) es an der Schärfe der Verständlichmachung fehlen lassen, wie das von 'Alī b. Abī Naṣr geschriebene. Wieder andere sind dunkel (*mungaliq*), wie das von al-Kalwādānī verfaßte, in dem ich auch Kapitel fand, nach denen kein Bedürfnis vorliegt außer für solche, die schwere Geistesarbeit bevorzugen. Einige verfaßten eine Art, die (nur) an eine einzige Art der angewandten Rechnungen³⁴⁾ gebunden ist, wie Abū Ḥanīfa ad-Dīnawarī und Kūšyār al-Ġīlī. Denn trotz der gedrängten Darstellung schrieb Kūšyār für die astronomische Rechnung ein Lehrbuch der übrigen angewandten Rechnungen, Abū Ḥanīfa aber schrieb für die übrigen angewandten Rechnungen ein Lehrbuch der astronomischen Rechnung. So schrieb denn ich ein Werk, in dem ich mich kurz faßte und frei davon hielt, durch Weitschweifigkeit langweilig oder durch Knappheit unzulänglich zu sein, und richtete die Darstellung in einer Art ein, aus der die Leute bei ihren verschiedenen angewandten Rechnungen und die Astronomen bei ihrer Kunst (*ṣinā'a* = ausgeübte Wissenschaft) Nutzen ziehen können.

Wie die Untersuchung seines Rechenbuches zeigt, löst N. seine Aufgabe, dem Praktiker einen knappen Leitfaden an die Hand zu geben, dadurch, daß er die Definitionen und Rechenverfahren ganz mechanisch und ohne Beweise mitteilt und an Beispielen erläutert. Nach seinen eigenen Äußerungen drangen seine Vorgänger zum Teil tiefer in den Gegenstand ein. Al-Kalwādānī scheint theoretische Ausführungen gebracht zu haben, die unserm N. zu hoch waren. Die wertvolle Aufzählung dieser Vorgänger führt uns näher an die Anfänge der islamischen Rechenlehre heran. Leider ist uns von den Rechenbüchern dieser Autoren³⁵⁾, außer der Schrift des Kūšyār, nichts als die Büchertitel erhalten, die uns die Biographen aufzählen. Al-Kindī (starb etwa 873), „der Philosoph der Araber“, war nach verbreiteten Nachrichten aus edlem arabischen Blut, nach anderen Angaben (al-Baihaqī³²⁾ S. 25) aber ein zum Islam übergetretener Jude oder ein Christ. Neben anderen arithmetischen Schriften, z. B. einer Schrift über die in Platos „Staat“ vorkommenden Zahlen, schrieb er „Fünf Bücher Einleitung in die Arithmetik“ – „Arithmetik“ ist auch im Arabischen das griechische Fremdwort – und „Vier Bücher über den Gebrauch der indischen Rechnungsweise“. Der vielseitige Gelehrte ad-Dīnawarī (starb 895), von iranischer Herkunft, Verfasser eines der uns leider verlorengegangenen frühen Algebrawerke, einer Schrift „Über die algebraischen Seltenheiten (Kuriositäten)“ und zweier Schriften über die Vermächtnisrechnung, schrieb auch: „Die (Staub)tafel, über die indische Rechnungsweise“. Denselben Titel führt das Werk von al-Kalwādānī, das N. dunkel und unpraktisch fand. Dieser Kalwādānī gehört schon ebenso wie al-Anṭākī (starb 987) der zweiten Hälfte des zehnten Jahrhunderts an. Von al-Anṭākī wird genannt: „Die große

³⁴⁾ *mu'āmalāt* bezeichnet besonders geschäftliche und finanzielle Rechnungen.

³⁵⁾ Über diese Gelehrten vergleiche man besonders Suren, II.: Die Mathematiker und Astronomen der Araber usw., Abh. Gesch. math. Wiss. usw. 10 (1900).

Schrift Die (Staub)tafel, über die indische Rechnungsweise“. Ferner: „Über das Rechnen auf der (Staub)tafel ohne Auslöschen (der Ziffern)“, „Kommentar zur Arithmetik“ (WOEPCKE vermutet „des Nikomachus“), „Über die Kuben“, „Über die arithmetischen Proben“ und „Über das Rechnen mit der Hand ohne (Staub-)tafel“ (Fingerrechnen).

Von Kūšyār b. Labbān³⁶⁾ (nach Suter etwa 971–1029), der nach einer Nachricht³²⁾ N.s Lehrer gewesen sein soll, hat sich die Schrift „Über die Elemente des Rechnens der Inder“ in Istanbul in der Ursprache gefunden³⁷⁾, nachdem sie schon vorher in hebräischer Übersetzung bekannt war. Die Untersuchung dieser Schrift, wie auch der erhaltenen astronomischen Werke des an den trigonometrischen Fortschritten seiner Zeit beteiligten Mathematikers wäre auch wegen seiner Sexagesimalrechnung, auf die ich im nächsten Abschnitt zurückkomme, erwünscht^{37a)}.

Ob mit 'Alī b. Abī Naṣr vielleicht Abū Naṣr b. 'Alī b. 'Irāq (um 1000) gemeint ist, der Lehrer al-Bīrūnī's? Von ihm ist uns in Oxford und Bankipur eine ebenfalls besonderer Beachtung wertige Schrift über die Sexagesimalrechnung erhalten.

Die lebhafteste Beschäftigung islamischer Iranier mit dem sogenannten indischen Rechnen, d. h. dem Rechnen im Zehnersystem, läßt vermuten, daß auch schon vorislamische Iranier dieses wie überhaupt das Rechnen und andere mathematische Wissenschaften pflegten. Al-Ḥwārizmī, der Verfasser der ersten islamischen Algebra, hat bei dem Historiker aṭ-Ṭabarī (839–923) den Beinamen al-Māğūsī, der Magier. Dies deutet nach NALLINO³⁸⁾ wahrscheinlich darauf hin, daß seine Vorfahren und vielleicht noch er selbst in seiner Jugend der zoroastrischen Religion angehörte. Wenn NALLINO³⁸⁾ (S. 10) sagt, al-Ḥwārizmī's Rechenbuch sei eine erweiterte Wiederherstellung eines indischen Traktats, so scheint mir hier ein von CASINI zuerst begangener, von WOEPCKE und NALLINO übernommener Irrtum vorzuliegen. Denn in der zugrunde liegenden

³⁶⁾ Zu der Angabe von TROPFKE¹³⁾ (I³, S. 82), Kūšyār sei ein jüdischer Gelehrter, sind mir keine Unterlagen bekannt. Nach Name und Heimat dürfte er Iranier sein.

³⁷⁾ KNAUSE, M.: Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Phys. 8, 437–532 (1936), Siehe S. 472–73.

^{37a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Nach Abschluß dieser Arbeit konnte ich das Rechenbuch von Kūšyār einsehen, von dessen Handschrift mir Professor VAN DEN WAERDEN in Leipzig und sein Schüler Dr. SOLEYMAN SENCER in Ankara im Jahre 1943 unter erschwerten Umständen Photokopien aus Istanbul verschafften. Schon Kūšyār zieht Kubikwurzeln auf der Staubtafel nach dem Ruffini-Horner'schen Verfahren aus. Offenbar hat sein Rechenbuch seinem Schüler an-Nasawī als Vorbild gedient, und sogar der weiter unten (S. 264) erwähnte „Fehler“ an-Nasawī's, den SUTER dem Abschreiber der Nasawī-Handschrift zur Last legte, findet sich schon bei Kūšyār.

³⁸⁾ NALLINO, C. A.: Al-Ḥwārizmī e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo. Reale Accad. Lincei, Ser. 5^a, Mem. della Cl. d. sc. mor., stor. e fil., 1894, S. 7.

Stelle bei al-Qiftī heißt es nach der auf 13 Handschriften gegründeten Ausgabe von J. Lippert (S. 266. 21–267. 1) nur: „Zu ihren Wissenschaften (d. h. zu den Wissenschaften der Inder) gehört die Zahlenrechnung, welche . . . al-Hwārizmī ausbreitete usw.“ Wenn wir Gegenstände und Fachausdrücke des frühislamischen Rechnens, der Algebra und sonstiger mathematischer Zweige nicht als unmittelbar von den Indern oder Griechen oder von den Griechen über syrische Texte übernommen nachweisen können – zu diesen Gegenständen gehört vorläufig auch das Ruffini-Hornersche Verfahren –, so muß sich, sofern nicht auch China in Frage kommt, unser Blick außer auf die Sābier von Harrān auf die iranische Wissenschaft richten. Was sie nicht in islamischer Zeit übernahm oder erfand, muß in die noch wenig erforschte vorislamische Zeit gehören, in der man von früh an mancherlei Elemente aufgenommen und weitergebildet haben mag.

Die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen behandelt N. in den Kapiteln 12 bis 15 des ersten Buches. I, 12 enthält die Quadratwurzelziehung, I, 13 die Neunerprobe dazu, I, 14 die Kubikwurzelausziehung und I, 15 die zugehörige Neunerprobe. Daß N. immer so tut, als sei das Stimmen der Neunerprobe hinreichend für die Richtigkeit der Rechnung, braucht nicht zu wundern. Die meisten bisher untersuchten islamischen Rechenlehrer und Leonardo von Pisa sagen es nicht besser. K. jedoch ist hierin gründlich (Schlüssel I, 6).

Wegen der im Schema der Wurzelausziehung gesetzten Nullen sei gesagt, daß N. (I, 1) nur die Ziffern 1–9 als Zahlen einführt. Erst nach Erklärung des Stellensystems, bei der er wie die Inder und K. die Stellen von den Einern ab aufsteigend zählt, also eine rechts von einer Stelle stehende Stelle als „vorhergehend“ bezeichnet, führt er die Null ein:

Was nun die Stellen betrifft, in deren darunter (d. h. rechts von ihnen) stehenden Stellen keine Zahl ist, so setzen wir vor jene Stellen eine Null (*sifr* = Leere) an Stelle der ausgehöhlten³⁹⁾ Zahl. Man will damit sagen, daß jener Rang frei von Zahlen ist. Es bedarf dessen aber, um die Stellen (den Stellenwert) zu behalten. Die Null ist ein kleiner Kreis nach folgendem Muster: ٥.

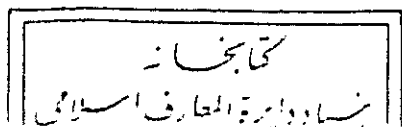
Dementsprechend gebe ich N.s Null in der folgenden Übersetzung³⁹⁾ von I, 14 wieder, und zwar nur an den Stellen, wo die Handschrift sie hat.

Vierzehntes Kapitel.

Über die Definition der Kubikwurzel (ka^3b), ihre Unterabteilungen und ihre Ausziehung für die ganzen Zahlen.

Die Kubikwurzel ist eine Zahl (von folgender Beschaffenheit): wenn sie mit sich selbst multipliziert wird und das Ergebnis mit seiner (eigenen) Quadrat-

³⁹⁾ Ich lese *manqūd* = ausgehöhlt, wie ein hohler Zahn oder eine taube Nuß.



wurzel (multipliziert wird), so heißt das, was bei diesen beiden Multiplikationen herauskommt, die Kubikzahl (*muka^{ab}*) und die ursprüngliche Zahl heißt Kubikwurzel jener Kubikzahl.

Beispiel: Drei und Siebenundzwanzig. Denn wenn die Drei mit sich selbst multipliziert wird, so wird es neun, und wenn die Neun mit drei multipliziert wird, die die Quadratwurzel der Neun ist, so wird es siebenundzwanzig. Also ist die Siebenundzwanzig die Kubikzahl von der Drei, ihrer Kubikwurzel. Wir teilen (in) drei Unterabteilungen: Kubikwurzel der Ganzen, Kubikwurzel der Brüche und Kubikwurzel der Ganzen und Brüche (d. h. der gemischten Zahlen). Was das Ausziehen der Kubikwurzel der ganzen Teile betrifft, so geschieht es auf indische Weise (oder: mit indischen Ziffern) folgendermaßen:

Zunächst bemerken wir, daß in der Ausführungsweise der vorliegenden Schrift vier Zeilen festgelegt sind: (Die erste ist) die Zeile der herauskommenden Kubikwurzel und heißt „die oberste Zeile“; die zweite ist die Zeile des Vermögens (*māl*), dessen Kubikwurzel wir ausziehen wollen; wir nennen sie „Zeile des Vermögens“. Unter der Zeile des Vermögens ist die Zeile der Nullen, die wir „die mittlere Zeile“ nennen. Unter der mittleren Zeile ist eine vierte Zeile, die wir „die unterste Zeile“ nennen. Dann setzen wir das Vermögen (*q*), aus dem wir die Kubikwurzel ausziehen wollen, hin und zählen vom Anfang der Stellen ab: „rational, zwei irrational, rational, zwei irrational“, bis wir zum letzten „rational“ gelangen. Dann setzen wir unter dieses in die unterste Zeile und über es in dieselbe Spalte¹⁰⁾ in die oberste Zeile eine Zahl (*a*); diese multiplizieren wir mit sich selbst und setzen das, was bei der Multiplikation herauskommt (a^2), in die mittlere Zeile; das Obere¹¹⁾ (*a*) multiplizieren wir mit dem Mittleren (a^2) und ziehen es (d. h. das Produkt a^3) von dem Vermögen (*q*) ab. Dann verdoppeln wir die untere Zahl (*a*), verschieben die mittlere (a^2) um eine Stelle und die untere ($2a$) um zwei Stellen, suchen eine andere Zahl (*b*) nach der vorhergehenden Weise und ihren Bedingungen und führen mit ihr das erste Verfahren aus. So verfahren wir fortgesetzt, bis¹²⁾ wir mit allem zu Ende sind. Bei Beendigung des Verfahrens addieren wir zur Zeile der Nullen eins, damit wir das, was gegebenenfalls in der Zeile des Vermögens übrigbleibt, durch es dividieren¹³⁾.

Beispiel: Wir wollen die Kubikwurzel aus einem Vermögen ausziehen, dessen Zahl ($q=$)

3652296
0000000

¹⁰⁾ Wörtlich: ihm gegenüber (*bīṭi-a'ihī*).

¹¹⁾ Wörtlich: das Oberste oder die oberste (Zahl) (*al-a'la*).

¹²⁾ Die Handschrift hat *illā* statt *ilal*. Im Vorwort findet sich der umgekehrte Fehler.

¹³⁾ Auf diese Verschärfung des ganzzahligen Ergebnisses durch Hinzufügung eines Bruches komme ich später (S. 264) zurück.

ist. Wir zählen vom Anfang der Stellen ab: „rational, zwei irrational“. Dann fällt das letzte „rational“ unter die Drei. Wir setzen also in dieselbe Spalte unter die Zeile der Nullen und in dieselbe Spalte über die Zeile des Vermögens ($a=$) eins, multiplizieren sie mit sich selbst, addieren das, was bei der Multiplikation herauskommt ($a^2=1$), zu der mittleren Zeile (0), multiplizieren das Obere ($a=1$) mit dem Mittleren ($a^2=1$) und ziehen es (d. h. das Produkt $a^3=1$) von dem Vermögen ($q=3[652296]$) ab. So gelangen wir zu folgendem Bild:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2652296 \\ 1000000 \\ 1 \end{array}$$

Dann verdoppeln wir das Untere ($a=1$) an seinem Ort, multiplizieren das Obere ($a=1$) mit dem Unteren ($2a=2$), addieren es (d. h. das Produkt $2a^2=2$) zum Mittleren ($a^2=1$), addieren das Obere ($a=1$) zum Unteren ($2a=2$) und verschieben das Mittlere ($3a^2=3$) um eine Stelle und das Untere⁴⁴⁾ ($3a=3$) um zwei Stellen. So erhalten wir das folgende Bild:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2652296 \\ 3000000 \\ 3 \end{array}$$

Dann suchen wir eine Zahl (b), die wir mit der unteren Drei ($=3a$) und mit sich selbst multiplizieren, worauf wir das Ergebnis ($3ab+b^2$) zu dem Mittleren ($3a^2$) addieren, das Obere (b) mit dem Mittleren ($3a^2+3ab+b^2$) multiplizieren und es (d. h. das Ergebnis $(3a^2+3ab+b^2)b$) vom Vermögen ($q-a^3$) abziehen – und finden diese (Zahl b) gleich fünf. Wir setzen sie also rechts neben⁴⁵⁾ die Drei und in dieselbe Spalte in die obere Zeile über die Zwei vom Vermögen, multiplizieren sie mit der unteren Drei ($3a=30$) und mit sich selbst, addieren das Ergebnis ($3ab+b^2=175$) zu dem Mittleren ($3a^2=300$), multiplizieren das Obere ($b=5$) mit dem Mittleren ($3a^2+3ab+b^2=475$) und ziehen es (d. h. das Ergebnis $(3a^2+3ab+b^2)b=2375$) vom Vermögen ($q-a^3=2652[296]$) ab, gemäß folgendem Bilde

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ 277296 \\ 475 \\ 35 \end{array}$$

Dann verdoppeln wir die Fünf (von $3a+b=35$) an ihrem Ort, multiplizieren die obere Fünf ($=b$) mit den untersten Stellen ($3a+2b=40$), addieren das

⁴⁴⁾ Handschrift: Mittlere.

⁴⁵⁾ Handschrift: unter.

Ergebnis $((3a + 2b)b = 200)$ zum Mittleren $(3a^2 + 3ab + b^2 = 475)$, addieren die Fünf $(= b)$, die in der obersten (Zeile) ist, zum Unteren $(3a + 2b = 40)$ und verschieben das Mittlere $((3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b = 675)$ um eine Stelle und das Untere $(3a + 3b = 45)$ um zwei Stellen. Dann ist das Ergebnis wie im folgenden Bilde:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ 277296 \\ 67500 \\ 450 \end{array}$$

Dann suchen wir eine andere Zahl (c) nach der erwähnten Vorschrift und finden sie gleich vier. Wir setzen sie vom Rechner aus rechts neben die untere Fünf und darüber in die oberste Zeile, multiplizieren diese ($c =$) Vier mit den untersten Stellen $(3a + 3b = 450)$ und mit sich selbst, addieren das Ergebnis $((3a + 3b)c + c^2 = 1816)$ zum Mittleren $((3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b = 67500)$, multiplizieren das Obere ($c = 4$) mit dem Mittleren $((3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b + (3a + b)c + c^2 = 69316)$ und ziehen es (das Produkt $[(3a^2 + 3ab + b^2)b + (3a + 2b)b + (3a + b)c + c^2]c = 277264$) vom Vermögen $(q - (a + b)^3 = 277296)$ ab. Dann bleibt das folgende Bild übrig:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad 4 \\ 32 \\ 69316 \\ 454 \end{array}$$

Hierauf verdoppeln wir die untere Vier $(= c)$ an ihrem Ort, multiplizieren das Obere $(c = 4)$ mit den unteren Stellen $(3a + 3b + 2c = 458)$ und addieren wie in folgendem Bilde $(69316 + 4 \cdot 458 + 1 = 71149)$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad 4 \\ 32 \\ 71149 \\ 458 \end{array}$$

Dann ist das Ergebnis in der obersten Zeile die Kubikwurzel des Vermögens $(q = 3652296)$, und zwar ist es $(a + b + c =)$ hundertvierundfünfzig, und der Rest des Vermögens $(q - (a + b + c)^3 = 32)$ ist Teile der mittleren Stellen $(71149)^{43}$.

Die Bemerkung über die vierzeilige Anordnung läßt schließen, daß das Verfahren wenigstens schon in einer anderen Anordnung vorhanden war. Um zu veranschaulichen, daß in diesem Text das Ruffini-Hornersche Verfahren vorliegt, führe ich auf S. 253 die Aufgabe $\sqrt[3]{3652296}$ auf K.s Art unter Beifügung

der Buchstabenausdrücke durch. An Stelle jeder „Welle“ K.s hat N. auf der Staubtafel eine einzige „Zeile“ (*saṭr.*). N.s Bezeichnungen dieser Zeilen habe ich in Klammern beigelegt. Da, wo N. auf der Staubtafel eine Zahl $k_{\mu, r}$ an die Stelle einer Zahl $k_{\mu-1, r}$, die er auslöscht, setzt, schreibt K. $k_{\mu, r}$ über oder unter $k_{\mu-1, r}$.

Schon SUTEN²⁾ fiel die eigenartige Erzeugung eines Ausdrucks von der Art $\binom{n}{k}(a+b)^k$ auf, nämlich

$$675 = (300 + 175) + 200 = 475 + 200 = [3a^2 + (3a + b)b] + \\ + (3a + 2b)b = 3(a + b)^2.$$

Diese von SUTEN als „interessant“ bezeichnete Erzeugung entpuppt sich nun ebenso wie N.s Bildung von $[3a^2 + (3a + b)b]b = (a + b)^3 - a^3$ als Sonderfall der einheitlichen Erzeugung aller Koeffizienten nach der Ruffini-Horner'schen Art. Gerade die eben genannten Formen der Koeffizienten von c^1 und c^0 hatten wir ja auf S. 231 im voraus als entscheidende Kennzeichen der Kubikwurzelausziehung nach der Methode von RUFFINI und HORNER bezeichnet. Daß bei N. diese Methode vorliegt, hat anscheinend weder SUTEN noch seine Leser bemerkt.

K. steht im Gebrauch der Fachausdrücke und sogar im Wortlaut des Textes dem 400 Jahre älteren N. überaus nahe. Leider ist der N.-Text sehr oberflächlich abgefaßt, was wenigstens zum Teil an der überaus schlechten Handschrift liegen wird. Ihr Wortlaut verlangt z. B. in der allgemeinen Beschreibung des Verfahrens, die Zahl b „nach der vorhergehenden Weise und ihren Bedingungen“ zu suchen. Aber diese Bedingungen (es sind natürlich die Forderungen (V_1) von S. 226) finden wir vorher nicht ausgesprochen. Im 12. Kapitel bei der Quadratwurzel ist das besser in Ordnung. Da verlangt N. in der allgemeinen Beschreibung für die Bestimmung von a , ähnlich K., aber mit dem Fehler, den wir S. 235 schon erwähnten:

Dann suchen wir die größte Zahl (die so beschaffen ist, daß), wenn sie mit sich selbst multipliziert wird, und wir es (d. h. ihr Quadrat) von dem Vermögen abziehen, es sich gegen dasselbe aufhebt, oder weniger als die gewünschte Zahl übrigbleibt.

Auch für die Bestimmung von b findet sich in 1, 12 ein entsprechender, allerdings schon verstümmelter Satz. Es ist, als hätte man die Abschrift eines Schülers vor sich, dem es zu lästig war, die Forderungen (V_1) hinzuschreiben, weil er sie auswendig konnte.

Beiläufig sei bemerkt, daß N.; wie schon al-Hwārizmī, den Fachausdruck *māl* = Vermögen, Kapital nicht eindeutig gebraucht. Einmal verwendet er ihn, wie auch z. B. al-Hwārizmī und K., für das Quadrat einer Zahl, dann

aber auch für den Radikanden q und seine jeweiligen Reste $q - a^3$ usw., wie bei einem Kapitalguthaben, von dem man Beträge abhebt.

Da K. seine Wurzelausziehungen von Vorgängern übernommen hat, liegt die Annahme nahe, daß eine zusammenhängende Kette von N. und seinen Vorgängern über K.s Vorgänger zu K. führt. Es ist möglich, daß die von 'Omar

al-Kāshī „abstrakte Zelle“)	1	5	4	
Werte der Zahl	3	6	5	2
	1			9
	2			6
	2	3	7	5
	2	7	7	
	2	7	7	2
Werte des Quadrats („mittlere Zelle“)				3
				2
				1
				8
				3
				2
				1
				6
				5
				6
Werte der Seite („unterste Zelle“)				4
				6
				2
				8
				5
				4
				5
				0
				7
				3

$a + b + c$
q
a^3
$q - a^3$
$(3a^2 + 3ab + b^2)b$
$q - a^3 - (3a^2 + 3ab + b^2)b = q - (a+b)^3$
$[(3a^2 + 3ab + b^2)b + (3a + 2b)b + (3a + b)c + c^2]c$
$\dots = q - (a+b+c)^3$
$(3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b + (3a + b)c + c^2 + (3a + 3b + 2c)c$
$(3a + 3b + 2c)c$
$(3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b + (3a + b)c + c^2$
$(3a + b)c + c^2$
$(3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b$
$(3a^2 + 3ab + b^2) + (3a + 2b)b$
$(3a + 2b)b$
$3a^2 + 3ab + b^2$
$3ab + b^2$
$3a^2$
$2a^2 + a^2$
a^2
$3a + 3b + 3c$
$3a + 3b + 2c$
$3a + 3b + c$
$3a + 3b$
$3a + 2b$
$3a + b$
$3a$
$2a$
a

$\sqrt[3]{3652296} \approx 154$ nach al-Kāshī's Verfahren.

Ḥaiyāmī vorgenommene Ausdehnung der Wurzelausziehung von $n = 2$ und $n = 3$ auf beliebiges n ein wichtiges Glied in dieser Kette war. Die Übertragung des Ruffini-Hornerschen Verfahrens von $n = 3$ auf $n = 4$ usw. vollzieht sich hemmungslos.

Wer Mutmaßungen darüber anstellt, wie man auf die Ruffini-Hornersche Methode gekommen sein mag, wird sich einerseits vergegenwärtigen müssen, daß die Methode an den Problemen der Potenzierung und Radizierung mehrstelliger Zahlen auf der Staubtafel praktisch zur Entfaltung gekommen sein wird. Andererseits muß man sich bewußt sein, daß die elementaren Rechnungen mit Polynomen sehr wohl im Gesichtskreis der islamischen Mathematiker lagen, auch die Division eines Polynoms durch ein anderes und speziell durch ein Binom, wie sie beim „Hornerschen Divisionsverfahren“ (S. 229) zur Anwendung kommt. K. berührt im „Schlüssel“ (V, 1, Abschn. 5) die Division „einer oder mehrerer Arten durch zwei oder mehr Arten“, d. h. einer Potenz oder eines Polynoms durch ein Binom oder ein Polynom. Schon al-Karağī bringt in seinem noch kaum untersuchten Werke „Das Wunderbare über das Rechnen“⁴⁶⁾ die Ausziehung der Quadratwurzel aus

$$x^{12} + 4x^{11} + 10x^{10} + 20x^9 + 35x^8 + 56x^7 + 84x^6 + 104x^5 + \\ + 115x^4 + 116x^3 + 106x^2 + 84x + 49.$$

Man beachte ferner, daß das Horner'sche Divisionsverfahren wie auch das inverse Multiplikationsverfahren im Bereich der Zahlen bei der Verwandlung von dekadischen Zahlen und Dezimalbrüchen in sexagesimale Zahlen und Brüche und umgekehrt zur Verwendung kommt (vgl. oben S. 233). K. lehrt in seinem „Schlüssel“ (III, 6) für die Verwandlung einer ganzen dekadischen Zahl in eine ganze Sexagesimalzahl ein Divisionsverfahren in dekadischer Rechnung und ein Multiplikationsverfahren in sexagesimaler Rechnung und für die umgekehrte Verwandlung jeweilig das inverse Verfahren. Für die Verwandlung eines Dezimalbruchs in einen Sexagesimalbruch hat er nur das dekadische Multiplikationsverfahren, für die umgekehrte Verwandlung nur das sexagesimale Multiplikationsverfahren. Die Multiplikationsverfahren entsprechen der ersten Zeile des Ruffini-Hornerschen Schemas. Für die Ausführung bringt K. zum Teil Schemen, bei denen die Stellen der gesuchten Zahlen in einer Spalte erscheinen. Ob er sich aber der Verwandtschaft dieser Umwandlungen mit den Ruffini-Hornerschen Operationen bewußt war, die er beim Wurzelausziehen vornahm, bezweifle ich: eine Äußerung hierüber fand ich nicht bei ihm. Da K. sich als Erfinder der Dezimalbrüche betrachtet, muß er diese Umrechnungen zum Teil als eigene Erfindung beanspruchen. Aber daß

⁴⁶⁾ LEVI DELLA VIDA, G.: Appunti e quesiti di storia letteraria araba. Rivista degli Studi Orientali 14, 249–283 (1934), siehe S. 262. — Inzwischen (1946) habe ich eine Übersetzung mit Erläuterungen von al-Karağīs „Das Wunderbare“ abgefaßt.

zum mindesten die Umwandlung der Stellen eines Dezimalbruchs in einen Sexagesimalbruch alt ist, ersehen wir z. B. aus dem Rechenbuch des N., aus dem Liber algorismi⁷⁷⁾ (S. 87) und aus der von M. Curtze bekannt gemachten Algorismusschrift des 12. Jahrhunderts⁷⁸⁾. Ohne daß von Dezimalbrüchen die Rede ist, werden nämlich hier die beim Wurzelausziehen erhaltenen Dezimalstellen in Sexagesimalteile verwandelt (s. weiter unten S. 261–62).

6. Sexagesimale Wurzelanziehung.

Das dritte Buch des „Schlüssels“ behandelt „das Rechnungsverfahren der Astronomen“, d. i. das Rechnen mit ganzen, gebrochenen und gemischten Sexagesimalzahlen. K. hat von seinen Vorgängern ein ganz konsequentes System der Sexagesimalzahlen übernommen: er schreibt auch die Ganzen im Positionssystem nach steigenden Potenzen von 60, was sich meines Wissens bei den Griechen nicht findet. Der Stellenwert wird in den Rechnungen durch Spaltenüberschriften und sonst durch Angabe des Stellenwertes der letzten Stelle gekennzeichnet. $23\ 45\ 18\ 39\ 17$ Sekunden bedeutet also die Zahl $23 \cdot 60^2 + 45 \cdot 60 + 18 + 39 \cdot 60^{-1} + 17 \cdot 60^{-2}$.

Vermöge der Verwendung der „Sechzigertabelle“⁷⁹⁾, einer fertigen Zahlen-tafel für die Produkte je zweier einstelliger Sexagesimalzahlen wie $37 \cdot 28 = 17\ 16$, kann K. alle sexagesimalen Rechnungen konsequenter als z. B. Theon von Alexandrien ausführen, der nicht nur bei den Ganzen, sondern vorübergehend auch bei den Minuten, Sekunden usw. Zahlen auftreten läßt, die größer als 59 sind. Wie die Multiplikation und die Division, so kann K. deshalb auch die Wurzelanziehung als reine Sexagesimalrechnung durchführen. Er erläutert dies an den Beispielen $\sqrt{10\ 9\ 49\ 20\ Grad}$, $\sqrt[3]{18\ 52\ 59\ 43\ 51\ 24\ Quarten}$, $\sqrt[4]{34\ 59\ 17\ 14\ 54\ 23\ 3\ 47\ 36\ 40\ Minuten}$. Da alles ganz der dekadischen Rechnung entspricht, brauche ich hierauf nicht näher einzugehen. Die Bestimmung von l nach (V) von S. 226 wird natürlich nicht durch blindes Durchprobieren aller 60 Zahlen $\lambda = 0, 1, \dots, 59$ vollzogen werden. K. äußert sich hierzu nicht. Man könnte an sukzessive Bestimmung der Zehner und Einer

⁷⁷⁾ Abh. Gesch. Math. S. 27 (1898).

⁷⁸⁾ Bei der Frage, ob die Sexagesimalrechnung ein der Rechnung mit dekadischen Zahlen ebenbürtiges zweckmäßiges Hilfsmittel des praktischen Rechners ist, muß man beachten, daß beide Systeme erst vergleichbar werden, wenn man dem Sexagesimalrechner das kleine Einmaleins der Sexagesimalrechnung, d. i. die „Sechzigertabelle“, in die Hand gibt. Diese Tabelle scheinen die Griechen nicht benutzt zu haben. Theon von Alexandrien jedenfalls rechnet nicht mit ihr. Auch die zu Buch 4 (S. 217 der Basler Ausgabe von 1538) ausgeführte Division von 96840 durch $7412.10\ 44\ 51\ 40$ ist keine reine Sexagesimalrechnung. Diesen Sachverhalt übersehe man nicht, wenn man Stellung zu der wohlwollenden Beurteilung nehmen will, die Fr. Hultsch der unreinen Sexagesimalrechnung der Griechen zuteil werden läßt. (Hultsch, Fr.: Arithmetica, Pauly-Wissowa, Realenzyklopädie II, S. 1058 ff.)

der Sexagesimalstellen denken; aber so macht es K. in seinen Beispielen nicht. Von Näherungsmethoden für die Bestimmung von l soll später die Rede sein.

Seine ganze Meisterschaft und Sicherheit in der Technik der sexagesimalen Quadratwurzelausziehung entfaltet K. in dem Lehrbrief über den Kreisumfang, wo er Quadratwurzeln auf bis zu 18 Sexagesimalstellen richtig auszieht und auch von der abgekürzten Rechnung (Weglassung der Stellen unter einer gewissen Stelle) Gebrauch macht.

An-Nasawī, al-Karaġī und al-Bīrūnī (973–1048) verfahren anders als K. Sie wie auch Johannes von Sevilla (= al-Hwārizmī?) verwandeln den Radikanden einer Quadratwurzel, wenn er ein Sexagesimalbruch ist, in Einheiten einer hinreichend niedrigen Sexagesimalstelle gerader Ordnung, z. B. Sexten, ziehen aus der erhaltenen dekadischen Zahl die Quadratwurzel dekadisch aus und verwandeln schließlich die so gefundenen Terzen wieder in Ganze, Minuten, Sekunden und Terzen.

K.s Rechnungsweise mit Sexagesimalzahlen ist im Zusammenhang mit seiner Einführung und Handhabung der Dezimalbrüche ausführlicher zu würdigen. Hier sei nur noch bemerkt, daß er für sexagesimale Rechnungen die Neun- und fünfzigerprobe lehrt, die der Neunerprobe im Zehnersystem entspricht.

Wann die reine Sexagesimalrechnung, d. h. die Rechnung mit nach positiven und negativen ganzen Potenzen von 60 entwickelten Zahlen unter Verwendung der Sechzigertafel zuerst in der islamischen Mathematik auftaucht und welche unmittelbare Herkunft diese Rechnungsweise hat, in deren Hintergrund die babylonische Sexagesimalrechnung steht, bedarf noch der Untersuchung. Daß die Sechzigertafel schon um das Jahr 1000 Verwendung fand, ersehe ich aus der Überschrift des zweiten Buches der oben (S. 247) erwähnten Schrift von Kūšyār b. Labbān „Über die Elemente des indischen Rechnens“. Dieses Buch handelt *Von der Bestimmung der Elemente auf die zusammengesetzte Weise, nämlich durch die Tabelle, die als „Sechzigertafel“ bezeichnet wird* (Krause⁴⁷) S. 473). Es wäre, wie oben (S. 247) schon bemerkt, zu begrüßen, wenn neben anderen Schriften dieses Werk zugänglich gemacht würde, ebenso wie aus Oxford und Bankipur (Katalog XXII, S. 70) die Schrift von Kūšyār älterem Zeitgenossen Abū Naṣr Maṣūʿ b. ʿAlī b. ʿIrāq: „Der die Bezeichnung ‚Minutentafel‘ führende Lehrbrief“ und aus Istanbul (Lafeli 2708, 1) das „Buch der Vollendung über das Rechnen“ von ʿAbdalqāhir ibn Tāhir al-Baġdādī (starb 1037 oder 1038)^{48) 49a)}.

⁴⁸⁾ Im Abendland findet sich bei Petrus de Dacia (Ende d. 13. Jahrh.) eine sexagesimale Produktentafel von $1 \cdot 1$ bis $49 \cdot 49$ (ENESTRÖM, G.: Bibl. Math. 1890, S. 32). „Gewiß war das wichtig; denn bald nach 1300 entstehen in Paris die sogenannten Alfonsischen Tafeln, die im Gegensatz zu den vorhergehenden Tafeln die Sechzigerteilung vollständig durchführen, so daß man nicht nur die Bruchteile der Stunden und Grade durch Sechzigerbrüche darstellte, sondern auch je 60 Tage und

7. Inder und Abendland.

Weil 'Omar Haiyāmī für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ die Inder als Vorgänger nennt und auch der Titel von Nasawīs Schrift vom „Rechnen der Inder“ spricht, so wäre man geneigt, bei ihnen den Ursprung der Radizierungsmethode nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren zu suchen, einer Methode, die sich von $n = 2$ und $n = 3$ auf beliebige größere Werte von n ausdehnen ließ. Anscheinend hat sich aber bisher jenseits der Quadratwurzelziehung, die uns keine hinreichend deutlichen Unterscheidungsmerkmale bietet, bei den Indern bisher keine Spur der Ruffini-Hornerschen Methode gefunden⁵⁰⁾.

Die Ausziehung der Quadratwurzel ist bei den Indern wie bei den islamischen Gelehrten auf eine Formel gegründet, die z. B. für eine vierstellige Wurzel $a + b + c + d$ mit a als höchster Stelle folgendermaßen lautet:

$$(15) \quad (a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Die Quadratbildung wird nach

$$(16a) \quad (a + b + c + d)^2 = a^2 + 2a(b + c + d) + b^2 + 2b(c + d) + c^2 + 2cd + d^2$$

oder nach

$$(16b) \quad (a + b + c + d)^2 = d^2 + 2d(a + b + c) + c^2 + 2c(a + b) + b^2 + 2ba + a^2$$

Grade zu neuen Einheiten zusammenfaßte.“ (ZINNER, E.: *Petrus de Dacia*, *Archeion* 18, 318–29 (1936), siehe S. 321.) Johann von Gmunden übernahm die 60gradigen Zeichen ausdrücklich aus den Alfonsischen Tafeln (Cantor 11³, 1913, S. 177). Die sexagesimale Multiplikationstafel begegnet uns im Abendlande oft, so noch in der Algebra von J. WALLIS.

^{49a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Über die Sexagesimalrechnungen bei al-Kāšī, Kūšyār und anderen islamischen Mathematikern findet man Näheres in meiner Abhandlung: „Die Rechenkunst bei Ġamīd b. Mas'ūd al-Kāšī, mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens.“ Die Arbeit wurde 1943 von der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft zum Abdruck in den „Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes“ angenommen. Einen Vorbericht enthält der Artikel: „Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik.“ Er wird in *Orientalia* 17 (Rom 1948) oder im darauffolgenden Jahrgang erscheinen.

⁵⁰⁾ Wie überhaupt, so war mir besonders auf diesem Gebiet die ausländische Literatur schwer zugänglich. Außer den oben ¹⁰⁾¹²⁾ erwähnten konnte ich folgende Schriften einsehen: GANGULI, S.: *Notes on Aryabhaṭa*. J. Bihar and Orissa Research Soc. 12, 78–91 (1906). – RAṆĀCĀRYA, M.: *The Gaṇita-Sāra-Saṅgraha of Mahāvīrācārya*, Madras 1912. – SINGH, A. N.: *On the Indian method of root extraction*. Bull. Calcutta Math. Soc. 18, 123–40 (1927). – DATTA, B.: *The Bakhshālī mathematics*. Bull. Calcutta Math. Soc. 21, 1–60 (1929). – SINGH, A. N.: *A review of Hindu mathematics up to the 12th century*. *Archeion* (Rom) 18, 43–62 (1936). – DATTA, B. and SINGH, A. N.: *History of Hindu Mathematics*, I. Numeral Notation and Arithmetic, II. Algebra, Lahore 1935 u. 1938.

ausgeführt, und liest man die letzte Vorschrift rückwärts, so hat man (15) und kommt zugleich auf die oben in (14) (S. 238) für Ibn al-Bannā' und al-Qalaṣādī angeführte islamische Quadrierungsmethode für mehrstellige Zahlen.

Bezeichnet man wieder das bei einem beliebigen Stadium der Wurzelauziehung erreichte Ergebnis mit $K = a + b + \dots + k$ und die der zu bestimmenden nächsten Stelle λ entsprechende Korrektur $\lambda \cdot 10^l$ mit l , so kann man also der indisch-islamischen Quadrierung und Quadratwurzelauziehung die wiederholte Anwendung der Formel

$$(17) \quad (K + l)^2 = K^2 + 2Kl + l^2 = K^2 + (2K + l)l$$

zugrunde legen, die der Form (12) von S. 230 entspricht und auf die Darstellung (14) von S. 238 führt. Da aber, wie wir S. 230 sahen, dieses Ergebnis ebenso leicht durch das Ruffini-Hornersche Verfahren wie durch den binomischen Satz zu deuten ist, so gibt erst die Kubierung und die Kubikwurzelauziehung eine sichere Entscheidung. Bei diesen Operationen arbeiten die Inder, unter ihnen schon Āryabhaṭa I (499), klar nach der fertigen binomischen Formel

$$(18) \quad (K + l)^3 = K^3 + 3K^2l + 3Kl^2 + l^3.$$

Für höhere Exponenten als 3 scheint bei ihnen weder der binomische Lehrsatz noch die Radizierung von Zahlen bisher nachgewiesen zu sein, und dazu paßt, wie schon oben (S. 218) gesagt wurde, die Angabe 'Omar Ḥaiyāmī. Die z. B. in der mathematischen Prosodie sich austobende kombinatorische Begabung dieses Volkes läßt freilich gerade auf dem Gebiet des binomischen Satzes mehr erwarten. Kenner der indischen Mathematik mögen entscheiden, ob sich nicht doch der binomische Satz für $n > 3$ oder das Ruffini-Hornersche Verfahren in der indischen Literatur noch finden mag, oder ob dieses Verfahren vielleicht, auf der Staubtafel ausgeübt und durch mündlichen Unterricht verbreitet, ein älteres Verfahren darstellt als die in einstimmigem Chor von den großen indischen Mathematikern in ihren geschriebenen Werken mitgeteilten Verfahren nach dem binomischen Lehrsatz für $n = 2$ und $n = 3$.

Während so nach dem dargelegten derzeitigen Stand unserer Kenntnisse die von uns bei an-Nasawī und bei K. beobachtete Radizierungsmethode nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren bei islamischen Persern als charakteristisches Verfahren aufzutreten scheint, finden wir im Abendlande, soweit ich sehe,

ebenso wie bei den Indern nur die andere, uns geläufige Methode nach dem fertigen binomischen Satz, und zwar von Anfang an, nämlich für $n = 2$ und $n = 3$ schon bei Leonardo von Pisa. Dieser arbeitet in seinem Liber abaci (1202 und 1228) beim Kubikwurzelziehen bewußt nach der Formel (18), die er (S. 378 der Ausgabe von Boncompagni) in vorwiegend geometrischer Fassung vorausschickt als „das, woraus die Art, diese Wurzeln zu finden, hervorgeht“. Er fährt fort: „Und als ich über diese Vorschrift länger nachdachte, erfand ich diese Art, die Wurzeln zu finden, demgemäß ich weiter unten Erklärungen geben werde“. (*Et cum super hanc diffinitionem diucius cogitarem, inveni hunc modum reperiendi radices, secundum quod inferius explicabo.*) Cantor (I³ S. 31) schließt aus diesen Worten, Leonardo habe keine Kubikwurzelanziehung in der arabischen Literatur oder bei seinen Lehrern kennen gelernt und maße sich an, die Art, Kubikwurzeln zu ziehen, selbst erfunden zu haben. Pisano behauptet aber doch nur, daß er *hunc modum*, d. i. seine dann beschriebene, mit der fertigen binomischen Formel (18) arbeitende Art erfunden habe^{50a}). Nach dieser seiner Ausdrucksweise erscheint es mir wahrscheinlich, daß ihm eine andere Art, dritte Wurzeln auszuziehen, bekannt war. Und da wird man doch zunächst an die schon bei an-Nasawī vorhandene Hornerische Methode denken, die der Pisaner nicht befolgt. Er sucht vielmehr (S. 381), nachdem er die höchste Stelle a der Wurzel gefunden hat, die nächste b nach der unseren Bedingungen (V_b) von S. 225 entsprechenden Vorschrift, daß, wenn man $(3a^2)b + a(3b^2) + b^3$ von den entsprechenden Stellen des Restes des Radikanden abzieht, nicht mehr als $3(a+b)(a+b+10^b)10^b$ übrig bleibt. Er bildet also jenen Ausdruck nicht schrittweise nach dem Ruffini-Hornerischen Schema in der Form $[(b+3a)b+3a^2]b$, sondern nach der fertigen Form des binomischen Satzes für $n=3$. Gleicherweise bestimmt er (S. 383) nach Aufindung von a und b die dritte Stelle c so, daß bei Subtraktion von $3(a+b)^2c + (a+b)(3c^2) + c^3$ der Rest kleiner als oder gleich $3(a+b+c)(a+b+c+10^c)10^c$ ausfällt. Und hierbei bildet er eben $3(a+b)^2$ ohne weiteres als das Dreifache des Quadrats von $(a+b)$, nicht wie an-Nasawī als $[3a^2 + (3a+b)b] + (3a+2b)b$. Kurz, er befolgt, wie er es auch ankündigte, die fertige Formel (18).

Levi ben Gerson⁵¹) (1288–1344), ferner der Verfasser des *Carmen de algorismo*⁵²) (13. Jahrhundert) und der einem Magister Gernardus zugeschriebene *Algorismus de integris*⁵³) (13. Jahrhundert), ebenso *Sacro-*

^{50a}) Anmerkung bei der Drucklegung. Nachträglich sehe ich die Bemerkung von ENESTRÖM, G.: *Bibl. Math.* (3) 2, 351–52 (1901).

⁵¹) Levi ben Gerson, *Sefer Maassei Choscheb*, die Praxis des Rechners. Text und Übers. von Gerson Lange, Frankfurt a. M. 1909. – CARLHACH, J.: Levi ben Gerson als Mathematiker, Berlin 1910.

⁵²) HALLIWELL, J. O.: *Rara mathematica*, S. 81–82. London, Cambridge 1839.

⁵³) ENESTRÖM, G.: Der „Algorismus de integris“ des Meisters Gernardus. *Bibl. Math.* (3) 13, 289–338.

bosco⁵⁴⁾ (13. Jahrhundert) und sein Kommentator Petrus de Dacia⁵⁴⁾ (Ende des 13. Jahrhunderts) verfahren nach

$$(18a) \quad (K + l)^3 = K^3 + [(l + K)(3K)]l + l^3 \quad \text{oder} \\ (K + l)^3 = K^3 + [l(3K)](l + K) + l^3,$$

einer Vorschrift, die der fertigen binomischen Formel (18) sehr nahe steht. Hinsichtlich des Algorithmus de integris plädierte M. CANTOR (II³ S. 85) für eine Abhängigkeit von an-Nasawī. CANTOR benutzte für diesen Algorithmus, den er als ein Werk des Jordanus Nemorarius anspricht, den unter dem Titel „Algorithmus demonstratus“ 1534 in Nürnberg von Johannes Schöner herausgegebenen Druck. In diesem erscheinen die Ausführungen zu dem von der Ausziehung der Kubikwurzel handelnden Satz 42 stark verstümmelt. Trotzdem zeigt diese Fassung, besser aber noch ENESTRÖMS Ausgabe, daß die Formel (18a) dem Verfahren zugrunde liegt. Die aus dieser Formel für eine mehrstellige Zahl als Basis der Potenz hervorgehende Vorschrift spricht der Algorithmus de integris in Satz 39 aus und erläutert sie an dem Beispiel von 3 Gliedern a, b, c . Die hierfür gültige Formel

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + (a + b)[b(3a)] + (a + b + c)[c(3(a + b))]$$

entspricht ebenso wie die Formel (15) (S. 257) für die indische und islamische Quadratwurzelausziehung unserer Gleichung (7) von S. 225. Der Verfasser beweist sie, indem er $(a + b + c)^3$ aus $(a + b + c)^2(a + b + c)$ bildet, wobei er den ersten Faktor nach seinem Satz 32 entsprechend unserer eben genannten Formel (15) entwickelt. Bemerkenswert erscheint der Gebrauch von Buchstaben für die Glieder der dekadischen Entwicklung. Der Algorithmus bezeichnet die Einer mit a , die Zehner mit b usw. Auch das 1503 gedruckte *Opus Algorithmi lucundissimum* des Georg von Peurbach (1423–61) folgt der Formel (18a).

In den gedruckten Werken von Rudolff (1525), Apian (1527), Stifel (1544), Scheubel (1545), Tartaglia (1556) und anderen begegnet uns dann wie auch in der höchstwahrscheinlich vor 1524⁵⁵⁾ niedergeschriebenen deutschen Bearbeitung der sogenannten Algebra des Initius Algebras⁵⁶⁾ die

⁵⁴⁾ P. P. DE DACIA in algor. vulg. J. de Sacrobosco comm. Una cum algorithmo ipso ed. M. CUNTZE, Kopenhagen 1897.

⁵⁵⁾ ENESTRÖM, G.: Ein verschollener Cossist usw. Bibl. Math. (3) 3, 355–60 (1902).

⁵⁶⁾ CUNTZE, M.: Urkunden zur Geschichte der Mathematik, zweiter Teil, IV. Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum. Abh. Gesch. math. Wiss. usw. 13, 435–609 (1902). – Sollte sich hinter dem geheimnisvollen „Initius Algebras“ nicht ein durch Mißverständnis als Personennamen aufgefaßter, ursprünglich arabischer Titel oder eine Abschnittsüberschrift eines Werkes verbergen?

Ausziehung zweiter und dritter und von Apian ab auch höherer Wurzeln, und stets ist das Verfahren für die dritte Wurzel auf (18) oder (18a) und allgemein für höhere Wurzeln auf den fertigen binomischen Lehrsatz gegründet, dessen Koeffizienten sich schon bei Apian in der Dreiecksanordnung entwickelt finden. Auch der lateinische Text des „Initius Algebras“ gibt den binomischen Satz bis $n = 9$ an, und der deutsche Bearbeiter stellt dazu das Dreieck der Binomialkoeffizienten in Form der Folge der Potenzen von 10001 auf.

Wie die abendländischen Algebraiker zum binomischen Satz für beliebiges ganzes positives n kamen, scheint noch im Dunkel zu liegen.

8. Näherungswerte irrationaler Wurzeln. Näherungsbestimmung der nächsten Stelle der Wurzel.

K. lehrt zwei Arten, das ganzzahlige Ergebnis T der Wurzel aus einem „irrationalen“ Radikanden durch Hinzufügung eines Bruches zu verfeinern. Die eine behandelt er in der Bruchrechnung. Sie beruht auf der für $n = 2$ schon in der Algebra von al-Ḥwārizmī enthaltenen und z. B. auch von al-Karaḡī, al-Ḥaṣṣār und Ibn al-Bannā' gelehrtten Umformung

$$(19) \quad \sqrt[n]{q} = \frac{1}{z} \sqrt[n]{q z^n},$$

wo z eine beliebige geeignete positive Zahl ist und q keine ganze Zahl mehr zu sein braucht. Mit $z = 60^k$, wo k eine natürliche Zahl ist, finden wir dieses Verfahren für die Kubikwurzel schon im 9. Jahrhundert bei den Söhnen des Mūsā b. Šākir⁵⁷⁾ ausgesprochen, die den gebrochenen Teil von q als Sexagesimalbruch voraussetzen. Hier haben wir eine der Methoden des Mittelalters, die Genauigkeit einer Näherungsrechnung beliebig weit zu treiben, und schon die Söhne des Mūsā betonen diese Möglichkeit. Das Verfahren besteht in dem für die Praxis der dekadischen Zahlen wichtigsten Falle $z = 10^k$, wo k eine natürliche Zahl ist, darin, dem Radikanden einer n -ten Wurzel $k \cdot n$ Nullen anzuhängen, um dann das Ergebnis durch 10^k zu dividieren. Für $n = 2$ und

Eine solche Überschrift hätte etwa lauten können: *mudḥil (ilā finā'at) al-ḡabr*. Schlecht übersetzt heißt das, besonders wenn *mudḥil* als *madḥal* gelesen wurde: *initium (artis) algebrae*, richtig aber: *introductio in algebra* (in artem algebrae).

⁵⁷⁾ Liber trium fratrum ed. Courte, M., Acta Nova Leopold. 49, 2, Halle 1887. — Wie sie die Kubikwurzel aus der ganzen Zahl $q \cdot 60^{3k}$ finden, führen die Banū Mūsā nicht aus. In der lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona heißt es (S. 157): *inquiramus numerum cubi equalem numero partium, quas habemus, ...* Courte nimmt an, daß sie eine fertige Tabelle der Kuben mehrstelliger Zahlen benutzten.



$n = 3$ ist dieses Verfahren, das K. für beliebiges n lehrt, schon bei an-Nasawī, für $n = 2$ auch aus dem Liber Algorismi?) bekannt. Während aber diese Schriften die durch den Kunstgriff hinzugewonnenen Dezimalstellen der Wurzel in einen Sexagesimalbruch verwandeln, läßt K. sie als Dezimalbruch bestehen. Denn K. ist einer der Erfinder der Dezimalbrüche, die er auch sonst anwendet, so im 4. Kapitel des 5. Buches des „Schlüssels“. Dort sind in geometrischen Aufgaben gewisse Strecken, z. B. Dreiecksseiten, als unbenannte ganze Zahlen gegeben, und es werden die gesuchten Strecken, die durch bei der Berechnung auftretende Quadratwurzeln irrational sind, näherungsweise als Zahlen ausgerechnet, die sich aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruch zusammensetzen.

Die andere Art ist für $n = 2$ die Annäherung

$$(20a) \quad \sqrt{q} = \sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{2T+1},$$

wo $T = a + b + \dots + t$ das ganzzahlige Ergebnis der Wurzelziehung und r der Rest des Radikanden ist.

Den Nenner $2T + 1$ des Korrektionsgliedes bildet K., indem er zu dem zuletzt dastehenden „Unteren“ $2(a + \dots + s) + t$ das „Obere“ t und dann noch 1 hinzufügt. Er bemerkt richtig, daß nach der ersten dieser beiden Additionen das Doppelte $2T$ der in der Zeile des Ergebnisses stehenden Zahl $T = a + \dots + t$ herauskommt, und nach der Addition von 1 die Differenz $(T + 1)^2 - T^2$. Das Gesamtergebnis gibt er im Zahlenbeispiel in der auch sonst bei ihm zu beobachtenden indischen Schreibweise der gemischten Zahlen. Er

576
schreibt also z. B. $\frac{5}{1153}$ für 576 $\frac{5}{1153}$.
1153

Für Wurzeln beliebigen Grades besitzt K. die Verallgemeinerung dieser Annäherung. Ist wieder $T = a + \dots + t$ der gefundene ganzzahlige Teil der n -ten Wurzel und r der Rest des Radikanden, so beträgt, wie er sich ausdrückt, nach Maßgabe der „Korrektionsannäherung“ (*taqrīb iṣṭilāḥī*) der „Korrektionsbruch“ (*kasr iṣṭilāḥī*) $\frac{r}{(T+1)^n - T^n}$. K. rechnet also nach der Formel

$$(20b) \quad \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{T^n + r} \approx T + \frac{r}{(T+1)^n - T^n}.$$

Führen wir die Bezeichnungsweise $y = x^n$ ein, und gehören zu $x_1 = T$ und $x_2 = T + 1$ die Werte y_1 und y_2 , so erkennen wir für $y = y_1 + r$ in dieser Formel die lineare Interpolation

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) = T + \frac{1}{(T+1)^n} - T^n \quad r.$$

Die lineare Interpolation war K. ebenso wie seinen Vorgängern unter den Astronomen in der Anwendung auf trigonometrische und astronomische Tabellen geläufig. Dieselbe lineare Interpolation liegt aber auch bei dem altbekannten sogenannten doppelten falschen Ansatz vor, dem auch K. im „Schlüssel“ (Buch 5, Kap. 2) eine kurze Behandlung widmet. Allerdings wurde der doppelte falsche Ansatz wohl gewöhnlich oder stets nur für lineare Aufgaben verwandt, so auch von K.

Wie aber berechnet K. den Nenner $(T+1)^n - T^n$? Ich übersetze seine Angabe unter Einfügung der Werte seines uns bekannten Zahlenbeispiels für $n=5$, wobei ich die oben mit l bezeichnete Einerstelle der Wurzel als dritte Stelle von links c nenne.

„Wir verfahren mit der über die erste rationale Stelle (7) geschriebenen einstelligen Zahl ($c=6$) so, wie wir sonst verfahren bis zum Augenblick des Verschiebens.“ Das bedeutet: Wir bilden das Horner'sche System (c_{μ}) und finden als Zahlen seiner Hypotenuse $c_{31}=2680$, $c_{32}=2872960$, $c_{33}=1539\,906\,560$, $c_{14}=412694\,958\,080$. „Nunmehr addieren wir das, was in allen Wellen unter der Welle der Zahl über dem Trennungsstrich steht, und addieren 1 zu der Summe.“ Er bildet also, da $c_{50}=1$ ist, die Summe der Hypotenusenzahlen

$$c_{50} + c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{14} = 414237\,740281.$$

„Das ist die gesuchte Differenz der beiden Quadrate“ $(C+1)^5 - C^5$. Hier lüftet also K. im Gange seines für beliebiges n bisher ganz rezeptartig mitgeteilten Verfahrens einen Augenblick den Schleier und verrät uns ohne Beweis, daß

$$t_{n,0} + t_{n-1,1} + \dots + t_{1,n-1} = (T+1)^n - T^n = (a + \dots + l + 1)^n - (a + \dots + l)^n$$

ist. Dies aber entspricht unserer Formel (6a) von S. 225, wenn man $f(x) = x^n$, $k=l$, $l=1$ setzt und (9c) von S. 228 beachtet.

Für das Zahlenbeispiel ist also das Gesamtergebnis die gemischte Zahl

$$536 \frac{21}{414237\,740281}, \text{ die K. in der indischen Weise } \frac{536}{414237\,740281} \text{ schreibt.}$$

Diesen allgemeinen Fall der „Korrektionsannäherung“ behandelt K. so, wie er Gegenstände zu behandeln pflegt, die er von Vorgängern übernommen

hat. Für das Abendland wurde der allgemeine Fall, soweit ich sehe, bisher frühestens bei dem deutschen Bearbeiter der „Algebra“ des „Initius Algebras“ (S. 603 der Ausgabe von M. CURTZE⁵⁶) und bei J. SCHEUBEL⁵⁸) beobachtet. Beide kennen auch die auf (19) beruhende Verfeinerung für beliebiges n .

Die Näherungsbestimmung (20a) findet sich auch bei Nasa wīs Quadratwurzelauszählung. Für diesen Fall der Quadratwurzel gibt ebenfalls Nasawī als Grund die Beziehung $(T + 1)^2 - T^2 = 2T + 1$ an. Bei der Kubikwurzel aber bildet dieser Perser im Zahlenbeispiel (s. oben S. 251) den Nenner des Näherungsbruches gleich $1 + c_{12}$ statt $1 + c_{21} + c_{12}$. SUTER wollte diesen Fehler auf die schlechte Handschrift schieben^{57a}). Aber vorher, in der allgemeinen Formulierung der Vorschrift, hat die Handschrift (s. oben S. 249) denselben Fehler.

Ibn al-Bannā' und al-Qalaṣādī lassen bei (20a) für $r \leq T$ im Nenner die 1 weg, was der Newtonschen Näherungsmethode entspricht. Für $r > T$ hat Ibn al-Bannā' die Formel (20a), al-Qalaṣādī aber statt $\frac{r}{2T+1}$ den Bruch $\frac{r+1}{2T+2}$.

Eine Fortsetzung der Annäherung durch wiederholte Anwendung einer derartigen Formel finden wir für Quadratwurzeln nach Herons Vorgang bei al-Ḥaṣṣār, Ibn al-Bannā', al-Qalaṣādī einerseits und dem griechisch schreibenden Mönch und späteren Bischof Barlaam⁵⁹) (geboren in Calabrien, gestorben 1348) andererseits. War eine additive Korrektur zu groß, so ist die nächste subtraktiv.

Dies ist jetzt also nicht mehr eine Methode der sukzessiven Stellenbestimmung. Hier haben wir wieder ein numerisches Annäherungsverfahren des Mittelalters, bei dem sich die Genauigkeit beliebig weit treiben läßt. Man war sich dessen bewußt: „So kannst du, sagt al-Ḥaṣṣār nach SUTERS Übersetzung, fortfahren, soweit du willst.“ Barlaam erklärt, wenn man das Verfahren so oft wiederhole, bis das Quadrat der gefundenen Größe sich πρὸς ἀσθησιν von q nicht unterscheidet, so könne man sie als die Wurzel von q ansehen.

Auf die indischen Verfeinerungen irrationaler Wurzeln gehe ich nicht ein. Hier sei auch eines Verfahrens gedacht, das Leonardo von Pisa für Quadrat- und Kubikwurzeln bringt. Sind x_1 und x_2 zwei gefundene, die Wurzel einschließende Näherungswerte, so findet er einen dritten x_3 durch lineare Inter-

⁵⁸) SCHEUBEL, J.: De numeris et diversis rationibus etc. Leipzig 1545, fol. d, 6V. — Vgl. STAIGMÜLLER, H.: Johannes Scheubel, ein deutscher Algebraiker des XVI. Jahrhunderts, Abh. z. Gesch. d. Math. 9, 429–69 (1899), s. S. 465.

⁵⁹) Barlaami Monachi Logistica ed. J. CHAMBERS. Paris 1600, griech. S. 40: ΘΕΩΡΗΜΑ 29, lat. S. 63: Propositio XXXIX.

potation zwischen x_1 und x_2 , dann einen vierten x_4 durch lineare Interpolation zwischen x_3 einerseits und x_1 oder x_2 andererseits, und so fort. Zur Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen lehrte später Cardano⁶⁰⁾ dieses Verfahren unter der Bezeichnung *regula aurea*.

Es seien von der Unbekannten im Verfahren der sukzessiven Stellenbestimmung schon die Ziffern $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ gefunden. Dann wird die nächste Ziffer λ nach den Bedingungen (V₁) (S. 226) bestimmt. Statt nun diese Bedingungen besinnungslos mit den Werten $\lambda = 0, 1, \dots, 9$ durchzuprobieren, findet man bekanntlich in vielen Fällen, und so besonders bei der Wurzelausziehung, die nächste Korrektur l näherungsweise oder genau als den auf eine gültige Ziffer zu bestimmenden Wert $-\frac{l_n}{l_{n-1}} = -\frac{k_{\alpha, n}}{k_{1, n-1}}$, der für die Wurzelausziehungen gleich $\frac{q - K^n}{n K^{n-1}}$ wird. Diesen Ausdruck liefern als obere Schranke schon die Bernoullischen Beziehungen $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$.

Um die nächste Stelle λ des Ergebnisses annähernd oder genau zu finden, hat man also beim Quadratwurzelziehen den bisherigen Rest $q - K^2$ des Radikanden durch das Doppelte $2K$ des bisherigen Ergebnisses K auf eine gültige Ziffer genau zu dividieren, beim Kubikwurzelziehen den bisherigen Rest $q - K^3$ des Radikanden durch das dreifache Quadrat $3K^2$ des bisherigen Ergebnisses K . Dieses unter die Newtonsche Näherungsmethode fallende, für die Quadratwurzelausziehung schon bei Theon von Alexandrien ausgesprochene Verfahren der Näherungsbestimmung der nächsten Stelle habe ich bei den indischen Rechnern überall, bei den islamischen aber merkwürdigerweise nur in SUTENS Übersetzung von al-Haṣṣār gefunden. Hier wird so getan, als ob die Division die neue Ziffer stets richtig liefere. Die anderen Schriftsteller, und so ja auch K., pflegen entsprechend den Forderungen (V₁) nur zu sagen, man solle l möglichst groß so bestimmen, daß die betreffende ganze rationale Funktion von l , deren Bildung umständlich in Worten beschrieben wird, kleiner als der vorliegende Rest $q - K^n$ des Radikanden ausfällt. Wie sie den dem ganzzahligen Teil des Ergebnisses hinzuzufügenden „Näherungsbruch“ ähnlich berechneten, haben vielleicht auch sie die Näherungsbestimmung der ersten Ziffer λ von l zwar praktisch angewandt, aber zu lehren sich gescheut, da diese Bestimmungsweise die Ziffer λ nicht stets genau liefert und im Anfang der Wurzelausziehung eine viel zu große Ziffer ergeben kann.

Bei Leonardo von Pisa begegnet uns im Liber abaci (1202, 1228) diese

⁶⁰⁾ Cardani Opera IV, Lyon 1663, S. 273–74.

Newtonsche Näherungsbestimmung von l nur im Keime für das Quadratwurzelziehen (Scritti ed. Boncompagni I, S. 355, Z. 7 v. u.). Ausgeprägter, nämlich als Division ausgesprochen, erscheint sie bei Quadratwurzelziehungen in der *Practica Geometriae* (1220) (II, S. 21 Z. 5 v. u., S. 22 Z. 12 v. o., S. 23 Z. 1 v. o.). Der von Boncompagni herausgegebene Text des *Liber abaci* dürfte also in diesem Punkte die alte Fassung von 1202 unverändert wiedergeben.

Bei der Kubikwurzelausziehung bestimmt Leonardo, nachdem er schon den Näherungswert K gefunden hat, die nächste Stelle λ im Einklang mit unseren Bedingungen (V_1) so, daß, wenn q_1 der bis zum Stellenwert 10^{3^1} reichende Teil von q ist,

$$(21) \quad (q_1 - K^3) - 3K^2l - 3Kl^2 - l^3 \leq 3(K + l)(K + l + 10^1)10^1$$

wird. Auch er spricht diese seine Forderung wiederholt umständlich in Worten aus und fügt wiederholt hinzu, daß man die Ziffer λ nur *ex usitato arbitrio* finden könne (Lib. ab., I, S. 381 Z. 18 v. u., *Pract. Geom.*, II, S. 150 Z. 9 v. u.). Ich übersetze das etwa: „nach einer gewohnheitsmäßigen Entscheidung“ und verstehe es in dem Sinne, daß man die unbestimmte (diophantische) Ungleichung oder Gleichung dritten Grades (21), die durch genau eine der 10 Zahlen $l = \lambda \cdot 10^1$, $\lambda = 0, 1, \dots, 9$ erfüllt werden soll und kann, auf Grund von Übung durch geringes Probieren, und nur so, rasch lösen könne. Es konnte dem geübten Rechner nicht verborgen bleiben, daß hierbei das Glied $3K^2l$ meist den weit überwiegenden Ausschlag gibt. Das ist aber nicht immer so, und z. B. für $\sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{7999}$, $K = a = 10$ versagt bei der Bestimmung von $l = b$ die Newtonsche Näherungsmethode gänzlich, wenn man sie nicht durch nähere Anweisungen ergänzt. Schon das „nur“ verbietet die Annahme, daß Leonardo mit *ex usitato arbitrio* einfach die von ihm hier gar nicht beschriebene Newtonsche Methode im Auge hatte, wie ZEUTHEN⁶¹⁾ und GRAM⁶²⁾ meinen. Wenn übrigens ZEUTHEN (S. 12) sagt, die Bestimmung von l aus (21) hänge von einer quadratischen Gleichung ab, so ist das nicht die Newtonsche Annäherung, sondern ZEUTHEN hat nur l^3 gestrichen.

Levi ben Gerson⁶¹⁾ gebraucht für die Quadratwurzel die Newtonsche Näherungsmethode und bemüht sich für die Kubikwurzel um eine feinere Näherungsbestimmung. Das *Carmen de algoritmo*, der *Algorismus de integris* und *Sacrobosco* haben die Näherungsbestimmung von l nicht. Wohl aber gibt *Sacroboscos* Kommentator Petrus de Dacia bei der Kubikwurzelausziehung ein Verfahren, das darauf hinausläuft, $l \approx (q - K^3) : 3K^2$ durch systemati-

⁶¹⁾ ZEUTHEN, H.-G.: Notes sur l'histoire des mathématiques. Overs. o. d. Kong. Danske Vidensk. Selsk. 1893, S. 1–17. – GRAM, J.-P.: Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Ebenda S. 18–28.

sches Probieren auf eine gültige Ziffer zu bestimmen. Im 15. Jahrhundert ist die Näherungsbestimmung der nächsten Stelle auf Newtonsche Weise verbreitet.^{61a)}

Vieta, den ich nur in der Ausgabe van Schooten⁶²⁾ einsehen konnte, sagt (S. 165), daß man bei der Berechnung von $\sqrt[3]{2916}$ nach Bestimmung der ersten Stelle 5 die zweite Stelle 4 dadurch erhält, daß an $2 \cdot 5 = 10$, welche Zahl *tanquam divisor* auftrete, der Rest 41[6] des Radikanden appliziert wird (*adplicatur*). Das bedeutet $41 : 10 \approx 4$, wie aus der Erklärung der *adplicatio* in *præc.* 4 der „In Artem Analyticon Isagoge“ (S. 6–7) hervorgeht. Man beachte aber in *præc.* 7 (S. 164) der Schrift über die Wurzelausziehung die Bemerkung: . . . *adplicatione inquam non omnino accurata. Nam ad ipsum quodque latus adplicationem fieri subaudiendum est.*

In den beigegebenen Schemen aber bildet Vieta die „Divisorensumme“:

$$s = \binom{n}{1} K^{n-1} \cdot 10^1 + \binom{n}{2} K^{n-2} \cdot 10^{2t} + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 10^{(n-1)t}.$$

Die nach *præc.* 4 von S. 227 vorzunehmende Berechnung $\lambda \approx \frac{q - K^n}{s}$ kommt der linearen Interpolation zwischen $f(K)$ und $f(K + 10^t)$ nahe, die wir bei islamischen Mathematikern zur Verbesserung des ganzzahligen Ergebnisses (oben S. 261–63) angewandt sahen. Es fehlt bei Vieta nur im Nenner der Summand 10^{n-1} . (In der von THOPPE III³ S. 158 gegebenen Formel ist dem Bruch noch der Faktor s_1 zu geben.) Auch die Verbesserung des ganzzahligen Ergebnisses vollzieht Vieta (S. 228) nach dieser Formel.

9. Der binomische Lehrsatz.

K. besitzt auch die Weiterentwicklung des Ruffini-Hornerschen Schemas zum binomischen Lehrsatz und damit die Wurzelausziehung nach dem Verfahren der Renaissancemathematiker. Dies zeigt uns der letzte Teil seines Kapitels über die Wurzelausziehung. Da hier erstmalig für die islamische Mathematik der binomische Lehrsatz und das Dreieck der Binomialkoeffizienten bezeugt ist, übersetze ich diesen Teil nach dem Wortlaut der Leidener Handschrift.

- 18b) Zur Bestimmung der ersten Seite aus einer irrationalen Zahl (d. h. zur Ausziehung der n -ten Wurzel aus einer ganzen Zahl, die nicht n -te Potenz ist) gibt es ein feineres Verfahren als sie (d. h. als die vorher mitgeteilten), das wir

^{61a)} Anmerkung bei der Drucklegung. Vgl. ENESSTRÖM, G.: Bibl. Math. (3) 14, 83–84 (1913–14).

⁶²⁾ VIETA, Fr.: De numerosa potestatum purarum resolutione. Opera ed. Fr. à Schooten, S. 163–72, Leiden 1646.

im folgenden Buch bringen werden, da es auf der Kenntnis der Bruchrechnungen beruht. Die Bestimmung der ersten Seite (Ausziehung der n -ten Wurzel) ist das Muster, und nach dieser (d. h. der von K. angegebenen) Anordnung gehört es zu dem, was wir selbst erfanden. Die Art, wie⁶³⁾ die Vorgänger verfahren, ist

schwer verständlich, besonders wenn die Gradzahl (der Exponent n) und die Zahl der Stellen groß sind. Wir erfanden auch ein anderes Verfahren, das wir in einem anderen Lehrbrief bringen werden. Die von uns in Aussicht gestellte Tabelle, in die die Potenzen der einstelligen Einer eingesetzt sind, ist folgende: . . .

Die sich hier anschließende Tabelle von z^n für $z = 2, 3, \dots, 9$ und $n = 1, 2, \dots, 10$ lasse ich weg. K. fährt fort:

Anderes Verfahren zur Bestimmung des Unterschiedes der rationalen Potenzen (d. h. der Potenzen der natürlichen Zahlen). Es (dieses neue Verfahren) bedarf der Kenntnis von Zahlen, die als Elemente (uṣūl) des betreffenden Grades (manzila) der Potenzen bezeichnet werden. Das sind die Zahlen, die in den Wellen zur Zeit des Verschiebens herausgekommen sind, wenn die über die letzte rationale Stelle fallende einstellige Zahl 1 ist.

Beispiel: Wir wollen die Elemente des Grades Quadratokubus bestimmen. Wir entwerfen die Wellen wie früher und setzen in die Zeile des Ergebnisses 1 und ebenfalls in die Welle der Seite. Nun verfahren wir mit ihr (mit der 1), wie wir es bei der Bestimmung der ersten Seite (d. h. Ausziehung der n -ten Wurzel) bis zu den Zeitpunkten des Verschiebens angaben, folgendermaßen: (Es folgt das nebenstehende Schema.)

Zeile des Ergebnisses	1
Welle des Quadratoquadrats	5 4 1
Welle des Kubus	10 6 4 3 1
Welle des Quadrats	10 4 6 3 3 2 1
Welle der Seite	5 4 3 2 1

Dann kommt in der Welle der Seite 5 heraus, in der Welle des Quadrats 10, in der Welle des Kubus 10 und in der Welle des Quadratoquadrats 5. Diese vier Zahlen sind also die Elemente des Grades Quadratokubus. Jede dieser Zahlen bezieht sich auf eine Welle, in die sie fiel.

Die Zahlen, die wir bei der Bestimmung der ersten Seite des Quadratokubus (d. h. bei der Ausziehung der fünften Wurzel) herausbekamen, eben diese sind

⁶³⁾ Vielleicht ist 'alaihi statt itaihi zu lesen.

die Ergebnisse der Multiplikationen dieser Elemente mit dem, was in der Zeile des Ergebnisses bei jeder Verschiebung herausgekommen war, und mit seinen Potenzen. Z. B. wird das Ergebnis der Multiplikation dessen, was in der Zeile des Ergebnisses steht, mit der 5 im Augenblick der Verschiebung in der Welle der Seite stehen, ferner (das Ergebnis der Multiplikation) des Quadrats dessen, was in der Zeile des Ergebnisses steht, mit der 10 in der Welle des Quadrats, und (das Ergebnis der Multiplikation) des Kubus desselben mit der 10 in der Welle des Kubus, und (das Ergebnis der Multiplikation) des Quadratoquadrats desselben mit der 5 in der Welle des Quadratoquadrats. Die Summe dieser (Produkte) plus 1 ist der Unterschied zwischen dem Quadratokubus dessen, was in der Zeile des Ergebnisses steht, und dem Quadratokubus der um 1 größeren Zahl. (D. h. $1 + 5K + 10K^2 + 10K^3 + 5K^4 = (K + 1)^5 - K^5$.)

Wisse, daß das Element des Grades des Quadrats eine einzige Zahl ist, nämlich 2, für den Kubus sind es 2 Zahlen, nämlich 3, 3. Für jeden darauffolgenden Grad vermehren wir seine Zahl um 1 wegen der Zunahme der Wellen. So (ver-

Grad des Quadrats	Grad des Kubus	Grad des Quadratoquadrats	(Grad des) Quadratokubus	(Grad des) Kubokubus	(Grad des) Quadratoquadratokubus	(Grad des) Quadratokubokubus	(Grad des) Kubokubokubus	die Wellen
							9	(Welle des) Quadratokubokubus
						8	36	(Welle des) Quadratoquadratokubus
					7	28	84	(Welle des) Kubokubus
				6	21	56	126	(Welle des) Quadratokubus
			5	15	35	70	126	(Welle des) Quadratoquadrats
		4	10	20	35	56	84	(Welle des) Kubus
	3	6	10	15	21	28	36	Welle des Quadrats
2	3	4	5	6	7	8	9	Welle der Seite

Das Pascensche Dreieck bei al-Kāšī.

fahren wir) durch Vermehrung der Endzahlen. Wenn wir nun je zwei untereinanderstehende Zahlen der Elemente eines Grades addieren, kommt eine der inneren Zahlen des auf ihn folgenden Grades heraus.

Beispiel: Die Zahl(en) des Grades des Kubus (sind) 3, 3; ihre Summe ist 6. Das ist also die innere Zahl für das Quadratoquadrat, und die Zahlen des Quadratoquadrats sind 4, 6, 4. Nun ist die 4 plus die 6 eine der beiden inneren Zahlen des Quadratokubus, d. h. 10, und die 6 plus die 4 ist die andere innere Zahl.

Nach dieser Regel werden die Elemente bis ins Unbegrenzte erzeugt, (wie aus der folgenden Tabelle (zu ersehen ist): (Es folgt die Tabelle von S. 269⁶⁴).)

Wollen wir nun den Unterschied zweier aufeinanderfolgender rationaler Potenzen (den Unterschied der Potenzen zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen) bestimmen, so multiplizieren wir die kleinere Seite (Basis der kleineren Potenz) mit dem Element der Welle der Seite jener Potenz, ihr Quadrat mit dem Element der Welle ihres Quadrats, ihren Kubus mit dem Element der Welle ihres Kubus und so (fort), bis wir alle ihre Potenzen, die unter der gegebenen Potenz liegen, mit ihren Elementen multipliziert haben, addieren alles und fügen 1 hinzu. Dann kommt der Unterschied der Potenzen heraus.

Beispiel: Wir suchen den Unterschied zwischen dem Quadratokubus von 4 und dem Quadratokubus von 5. Wir zeichnen die Wellen auf, die unter dem Quadratokubus liegen, setzen in sie ihre Elemente ein, setzen die kleinere Seite, d. i. 4, in die Welle der Seite ein, ihr Quadrat in die Welle des Quadrats, ihren Kubus in die Welle des Kubus und ihr Quadratoquadrat in die Welle des Quadratoquadrats, nachdem wir zwischen ihnen und den Elementen (je) eine Längslinie (d. h. eine senkrechte Linie) gezogen haben. Dann multiplizieren wir das in jeder Welle
19b befindliche Element mit der in ihr befindlichen Potenz und setzen die Ergebnisse folgendermaßen in eine weitere Spalte: (Es folgt das Schema von S. 271 oben.)

Hierauf addieren wir das, was in der Spalte der Ergebnisse steht, und fügen 1 hinzu. Es kommt 2101 heraus, und das ist der Unterschied zwischen dem Quadratokubus von 4 und dem Quadratokubus von 5.

Suchen wir den Unterschied zweier nicht aufeinanderfolgender rationaler Potenzen, z. B. dem Quadratokubus von 4 und dem Quadratokubus von 7, so hängen wir eine neue Spalte an, in die wir die Potenzen des Unterschiedes der beiden Seiten⁶⁵, d. i. von 3, derart einsetzen, daß der Unterschied, d. i. 3, in die Welle des Quadratoquadrats fällt, sein Quadrat darunter und sein Quadratoquadrat in die Welle der Seite, folgendermaßen: (Es folgt das Schema von S. 271 unten.)

Dann multiplizieren wir das, was in jeder Welle in der Spalte der Ergebnisse steht, mit dem, was in ihr (derselben Welle) in der Spalte der Potenzen des Unterschiedes steht, und setzen die letzten Ergebnisse in eine neue Spalte. Hierauf ad-

⁶⁴) Wie bei den übrigen Tabellen habe ich auch bei dieser, dem arithmetischen Dreieck von K., wegen der arabischen Schreibrichtung bei der Übersetzung links und rechts vertauscht.

⁶⁵) Handschrift: Potenzen.

<i>die Wellen</i>	<i>Elemente des Grades Quadratkubus</i>	<i>der kleineren Seite Potenzen, die wir mit den Elementen multiplizieren</i>	<i>Ergebnisse der Multiplikationen</i>
<i>Welle des Quadratoquadrats</i>	5	256	1280
<i>Welle des Kubus</i>	10	64	640
<i>Welle des Quadrats</i>	10	16	160
<i>Welle der Seite</i>	5	4	20

<i>die Wellen</i>	<i>(Elemente des Grades Quadratkubus)</i>	<i>der kleineren Seite Potenzen, die wir mit den Elementen multiplizieren</i>	<i>Ergebnisse der Multiplikationen</i>	<i>Potenzen des Unterschieds, die wir mit den Ergebnissen multiplizieren</i>	<i>Ergebnisse der zweiten Multiplikationen</i>
<i>Welle des Quadratoquadrats</i>	5	256	1280	5	3840
<i>Welle des Kubus</i>	10	64	640	9	5760
<i>Welle des Quadrats</i>	10	16	160	27	4320
<i>Welle der Seite</i>	5	4	20	81	1620

dieren wir, was in der letzten Spalte steht und fügen den Quadratokubus des Unterschiedes, d. i. 243, hinzu. Es kommt 15783 heraus, und das ist der Unterschied der angegebenen Potenzen.

Soweit die Ausführungen K.s, die wir nun erläutern.

Das feinere Verfahren, von dem er am Anfang dieser Stelle spricht, ist die oben (S. 261–64) behandelte, auf den Formeln (19), (20a) und (20b) beruhende Hinzufügung eines Bruches zum ganzzahligen Teil der Wurzel.

Der von K. in Aussicht gestellte Lehrbrief über ein anderes Verfahren der Wurzelausziehung ist meines Wissens bisher nicht aufgefunden worden. Ich vermute, daß er ihn nicht mehr geschrieben hat, denn mir sind auch keine sonstigen, nach dem „Schlüssel“ erschienenen Werke unseres Autors bekannt.

Die Binomialkoeffizienten und den binomischen Lehrsatz bringt K. als ein anderes, also vom Hornerischen Schema abweichendes Verfahren zur Berechnung von $(K + 1)^n - K^n$. Er läßt das Neue unmittelbar aus seiner Handhabung des Hornerischen Schemas bei seiner ersten Wurzelausziehungsweise erwachsen. So heißt bei ihm z. B. der Binomialkoeffizient $\binom{5}{3}$ „Element des Grades Quadratokubus in der Welle des Kubus“ und wird nach seiner Beschreibung so erzeugt, wie beim Schema der Ausziehung der 5. Wurzel die in der Welle des Kubus vor der ersten Verschiebung stehende Zahl $a_{23} = 10a^3$ für $a = 1$. K. hat also die oben (S. 229) von uns modern dargestellte Erzeugung des „arithmetischen Dreiecks“ als Sonderfall des Hornerischen Schemas.

Auch die Chinesen besaßen im Mittelalter nicht nur das Ruffini-Hornerische Verfahren zur Auflösung von algebraischen Gleichungen, sondern auch das Pascalsche Dreieck. Stehen bei ihnen diese beiden Gegenstände in ähnlich engem Zusammenhang wie wir es bei K. beobachten? Ist das islamische und das chinesische Vorkommen des Pascalschen Dreiecks auch mit dem indischen in Verbindung zu bringen?

In K.s Aufstellung dieses Zahlendreiecks fehlen die Einsen $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$, entsprechend der Herkunft dieses Schemas aus seiner Form des Ruffini-Hornerischen Verfahrens. Demgemäß kann K. mit der Formel

$$\binom{n}{v} = \binom{n-1}{v-1} + \binom{n-1}{v},$$

die er in Worten ausspricht, nur seine „inneren“ Binomialkoeffizienten erzeugen. Auch im Abendland fehlten die Einsen anfänglich. J. SCHEUBELS⁵⁵⁾ Tafel der Binomialkoeffizienten stimmt nach einer Drehung um 90° im positiven Drehsinn abgesehen von der Beschriftung der Zeilen und Spalten mit derjenigen unserer Übersetzung überein. Auch SCHEUBEL bringt die Tafel der Potenzen z^n für $z = 1, 2, \dots, 9$ und $n = 1, 2, \dots, 9$.

K. weiß aber ferner: Bei jeder späteren Verschiebung gilt, wenn man mit

$K = a + b + \dots + k$ das bis dahin erhaltene Ergebnis der Wurzelausziehung bezeichnet,

$$l_v = k_{n-v, v} = \binom{n}{v} K^v, \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Er erläutert das für $n = 5$:

$$5K = k_{4,1}, \quad 10K^2 = k_{3,2}, \quad 10K^3 = k_{2,3}, \quad 5K^4 = k_{1,4}.$$

Mit anderen Worten: Er braucht die $l_v = k_{n-v, v}$ nicht mehr nach seinem Hornersehen Schema zu erzeugen, sondern besitzt die Methode der Renaissance für beliebiges n .

Ferner formuliert K. ausdrücklich die Formeln

$$(22a) \quad (K + 1)^n - K^n = \binom{n}{1} K^{n-1} + \binom{n}{2} K^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} K + 1$$

$$(22b) \quad (K + l)^n - K^n = \binom{n}{1} K^{n-1} l + \binom{n}{2} K^{n-2} l^2 + \dots + \binom{n}{n-1} K l^{n-1} + l^n.$$

Nachdem er zunächst am Beispiel $n = 5$ die Bedeutung der Glieder der ersten dieser beiden Formeln für die Wurzelausziehung gekennzeichnet hat, bringt er schließlich beide Formeln unabhängig von der Wurzelausziehung als Methoden zur Berechnung der Differenz gleichnamiger natürlicher Potenzen zweier aufeinanderfolgender oder nicht aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen K und $K + l$. Man braucht also unter K und l jetzt nicht mehr Zahlen von den besonderen Formen zu verstehen, unter denen sie beim Wurzelausziehen auftreten, sondern K und l sind beliebige positive Zahlen, die sich K. nach der Überschrift dieses Abschnitts nur als natürliche Zahlen vorstellt. In diesem Sinne besitzt K. den binomischen Lehrsatz, den er an dem Beispiel $n = 5$, $K = 4$, $K + l = 7$ erläutert.

Alles dies nimmt K. nicht als eigene Erfindung in Anspruch. Sein Dreieck der Binomialkoeffizienten bezeichnet er im Vorwort des „Schlüssels“ ausdrücklich neben sechs anderen Tabellen, darunter die Tafel des kleinen Einmaleins, ein Schema für die Aufsuchung des Hauptnenners von Brüchen und die Tafel der Sinusse, als von Vorgängern übernommen, während alle anderen Tabellen des Werks sein geistiges Eigentum seien.

Was für ein anderes Verfahren der Wurzelausziehung mag K. für den geplanten Lehrbrief im Auge gehabt haben? Kaum das Renaissanceverfahren nach dem geschlossenen Ausdruck des binomischen Lehrsatzes, das für jeden Kundigen aus den obigen Angaben im „Schlüssel“ über die andersartige Berechnung der zu verschiebenden Zahlen l_v in den Wellen auf der Hand lag. Dieses Verfahren hätte zwar dem weniger Begabten und Geübten an Bei-

spielen vorexerziert werden können, aber in einem „Lehrbrief“ (*risāla*) pflegt K. Neues und Eigenes zu bringen.

Sollte er ein Näherungsverfahren im Sinn gehabt haben, bei dem jeder Schritt nicht genau eine neue Dezimal- oder Sexagesimalstelle liefert, so könnte er sich vielleicht Methoden zum Vorbild und Ausgangspunkt genommen haben, wie wir sie bei Quadratwurzelausziehungen oben (S. 264–65) für al-Ḥaṣṣār, Ibn al-Bannā', al-Qalaṣādī und Barlaam, bei Quadrat- und Kubikwurzelausziehungen für Leonardo von Pisa erwähnten. Diese Methoden konnten einerseits zum Newtonschen Näherungsverfahren, andererseits wenigstens bei der Quadratwurzel zu Kettenbrüchen führen und brauchen ja nicht erst, wie bei den genannten Schriftstellern, einzusetzen, wenn die Wurzel schon bis auf die Einer genau bestimmt ist.

Große Rechenarbeit schreckt K. ebensowenig wie Brüche. Auch beherrscht er die Praxis der Dezimalbrüche ebenso meisterhaft wie die der gemeinen Brüche und der Sexagesimalbrüche.

Zum Schluß sei bemerkt, daß außer den erwähnten viele andere bisher nicht untersuchte arabische und persische Handschriften über Rechnen und Algebra weitere Aufschlüsse über die hier behandelten historischen Fragen erhoffen lassen. Diese zur Zeit größtenteils unzugänglichen Handschriften schlummern zum Teil in Bibliotheken des Abendlandes, zum anderen Teil sind sie in solchen des Morgenlandes entweder noch ganz verborgen oder erst durch die in den letzten Jahrzehnten erschienenen Kataloge ans Licht gekommen.

(Eingegangen am 6. Februar 1942.)

Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters

Von Dr. Paul Lücke, Göttingen (Westf.)

Angesichts des mächtigen Einflusses, den die islamischen mathematischen Wissenschaften des Mittelalters auf die Entfaltung der Wissenschaft des Abendlandes im Mittelalter und in der Zeit der Renaissance ausgeübt haben, erscheint es bedauerlich, ja beschämend, wie wenig die mittelalterliche islamische Mathematik und Astronomie in der Neuzeit erforscht wurden. Von den zahlreichen arabischen und persischen Handschriften aus diesem Gebiet, die die Bibliotheken des Abend- und des Morgenlandes bergen, wurden bisher verhältnismäßig sehr wenige untersucht, so daß unsere Kenntnis der Geschichte der islamischen Astronomie und Mathematik noch beträchtliche Lücken aufweist, und bei den Historikern dieser Wissenschaften auch Mißverständnisse und falsche Vorstellungen aufkommen konnten, weil sie, der orientalischen Sprachen meist nicht mächtig, ihre Kenntnisse und Schlüsse auf den viel zu kleinen Bereich des von Sprachkundigen durch Übersetzungen oder Inhaltsangaben zugänglich gemachten Quellenmaterials gründeten. Die letzten 15 Jahre waren für Forschungen dieser Art sehr ungünstig, da schon vor dem Kriege Photokopien aus ausländischen Bibliotheken schwer zu beschaffen waren, und dann während des Krieges die deutschen Handschriften-schätze verlagert wurden. Trotzdem war es mir vergönnt, eine Anzahl bisher unerforschter arabischer mathematischer und astronomischer Handschriften zu untersuchen. Im folgenden berichte ich über einige Ergebnisse, die dazu beitragen mögen, unsere bisherigen Kenntnisse zu ergänzen und Irrtümer zu beseitigen. Die Ergebnisse wären leichter zu gewinnen gewesen und umfassender ausgefallen, wenn nicht die immer noch andauernden Hemmnisse der Zeit mir den Einblick in so manche Handschrift versagt hätten, deren Titel und Inhaltsangaben in den Katalogen mich lockten. In der Hauptsache beschränke ich mich hier auf die islamische Rechenkunst und Algebra, obwohl auch aus der Astronomie, der Gnomonik und der Trigonometrie Bemerkenswertes mitzuteilen wäre.

Die an die indische Rechenkunst anknüpfende islamische Technik des Rechnens mit ganzen, im dekadischen Positionssystem geschriebenen Zahlen ist einigermaßen bekannt, soweit die elementaren Rechenoperationen bis zur Division in Betracht kommen. Auch über die islamische Bruchrechnung weiß man Bescheid, obwohl die Unterschiede in ihrer Behandlungsweise und Terminologie bei den verschiedenen Autoren und zu den verschiedenen Zeiten noch eine nähere Beleuchtung verdienen. Schlecht steht es um die bisherigen Kenntnisse der Technik des Wurzelziehens, auf die ich weiter unten zurückkommen werde.

Besonders im Dunkeln blieb aber bisher die islamische Sexagesimalrechnung. Wie berechneten die islamischen Astronomen technisch ihre sehr genauen Tafeln der sexagesimal geschriebenen Werte der Sinusfunktion? Wie führten sie ihre sphärisch-astronomischen Rechnungen mit diesen Sexagesimalbrüchen praktisch aus? Im Tahdid von al-Birūnī, einem Werke über geographische Ortsbestimmung, das dieser große Astronom und Geograph im Jahre 1025 abschloß, beobachtet man eine außerordentlich schwerfällige Technik dieses Rechnens. Um z. B. einen Ausdruck $x = \frac{a \cdot b}{c}$

zu berechnen, in dem jede der Zahlen a, b, c ein aus Minuten und Sekunden bestehender Sexagesimalbruch ist, verwandelt al-Birūnī jede dieser drei Zahlen in hundert Sekunden, multipliziert die beiden so für a und b erhaltenen ganzen dekadischen Zahlen miteinander nach einer der Methoden des dekadischen Multiplizierens, dividiert dann das erhaltene dekadische Produkt $a \cdot b$ durch die als dekadische ganze Zahl der Sekunden geschriebene Zahl c , um schließlich das Ergebnis x , wenn es z. B. einen Sinus bedeutet, wieder in einen Sexagesimalbruch zu verwandeln.

Aber neben dieser umständlichen unreinen Sexagesimalrechnung besaßen Astronomen zur Zeit al-Birūnīs eine ele-

gante reine Sexagesimalrechnung. Wie eine aus Ganzen und Brüchen bestehende dekadische Zahl im Positionssystem geschrieben wird, derart, daß z. B. 208,53 die nach fallenden Potenzen von 10 entwickelte Zahl

$$2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

bedeutet, so schrieb man im sexagesimalen Positionssystem z. B.

$$43 \ 0 \ 16 \ 3 \ 37 \text{ Sekunden}$$

und meinte damit die Zahl

$$43 \cdot 60^4 + 0 \cdot 60 + 16 \cdot 60^3 + 3 \cdot 60^{-1} + 37 \cdot 60^{-2}.$$

Wie das dekadische Rechnen mit den 10 Ziffern

$$0, 1, 2, \dots, 8, 9$$

arbeitet, so das rein sexagesimale mit den 60 Ziffern

$$0, 1, 2, \dots, 59, 59.$$

Sie wurden meist mit Gummibuchstaben geschrieben, d. h. Buchstaben eines arabischen Alphabets, die in ihrem Gebrauch für die Zahlenschreibung genau den griechischen Buchstaben entsprechen, mit denen wir z. B. im Almagest des Ptolemäus die Sexagesimalbrüche geschrieben finden. Zu den Buchstabenzeichen kam wie bei den Griechen ein Nullzeichen. Der arabischen Schreibung der obigen Sexagesimalzahl entspräche also die griechische Schreibung

$$\mu\gamma \ \theta \ \iota\varsigma \ \eta \ \lambda\zeta \ \delta\epsilon\upsilon\tau\epsilon\tau\epsilon\alpha \ \epsilon\zeta\eta\chi\omicron\sigma\alpha\tau\iota.$$

Aber eine solche Schreibung finden wir in keinem griechischen Text. Ein griechischer Astronom würde diese Zahl schreiben:

$$\text{M} \ \delta\omega\iota\varsigma \ \eta \ \lambda\zeta, \text{ d. h. } 154816, \ 3 \ 37.$$

In dieser unreinen Schreibweise sind die Ganzen dekadisch, die Brüche aber sexagesimal ausgedrückt. Das Kennzeichnende der islamischen reinen sexagesimalen Zahlenschreibung ist eben, daß auch die Ganzen sexagesimal im Positionssystem dargestellt werden.

Die niedrigste Stelle der Ganzen nannte man »Teile« oder »Grades«, die nächsthöhere, d. h. den Koeffizienten von 60, »Erhöhtes«, die folgende »zweimal Erhöhtes« und so fort. Die obige Sexagesimalzahl lautet also, ausführlich ausgesprochen:

$$43 \text{ zweimal Erhöhtes, } 0 \text{ Erhöhtes, } 16 \text{ Grad, } 3 \text{ Minuten, } 37 \text{ Sekunden.}$$

Gewöhnlich kennzeichnete man den absoluten Stellenwert einfach durch Angabe des Stellenwertes der niedrigsten Stelle, wie der Sekunden in der anfangs mitgeteilten Schreibweise. In Tabellenrechnungen findet man die Bezeichnungen der Stellenwerte als Über- oder Unterschriften der Spalten. Sibṭ al-Māridīnī (1423—1506) empfiehlt, die Stelle der Grade (die Einer) durch ein Zeichen zu markieren. Dieses Zeichen ist das Äquivalent zu dem Komma, mit dem wir Deutsche, und zu dem Punkt, mit dem andere Völker die Ganzen von den Dezimalbruchstellen trennen.

Schrieb man die Sexagesimalstellen (Sexagesimalziffern) in den sogenannten indischen Ziffern, denen unsere Ziffern 0, 1, ..., 8, 9 entsprechen, so setzte man sie mit fallendem Stellenwert untereinander.

Mit diesen reinen Sexagesimalzahlen wurden nun rein sexagesimale Rechnungen ausgeführt, d. h. Rechnungen im sexagesimalen Positionssystem, die in jeder Hinsicht genau den Rechnungen im dekadischen Positionssystem entsprechen. Wie man bei diesen das Kleine Einmaleins benutzt, d. h. die Gesamtheit der ausgerechneten Produkte von 1 mal 1 bis 10 mal 10, die man entweder auswendig weiß, oder, wie im Mittelalter, als »Tafel des Pythagoras« in Gestalt einer Tabelle mit zwei Eingängen vor sich hatte,

so erfordert die reine Sexagesimalrechnung, die als Rechnung der Astronomen bezeichnet wurde, die Verwendung einer größeren Einmaleinstafel, nämlich der Tafel der sexagesimal dargestellten Produkte von 1 mal 1 bis 60 mal 60. Streng genommen genügen die Produkte bis 59 mal 59, wie beim Kleinen Einmaleins der dekadischen Zahlen diejenigen bis 9 mal 9. Man legte diese Tafel, die den Namen »Sechzigertafel« führte, als Tafel mit zwei Eingängen an. Am oberen und am seitlichen Rand standen die Zahlen von 1 bis 60, und wenn man z. B. von der oberen 18 und der seitlichen 25 in die Tafel einging, so stieß man auf die Zahl 7 30, d. i. das sexagesimal geschriebene Produkt $18 \cdot 25 = 7 \cdot 60 + 30 = 450$. Der rein sexagesimal rechnende Astronom hatte die Sechzigertafel zur Hand, wie der Astronom der Gegenwart die Logarithmentafel oder die Rechenmaschine. Gewöhnlich wurde die etwas unhandliche ganze Sechzigertafel in Teiltafeln zerlegt. Zur Bestimmung des Stellenwertes eines Produktes oder eines Quotienten diente eine besondere Tafel mit zwei Eingängen, aus der man z. B. entnehmen konnte, daß das Produkt einer zweimal Erhöhten (60¹) mit einer Terzie (60⁻³) eine Minute (60⁻¹) beträgt. Wie man sieht, stecken in dieser Tabelle zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes und des Quotienten zweier Sexagesimalstellen die Gesetze der Multiplikation und der Division von Potenzen mit gleicher Basis 60 für Exponenten, die positive oder negative ganze Zahlen oder Null sein können.

Von dem um das Jahr 1000 lebenden Astronomen Kūyār b. Labbān al-Gūl ist uns ein Lehrbuch des Rechnens erhalten; dessen erster Teil das Rechnen mit den gewöhnlichen dekadischen Zahlen behandelt, während der zweite Teil in ganz entsprechender Weise die reine Sexagesimalrechnung lehrt. Die Sechzigertafel und die beiden Tafeln der Stellenwerte von Produkten und Quotienten, zwei Tafeln, die wir bei anderen Schriftstellern zu einer einzigen vereinigt sehen, werden beschrieben, und die Benutzung dieser Tafeln wird erläutert. Über die rationalen Operationen hinausgehend behandelt Kūyār das rein sexagesimale Ausziehen von Quadratwurzeln, wie im ersten Teile das Ausziehen der Quadratwurzel in der Technik des Zehnersystems. Diese Schrift von Kūyār ist die älteste der Schriften über sexagesimales Rechnen, deren ich habhaft werden konnte. Bei ihrem Studium gewinnt man aber den sicheren Eindruck, daß es sich nicht etwa um eine Neuerfindung des mathematisch nicht besonders hervorragenden Verfassers handelt, sondern daß dieser vielmehr älteres Gut in seiner Weise weitergibt. Man kann wohl mit Sicherheit annehmen, daß der 998 gestorbene Abul-Wafā' al-Būzjānī, der als Astronom und als einer der Schöpfer der sphärischen Trigonometrie im eigentlichen Sinne des Wortes gleich bedeutend ist, bei der Herstellung seiner sehr genauen sexagesimalen Sinustafeln und bei seinen sphärisch-astronomischen Rechnungen rein sexagesimal unter Benutzung der Sechzigertafel arbeitete. Denn uns ist der Titel einer von ihm verfaßten Schrift »Über die Rechnung mit der sexagesimalen Tafel« überliefert. Die Schrift scheint, wie leider so manches wertvolle mathematische Gut der älteren Zeit, verlorengegangen zu sein.

Der Kenner der alten Mathematik und Astronomie des Zweistromlandes wird hier der Sexagesimalrechnung gedenken, von der uns die Rechnungen und die Produktentabellen der Keilschrifttafeln Kunde geben, und in die man besonders dank der Forschungen von F. Thureau-Dangin und O. Neugebauer einen so schönen Einblick tun kann. Auch diese babylonische Sexagesimalrechnung war im wesentlichen eine reine, wenn sie auch noch manche Unvollkommenheiten aufwies, wie das Fehlen der Kennzeichnung des absoluten Stellenwertes und in den älteren Texten das Fehlen der Null. Auch waren die Produktentafeln noch nicht zu einer Tafel mit zwei Eingängen nach Art der islamischen Sechzigertafel zusammengeschlossen. Von dieser reinen babylonischen Sexagesimalrechnung besaßen die Griechen und die Inder, soweit unsere Kenntnisse reichen, nur Trümmer. Die griechischen Astronomen schrieben, wie

wir oben sahen, die Ganzen dekadisch und nur die Brüche sexagesimal. Die Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen, die wir bei Theon von Alexandrien vollzogen sehen, sind nicht rein sexagesimal durchgeführt. Die Sechzigertafel wurde nicht verwandt, und in den Sexagesimalstellen treten im Verlaufe der Rechnung dekadische Zahlen auf, die größer als 59 sind.

Es erhebt sich die Frage: War etwa die islamische reine Sexagesimalrechnung eine an die unreine Sexagesimalrechnung der Griechen anknüpfende Neuschöpfung der islamischen Mathematiker? Oder gehen von der babylonischen Mathematik aus auch Überlieferungen bis zur islamischen, die nicht über Alexandrien oder Indien laufen, sondern über Syrer und vorislamische Perser? Vieles spricht für die Richtigkeit der Vermutung, daß in der islamischen die babylonische Sexagesimalrechnung in dieser Weise weiterlebt, so der Umstand, daß auch bei der Algebra die Frage ähnlich liegt, so daß schon Hankel [1] (1839—1873) angesichts der Tatsache, daß der älteste uns überlieferte islamische Algebraiker al-Hwārizmī nach einer Tradition arbeitete und sich seine Algebra nicht restlos auf die griechische und die indische zurückführen läßt, keinen anderen Ausweg sah, als diese Tradition bei den Syrern und Persern vorauszusetzen. Wie viel mehr muß man, wie es auch z. B. Gandz tut, dieser Vermutung heute beistimmen, wo wir weiter zurückblicken können und bei den Babyloniern eine Algebra der quadratischen Gleichungen und eine reine Sexagesimalrechnung kennen!

In diesem Zusammenhange sei auch erwähnt, daß sich in einem für die Praxis des Geschäftsmanns und des Finanzbeamten abgefaßten Rechenbuch des oben erwähnten Abul-Wafā' für Zwecke der Bruchrechnung Tabellen wie die folgenden finden:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
30	20	15	12	10	6

$\frac{2}{3}$	40	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	45	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}$	24	$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$
...	...	...

2	30
3	20
4	15
...	...
7	$10\frac{1}{2}$
...	...

In der zweiten Tabelle durchläuft die Zahl der ersten Spalte alle echten, nicht kürzbaren Brüche mit den Nennern 3 bis 10, in der dritten von den Zahlen 2 bis 120 alle diejenigen, die keine anderen Primfaktoren als 2, 3, 5, 7 besitzen. Hier kann man nach dem historischen Zusammenhang mit den babylonischen Reziprokentafeln und den auch von den Griechen verwendeten ägyptischen Stammbruchsummen fragen. Wenn noch im 16. Jahrhundert der Astronom 'Abdallāf b. Ibrāhīm ad-Dīmāšqī neben anderen Tafeln für astronomische Rechnungen eine Tafel darbietet, in der den natürlichen Zahlen von 1 bis 60 in folgender Weise Bruchausdrücke gegenübergestellt sind:

$$1, 2, \dots, 7, \dots, 43, \dots, 51, \dots, 60 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10} + \frac{1}{5}, \dots, \frac{2}{3} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \dots, 1,$$

und noch später geschriebene Sechzigertafeln über den 60 Kopffzahlen dieselben Bruchausdrücke angeben, so sehen wir hier späte Ausstrahlungen der altbabylonischen Reziprokentafeln und der altägyptischen Stammbruchrechnung.

Zu welcher Vollkommenheit die Technik der reinen Sexagesimalrechnung gelangte, zeigen die Werke des Gamšīd b. Mas'ūd al-Kāfī, des bedeutendsten der Astronomen und Mathematiker, die im Anfang des 15. Jahrhunderts Ulug Beg, der Gelehrte auf einem Herrscherthron, in Samarkand um sich sammelte. Aus einem hinreichend genauen Wert von $\sin 3^\circ$ berechnete al-Kāfī

sexagesimal nach einem überaus gewandten Verfahren (vgl. Hankel [1], S. 289–293) den Wert

$$\sin 1^\circ = 0.1\ 2\ 49\ 43\ 11\ 14\ 44\ 16\ 26\ 17.$$

Der diesem Sexagesimalbruch entsprechende, von al-Kāšī nicht angegebene Dezimalbruch

$$\sin 1^\circ = 0.01745\ 24064\ 37283\ 51$$

ist in allen 17 Dezimalstellen richtig.

Al-Kāšī gab auch eine sexagesimale Berechnung der Zahl π in einer Genauigkeit, die alles bisher Dagewesene weit übertraf und im Abendlande, wo man nach al-Kāšīs Zeiten noch viel Falsches über Wesen und Wert der Zahl π vorgebracht hat, erst durch Ludolf van Ceulen (1540–1610) überboten wurde. Der Perser fand die in allen angegebenen Stellen richtige Sexagesimalzahl

$$2\pi = 6.16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50.$$

Die Verwandlung in eine Dezimalzahl ergibt

$$2\pi = 6.28318\ 53071\ 79586\ 5.$$

Zu dieser genauen Berechnung gelangt al-Kāšī, indem er nach einem elementargeometrischen Verfahren, das sich trigonometrisch als 28mal wiederholte Anwendung einer Halbwinkelformel deuten läßt, den Umfang eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks von $3 \cdot 2^{11} = 800\ 335\ 168$ Seiten und hieraus denjenigen eines eben-
solchen umschriebenen Vielecks ausrechnet. Vom gleich-
seitigen Dreieck ausgehend, erreicht er sein Ziel schritt-
weise unter fortwährender Verdoppelung der Seitenzahl. In den sehr übersichtlichen Tabellenrechnungen ist jede sexagesimale Quadratwurzelziehung durch Quadrierung des Ergebnisses kontrolliert. Anwendung der 59er Probe, die das Gegenstück der Neunerprobe des dekadischen Rechnens ist, begleitet einzelne Schritte der Rechnung. Durch Genauigkeitsbetrachtungen werden aus der ver-
langten Genauigkeit des Endergebnisses die für die Zwischen-
rechnungen erforderlichen Stellenzahlen bestimmt.

Die reine Sexagesimalrechnung fand Eingang ins Abend-
land. Um nur gedruckte Werke zu nennen, so begegnet uns die Sechzigertafel z. B. bei Orontius Finaeus (1494 bis 1555). Caspar Peucer kennt in seiner 1556 erschienenen »Logistica astronomica« die ganzen Sexagesimalzahlen *sexagesima prima, secunda* usw. und beschreibt ausführlich Einrichtung und Herstellung der Sechzigertafel. So rühmt auch John Chambers in seiner 1600 erschienenen Druck-
ausgabe der Logistik Barlaams die reine Sexagesimal-
rechnung und erklärt das Rechnen mit der Sechzigertafel für bedeutend bequemer als die Sexagesimalrechnungen Theons von Alexandria und Barlaams. Noch die Werke von John Wallis enthalten die Sechzigertafel. Und bis tief in die Neuzeit hinein, als das Abendland längst mit gedruckten Logarithmentafeln rechnete, sehen wir im Morgenland die Berechner der Gebetszeiten ihre sphärisch-
trigonometrischen Rechnungen sexagesimal mit Hilfe handgeschriebener Sechzigertafeln vollziehen.

Abgesehen von Fr. Woepcke (1826–64), dem be-
deutendsten Förderer unserer Kenntnisse über die isla-
mische Mathematik, der im Vorbeigehen bei Behandlung anderer Fragen die islamische reine Sexagesimalrechnung erwähnt, die er aus einer Schrift des Sibṭ al-Māridīni kennenlernte, haben die neueren Mathematikhistoriker dieser Rechnungsweise der Astronomen des Mittelalters kaum Beachtung geschenkt.

Nach dem Muster der Sexagesimalbrüche erfand das Abendland bekanntlich um 1600 die Dezimalbrüche, und vor allem war es der Flame Simon Stevin, der das Rechnen mit ihnen systematisch behandelte. Als er seine Schrift »De Thiende« verfaßte, ahnte er nicht, daß ihm etwa 160 Jahre früher al-Kāšī im fernen Samarqand zuvorgekommen war. In seinem vor 1427 erschienenen »Lehrbrief über den Kreisumfang« kommt dieser Perser nach Berechnung des oben angegebenen Sexagesimalbruchs für 2π auf den

Gedanken, das Ergebnis auch für Leute nutzbar zu machen, die nicht wie die Astronomen seiner Zeit mit Sexagesimal-
brüchen umgehen konnten. Und so verwandelt er diesen Sexagesimalbruch in den von uns oben angegebenen, im Positionssystem geschriebenen Dezimalbruch. Die Dezi-
malstellen bezeichnet er als »Zehntel«, »Dezimalssekunden«, »Dezimalterzien« usw. An Beispielen zeigt er, wie man im dekadischen Positionssystem zum gegebenen Durch-
messer eines Kreises dessen Umfang und zu einem ge-
gebenen Umfang den Durchmesser berechnen kann, und lehrt damit systematisch die Multiplikation und Division von Zahlen, die sich aus Ganzen und Dezimalbruchstellen zusammensetzen. In seinem 1427 erschienenen »Schlüssel des Rechnens« kommt er auf das Rechnen mit den Dezimal-
brüchen zurück, als deren Erfinder er sich betrachtet, und die er auch als solche (*al-kutūr al-aḥḍriyya*) bezeichnet. Er lehrt unter anderem systematisch die Verwandlung von ganzen und gebrochenen Sexagesimalzahlen in ganze de-
kadische Zahlen und Dezimalbrüche und die umgekehrte Verwandlung, und in geometrischen Aufgaben berechnet er gesuchte Strecken in dekadischen Ganzen mit Dezimal-
bruchstellen. Wie bei den Sexagesimalbrüchen, so macht er auch bei den Dezimalbrüchen von der abgekürzten Rechnung (Weglassung der Stellen unterhalb einer hin-
reichend niedrig gewählten) Gebrauch. Den Stellenwert der Ziffern kennzeichnet er in tabellarischen Rechnungen entsprechend seinem Verfahren in sexagesimalen Tabellen-
rechnungen meist dadurch, daß er die Benennung der Stelle (»Zehner«, »Einer«, »Zehntel«, »Dezimalssekunden« usw.) über die betreffende Spalte schreibt. Die Ganzen trennt er in diesen tabellarischen Rechnungen von den Bruchstellen oft durch einen längeren Strich, wobei er über die Stellen der Ganzen schreibt: »die Ganzen« und über die Dezimalbruchstellen: »die Brüche«. Gelegentlich sind auch die Ziffern der Ganzen schwarz und die Ziffern der Dezimalstellen rot geschrieben.

Bekanntlich finden wir z. B. bei an-Nasawī (um 1000) eine Quadratwurzel wie $\sqrt{25}$ genauer dadurch bestimmt, daß man z. B. $\frac{\sqrt{250000}}{100}$ näherungsweise ausrechnet, also tatsächlich zwei Dezimalbruchstellen bestimmt. Aber die Näherungslösung $\frac{259}{100}$ wurde dann nicht mit Dezimalbruch angegeben, sondern in Ganze mit Sexagesimalbruchstellen 5.5 24 durch sexagesimale Ausführung der Division $509 : 100$ umgerechnet.

Etwa 70 Jahre vor al-Kāšī finden wir bei Immanuel Bonfils aus Tarrascon den Gedanken der Dezimalbrüche klar ausgesprochen [2]. Auch Bonfils gibt Benennungen der Dezimalbruchstellen und Regeln zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes und des Quotienten zweier ganzer oder gebrochener Dezimalstellen aus den Stellen-
werten der Faktoren bzw. des Dividenten und Divisors. Aber aus den kurzen Ausführungen der vorliegenden he-
bräischen Handschrift ist nicht zu ersehen, ob Bonfils den Gedanken praktisch im Positionssystem durchgeführt hat. Bis auf weiteres müssen wir also den Perser al-Kāšī als den ersten ansehen, der das Rechnen mit Dezimalbrüchen nicht nur theoretisch begründet, sondern auch an Bei-
spielen mit im Positionssystem geschriebenen Zahlen prak-
tisch gelehrt hat. Die hebräischen Schriften des Bonfils werden al-Kāšī sicherlich nicht zu Gesicht gekommen sein.

Wenn wir den Begriff *Algebra* im Sinne des Elementar-
unterrichts dahin auslegen, daß damit das Rechnen mit allgemeinen, bekannten oder unbekannten Größen gemeint ist, die wir heute durch Buchstaben bezeichnen, und ferner die Auflösung von Gleichungen $g(x) = 0$, deren linke Seite ein Polynom $g(x) = a_0x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ist, so muß man sich zunächst vergegenwärtigen, mit welchen großen äußeren Schwierigkeiten die islamische Algebra zu kämpfen hatte, da sie an Stelle der Buchstaben-
symbolik eine schwerfällige Wortsymbolik besaß und mit Symbolen wie »Ding« für x , »Vermögen« für x^2 , »Quadrato-
kubus« für x^3 , »Zahl der Kuben« für den Koeffizienten a_3 eines Gliedes a_3x^3 arbeitete. Die elementaren Rechnungen

mit solchen allgemeinen Größen, z. B. die Ausrechnung eines Produktes wie $(a_0 - a_1 + a_2)(b_0 - b_1)$, wo in jeder der beiden algebraischen Summen auch negative Zeichen vorkommen konnten, wurden richtig vollzogen.

In al-Kāfī's «Schlüssel» finden wir Fachausdrücke für die Potenz a^n , ihre Basis a und ihren Exponenten n , wobei a eine als bekannt angenommene oder eine unbekannte und n eine natürliche Zahl ist. Al-Kāfī und andere vor ihm setzen aber auch die Folge der Potenzen nach der anderen Seite fort, indem sie, wie schon Diophant, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \dots$ bilden, also das, was wir heute als Potenzen mit negativen Exponenten $a^{-1}, a^{-2}, \dots$ definieren. Was aber wichtiger ist, al-Kāfī schaltet zwischen die «Kette des Aufsteigens» $a, a^2, a^3, \dots$ und die «Kette des Absteigens» $\dots, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}$ die 1 ein und faßt diese richtig als die Potenz von a mit dem Exponenten 0 auf. Er formuliert die Regeln für die Multiplikation und Division zweier Potenzen mit gleicher Basis für die Fälle, daß diese Potenzen beide der aufsteigenden oder beide der absteigenden Kette oder verschiedenen Ketten angehören. In seinen Regeln stecken die Formeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

für die Fälle, in denen m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder Null bedeuten. Für die Ausführung solcher Multiplikationen und Divisionen bietet al-Kāfī eine Tabelle mit zwei Eingängen dar, aus der man z. B. entnehmen kann, daß die Division des Quadrats a^2 durch die Reziproke des Kubus $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ den Quadratkubus a^5 ergibt. Diese Regeln der Potenzrechnung nimmt er nicht als sein geistiges Eigentum in Anspruch. Sie waren für den Sonderfall $a = 60$ schon in den Tabellen für den Stellenwert des Produktes und des Quotienten zweier Sexagesimalstellen enthalten, Tabellen, die uns seit Kūšār in den Lehrbüchern der reinen Sexagesimalrechnung begegnen. Wahrscheinlich wurden sie auch schon vor al-Kāfī für eine beliebige Basis formuliert. Wenn Bonifis diese Regeln auf die Basis 10 anwendet, so kann ich hierin nicht, wie Gandz es tut, einen Fortschritt in der Potenzrechnung sehen. Daß schon die griechische Mathematik solche Regeln in anderer Form besaß, ist bekannt, aber es kommt hier auf ihre algebraische Formulierung an. Es ist nicht richtig, daß, wie Tropke in seiner so wertvollen Geschichte der Elementarmathematik meint, der Potenzbegriff bis zum ausgehenden sechzehnten Jahrhundert auf die Unbekannte beschränkt blieb, und daß erst das Abendland den klaren Begriff des Exponenten geschaffen habe. Al-Kāfī entwickelt seine Potenzlehre im «Schlüssel» ausdrücklich für bekannte und für unbekannte Grundzahlen. Auch gibt er dort eine Rechenvorschrift, um allgemein aus der altertümlichen Bezeichnung, wie «Quadratoquadrato-kubus» den Exponenten, hier $2 + 2 + 3 = 7$, zu berechnen, und umgekehrt aus einem beliebigen ganzen positiven Exponenten die Bezeichnung der Potenz.

Was die Auflösung algebraischer Gleichungen betrifft, so sind die islamischen Algebraiker hinsichtlich der formalen Lösungen nicht über die quadratischen und solche Gleichungen höheren Grades hinausgekommen, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Es fehlte aber, wie wir noch sehen werden, nur ein kleiner Schritt bis zur Lösung kubischer Gleichungen durch die sogenannte Cardanische Formel. Dagegen wurden numerisch einzelne, nicht auf lauter Quadratwurzeln zurückführbare Gleichungen mit großer Genauigkeit gelöst. Wie noch heute in sehr vielen Fällen, so löste man auch im Mittelalter eine Gleichung

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wo $a_n, \dots, a_1, a_0$ gegebene Zahlen sind, in der Weise, daß man zunächst eine Näherungslösung $x = a$ etwa durch Probieren ansetzte. War dann $g(a) < g$, so wurde a durch Hinzufügung einer Korrektur b , die man sich ebenfalls

rein versuchsweise angenommen denken kann, die aber auch methodisch bestimmbar ist, derart verbessert, daß $g(a + b)$ dem Werte g näher kam, als $g(a)$. Dieses Verfahren wurde fortgesetzt und führte bei richtiger Handhabung zu einer beliebigen genauen Lösung der vorgelegten Gleichung. Wenden wir diese Methode zunächst auf die reinen Gleichungen $x^n = g$, also auf die Wurzelausziehungen an, so mußte man also ein Verfahren besitzen, um nach Ansetzen der ersten Näherungslösung a und der Korrektur b den Ausdruck

$$g(a + b) = (a + b)^n$$

auszurechnen.

Der hervorragende Astronom und Mathematiker 'Omar Hāyāmī, der 1123 starb, und von dem nicht ganz sicher ist, ob er auch der Dichter der unter seinem Namen gehenden, zwischen tiefinniger Mystik und frivolem Atheismus schwankenden persischen Vierzeiler ist, erklärt in seiner «Algebra», er habe in einer besonderen Schrift, die uns leider nicht erhalten ist, in Erweiterung der indischen Methoden der Quadrat- und Kubikwurzelziehung ein arithmetisches Verfahren zur Ausziehung von Wurzeln beliebigen Grades entwickelt. Da das indische wie das islamische Verfahren für Quadrat- und Kubikwurzeln ein Verfahren der sukzessiven Approximationen der vorhin gekennzeichneten, noch heute in unseren Schulen gelehrteten Art ist, so vermuteten unsere Mathematikhistoriker und nahmen es schließlich, wie Tropke, als sicher an, daß 'Omar den obigen Ausdruck $(a + b)^n$ für beliebige ganze positive Werte von n nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln konnte und auf diese Entwicklung seine Wurzelausziehungen gründete.

Hierbei übersah man, daß die Entwicklung einer Potenz $(a + b)^n$, ja allgemeiner einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades $g(a + b)$, nach Potenzen von b für eine beliebig gegebene natürliche Zahl n auch ohne Kenntnis des binomischen Lehrsatzes möglich ist, und zwar nach einem geschickten elementaren Verfahren aufeinanderfolgender Multiplikationen und Additionen, das unter dem Namen «Horner'sches Schema» bekannt ist, weil der Britte W. G. Horner es 1819 veröffentlichte. Schon 1804 hatte aber der Italiener P. Ruffini dasselbe Schema, das sich in der angewandten Mathematik als sehr vorteilhaft erweist, bekanntgegeben. Beide benutzten das Schema zur Auflösung algebraischer Gleichungen in der oben skizzierten Art der sukzessiven Approximationen. Nach dieser Ruffini-Horner'schen Methode lösten aber schon im Mittelalter die Chinesen algebraische Gleichungen von höherem als dem zweiten Grad. Nachdem im vorigen Jahrhundert in Europa das Vorkommen dieser Methode in der chinesischen Mathematik der Zeit um 1300 n. Chr. bekannt wurde, wies neuerdings (1940) der Japaner M. Fujiwara [3] Ansätze zu ihr in der chinesischen Mathematik einer noch früheren Zeit nach. Es wäre zu begrüßen, wenn die von Fujiwara in japanischer Sprache veröffentlichten Untersuchungen in einer abendländischen Sprache zugänglich gemacht würden. Berichte über sie findet man im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 66 (1940), S. 12–13, und im Zentralblatt für Mathematik 23 (1941), S. 195.

Um zu entscheiden, ob die islamischen Wurzelausziehungen nach dem Ruffini-Horner'schen Verfahren oder nach dem binomischen Lehrsatz vollzogen wurden, eignet sich die Untersuchung der Quadratwurzelausziehungen nicht, da hier die charakteristischen Unterschiede der beiden Methoden nicht genügend zutage treten. Soweit ich sehe, haben die abendländischen Mathematikhistoriker bisher nur in einem einzigen arabischen Rechenbuch die Ausziehung von Wurzeln höheren als zweiten Grades studiert, nämlich bei an-Nasawī (Anfang des 11. Jahrhunderts). Außer bei an-Nasawī untersuchte ich nun diesen Gegenstand bei folgenden vier Mathematikern: Kūšār b. Labbān (Ende des 10. Jahrhunderts), Aminsaddīn al-Abahri (starb 1333), Ibn al-Hā'im (starb 1412), al-Kāfī («Schlüssel des Rechnens» 1427). Al-Kāfī zieht Wurzeln beliebigen hohen

Grades aus, die vier älteren Autoren höchstens Kubikwurzeln. Die ältesten drei der fünf Gelehrten rechnen auf der Staubtafel nur nach dem Ruffini-Hornerischen Schema, das auf der Staubtafel in einer anderen äußeren Form erscheint, als beim modernen Rechnen mit der Feder. Al-Abahri teilt aber mit, daß die hierbei gebildeten Koeffizienten die Ausdrücke a^3 , $3a^2$, $3a$ sind. Ibn al-Hä'im stellt die Kubikwurzelziehung rein auf Grund der binomischen Formel für $(a+b)^3$ dar. Al-Kāšī, der mit der Feder rechnet, befolgt sowohl dekadisch als auch sexagesimal das Ruffini-Hornerische Verfahren, leitet aber zusätzlich aus dem Ruffini-Hornerischen Schema den binomischen Lehrsatz für beliebige ganze positive Exponenten n und das Pascalsche Dreieck der Koeffizienten ab, ohne diese Weiterführung als eigene Leistung in Anspruch zu nehmen [4]. Es ist also möglich, aber nicht sicher, daß schon 'Omar Hāyīm den binomischen Lehrsatz für beliebige natürliche Zahlen n als Exponenten besaß; bei al-Karāgī (Anfang des 11. Jahrhunderts) finde ich ihn für $n=3$ und $n=4$ in anderem Zusammenhang angewandt. Aber man gewinnt den Eindruck, daß das Ruffini-Hornerische Verfahren die ältere Methode ist, aus der der binomische Lehrsatz erst hervorgewuchs. Das Ruffini-Hornerische Verfahren ist hiermit erstmalig für die islamische Mathematik nachgewiesen. Der um die Erforschung dieses Gebietes hochverdiente H. Suter (1848—1922) bemerkte bei der Untersuchung der Kubikwurzelziehung an-Nasawis nicht, daß diese Methode hier vorliegt.

Ibn al-Hä'im gibt übrigens auch an, wie man Kubikwurzeln auf Grund der Zerlegung des Radikanden in Primfaktoren ausziehen kann, ferner auf Grund der Formeln für die Summen der Quadrate der aufeinanderfolgenden geraden und ungeraden Zahlen.

Die Vermutung liegt nahe, daß die islamischen Mathematiker wie die Chinesen das Ruffini-Hornerische Verfahren auch zur numerischen Lösung gemischter algebraischer Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade verwendeten. Nachgewiesen ist dies aber bisher nicht. Al-Bīrūnī gibt sehr genaue sexagesimale Lösungen der Gleichungen $1+3x = x^2$ und $x^2+1 = 3x$ an und sagt, diese Lösungen seien nur durch Probieren (*inirāḍ*) zu finden. Es kann bloß ein systematisches Näherungsverfahren gemeint sein. Leonardo Pisano (Anfang des 13. Jahrhunderts), der sein mathematisches Wissen islamischen Lehrern und Büchern verdankt, besitzt eine sehr genaue sexagesimale Lösung der Gleichung $x^2+2x+10x = 20$. Die schon erwähnte äußerst genaue sexagesimale Lösung einer kubischen Gleichung für $\sin 1^\circ$ durch al-Kāšī beruht auf einem vom Ruffini-Hornerischen Verfahren verschiedenen Iterationsverfahren.

Wie gliedern sich die mathematischen Leistungen der sogenannten Araber, die überwiegend islamische Perser waren, in die Gesamtgeschichte der mathematischen Wissenschaften ein, die sich über Jahrtausende erstreckt? Es will schon viel sagen, daß die islamischen Gelehrten, bei denen sich das mathematische Gut verschiedener Völker, der Griechen, der Inder und schließlich auch der Ägypter und Babylonier sammelte, diese Wissensschätze pflügten und an das Abendland weitergaben, das zunächst in dunkler Unwissenheit lebte. Aber sie haben dieses Gut auch beträchtlich vermehrt, und es ist nur zu bedauern, daß so manche ihrer Leistungen, wie z. B. diejenigen al-Kāšīs, dem Westen unbekannt blieben. Im Vergleich zu dem Gewaltigen, was später das Abendland auf diesem Gebiet leistete, mögen die astronomischen und mathematischen Fortschritte der islamischen Gelehrten freilich bescheiden erscheinen. Wichtig ist uns aber die Frage, mit welcher Seele sie die Geistesgüter aufnahmen, verarbeiteten und weiterbildeten. Drängen sie in die Tiefe griechischen mathematischen Denkens ein? In welchem Geist und in welcher Richtung vermehrten sie die griechischen Wissensschätze und diejenigen, welche ihnen aus dem Orient zufließen? Völligen sie eine Fusion?

Es verdient darauf hingewiesen zu werden, daß ein Mann wie al-Bīrūnī einen anderen Gelehrten zur Ab-

fassung einer uns leider nicht erhaltenen Schrift über die Frage anregte, ob die Erde ruhe oder sich bewege, und daß verschiedene Mathematiker sich um den Beweis des Euklidischen Parallelenpostulates bemühten. Die islamischen Astronomen, an ihrer Spitze Abul-Wafā', schufen erst die eigentliche sphärische Trigonometrie, indem sie an die Stelle der griechischen Rechnungen mit den Sehnen von Bögen des vollständigen sphärischen Vierecks solche mit den Sinussen von Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks setzten.

Die klassische griechische Mathematik bietet einen großen Teil der mathematischen Wahrheiten in geometrischer Form dar, so z. B. die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Erst bei einem Heron und einem Diophant begegnen uns die entsprechenden rechnerischen Lösungen. Es ist eine wesentliche Leistung der islamischen Mathematiker und kennzeichnend für den Geist, in dem sie Mathematik trieben, daß sie die Arithmetisierung und Algebraisierung der Mathematik, die Abstreifung des geometrischen Gewandes, auf ihre Fahne schrieben. Hier liegt ein Prozeß vor, der sich durch Mittelalter und Neuzeit hinzieht und auch jetzt noch nicht zum Abschluß gekommen ist, besonders wenn wir an seine Fortsetzung durch symbolisch-rechnerische Behandlung geometrischer Beziehungen und an den Logikkalkül denken. Aufgaben, die von den Griechen geometrisch formuliert und gelöst wurden, wie die Zehnteilung des Kreises, die Teilung des Kugelinhalts durch eine Ebene nach einem vorgeschriebenen Verhältnis und die Dreiteilung eines gegebenen Winkels brachten die Fortgeschrittensten unter den islamischen Mathematikern auf die Form algebraischer Gleichungen, und diese Gleichungen lösten sie numerisch.

Wie schon oben angedeutet wurde, tritt in der ältesten arabischen Algebra eine Tradition zutage, die keineswegs allein und direkt an die Griechen und Inder anknüpft. Noch Tābit b. Qurra, der 901 starb, stellt die rechnenden »Algebraisten«, die ersichtlich jene alte, bei al-Hwārizmī in Erscheinung tretende Tradition weiterführen, denjenigen gegenüber, die das Bedürfnis nach geometrischen Beweisen auf Grund der Euklidischen Elemente haben [5]. Er selbst rechnet sich zu der letzteren Gruppe. Jene Tradition der »Algebraisten« muß zuletzt auch auf die babylonische Mathematik zurückgehen, ebenso wie die islamische reine Sexagesimalrechnung. Es ist das Verdienst der islamischen Mathematiker, diese orientalische, arithmetisch-algebraische Komponente in der Mathematik zur Entfaltung und zur Vorherrschaft gebracht zu haben. Um kein einseitiges Bild zu entwerfen, erinnern wir daran, daß auch in der griechischen Mathematik und Philosophie die reine Zahl eine maßgebende Rolle spielt, und daß auch neupythagoreische und neuplatonische Zahlentheorie und Zahlenphilosophie auf die islamische Mathematik einwirkten. Die Frage, warum sich die klassische griechische Mathematik so geometrisch gibt, kann hier nicht erörtert werden.

Während noch bei Tābit die Auflösungsformeln der quadratischen Gleichungen erst durch Zurückführung auf euklidische geometrische Lehrsätze sozusagen ihre Weihe und Seinsberechtigung erhalten, beweist der im Anfang des 11. Jahrhunderts lebende al-Karāgī in einer besonderen Schrift: »Die Gründe des Rechnens der Algebra, ihre Erklärung und der Beweis dazu« dieselben Auflösungsformeln rein algebraisch. Dieser al-Karāgī, den man in unseren mathematikhistorischen Werken infolge falscher Lesung als »al-Karhī« bezeichnet findet, hat aber auch in einer großen, bisher unbeachteten Schrift, auf die Levi Della Vida aufmerksam machte [6], und die den Titel »Das Wunderbare über das Rechnen« führt, bewußt den umfassenden Versuch unternommen, größere Teile der Mathematik rein arithmetisch-algebraisch zu behandeln. Durch Zahl und Rechnung, ohne die Anschauung geometrischer Figuren, soll das Ziel erreicht werden.

Ein wichtiger Abschnitt in diesem Werk ist die rein arithmetisch-algebraische Darstellung der griechischen Irrationalenlehre, die Euklid im 10. Buch der Elemente in

geometrischen Gewande aufbaut. Al-Karāǧī's Behandlung spiegelt im Ausdruck der Formel

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{A - \frac{V(A^2-B^2)}{2}} = \sqrt{A - \frac{V(A^2-B^2)}{2}},$$

in der A und B Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen bedeuten. Diese Formel, in der nach einem mit einem Körnchen Salz zu nehmenden Ausspruch von Chasles die ganze Irrationalenlehre des zehnten Buchs der Elemente beschlossen ist, hat man bisher bei den Indern erst mehr als ein Jahrhundert nach al-Karāǧī nachgewiesen. Darüber hinausgehend sprengt aber dieser Perter den engen Rahmen der griechischen, nur die Quadratwurzeln und die aus solchen zusammengesetzten Ausdrücke umfassenden Irrationalenlehre, indem er Wurzeln beliebigen Grades und aus solchen zusammengesetzte Ausdrücke in den Bereich der Irrationalen aufnimmt. Er fordert den Leser wiederholt auf, selbst zusammengesetzte Irrationalen dieser Art zu bilden. Gelegentlich beobachten wir auch, wie er zu einer angesetzten Irrationalen die algebraische Gleichung aufsucht, der sie genügt. Hätte al-Karāǧī Nachfolger gefunden, die in diesem Geiste weitergearbeitet hätten, so hätte leicht einer auf den Gedanken kommen können, in der rechten Seite der soeben mitgeteilten Formel die beiden großen Quadratwurzeln durch Kubikwurzeln zu ersetzen. Dann hätte sich ein Ausdruck ergeben, der wesentlich mit der sogenannten Cardanischen Formel übereinstimmt, und durch Umrechnungen, die schon al-Karāǧī beherrschte, wie die Ausrechnung von $(a+b)^3$, hätte sich gezeigt, daß der Ausdruck die Lösung einer kubischen Gleichung ist. Erst die Italiener, die an die islamischen Algebraiker, und über Leonardo Pisano besonders auch an al-Karāǧī anknüpften, erkannten dies.

Für einen ganz wichtigen Punkt, in dem die Griechen erstmalig Unvergleichliches geleistet haben, zeigt al-Karāǧī kein Verständnis, und ebensowenig die meisten übrigen islamischen Mathematiker. Es ist die Rechenschaftsableitung über den Begriff des Irrationalen, die bei den Griechen in der grundlegenden Unterscheidung der »Zahl« von der »Größe« ihren Ausdruck fand. Der moderne Mathematiker muß bei einer Behandlung der Irrationalen als »Zahl« eine Definition der Irrationalzahl und den Beweis dafür ver-

langen, daß man mit ihr wie mit den rationalen Zahlen rechnen kann. Das fehlt bei al-Karāǧī, ja er gebraucht die von Euklid so sorgfältig voneinander geschiedenen Ausdrücke »Zahl« und »Größe« wild durcheinander. Erst der Neuzeit war es vorbehalten, im Geiste der griechischen Feinheit neue Formulierungen für die Grundlegung des Irrationalen zu finden.

Auch die Behandlung der quadratischen diophantischen Gleichungen, die al-Karāǧī über seine Darstellung dieses Gegenstandes in dem vorher verfaßten »Fāhri« hinausführt, ist weit entfernt von der tiefen Erfassung, die dieser Gegenstand bei den Indern und in der Neuzeit fand.

In anderen Punkten aber finden wir wieder bei ihm einen weiten Blick. So versucht er die Quadratwurzelausziehung aus Polynomen, die Quadrate von anderen Polynomen sind, nach dem Muster der Quadratwurzelausziehung aus ganzen Quadratzahlen auszubilden und hat dabei hinsichtlich der Polynome mit lauter positiven Koeffizienten einen vollen Erfolg, während er bei Polynomen mit teilweise negativen Gliedern noch sehr schwerfällig vorgeht, weil er nicht zum vollen Begriff der negativen Zahl durchgedrungen ist. Bemerkenswert ist auch, daß er in einer ganzen rationalen Funktion von x dieses x (»Zahl« = »Ding«) nicht nur als Unbekannte einer Gleichung, sondern auch als Variable auffaßt, insofern er darlegt, daß diese Funktion für verschiedene Werte von x verschiedene Werte annimmt. Wiederholt begegnet uns der mehr oder weniger geglückte Versuch, Klasseneinteilungen vorzunehmen, so bei seinen Irrationalen.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Hankel: Zur Geschichte der Mathematik. Leipzig 1874.
- [2] S. Gendzi: The invention of the decimal fractions and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonaldi of Tarascon (c. 1250). *Isis* 25 (1936), 16—45.
- [3] Tōshoku Math. J. 46 (1940), 295—308; 47 (1940), 35—48.
- [4] P. Luckey: Die Ausziehung der n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik. *Math. Ann.* 120 (1948), 217—274.
- [5] P. Luckey: Tablī b. Qurā über den geometrischen Rückgriffsansatz bei der Auflösung der quadratischen Gleichungen. *Ber. d. Math.-Phys. Kl. d. Sächs. Ak. d. Wiss. z. Leipzig*, 93 (1941), 93—114.
- [6] G. Levi Della Vida: Appunti e quesiti di storia letteraria araba. *Rivista degli Studi Orientali* 14 (1934), 249—253.
- P. Luckey: Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik. Erscheint demnächst in: *Orientalia* 17 (Rom 1948) oder im darauf folgenden Jahrgang.

Die Rechenkunst bei Ġamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī

mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens

von

PAUL LUCKEY †



DEUTSCHE MORGENLÄNDISCHE GESELLSCHAFT

KOMMISSIONSVERLAG FRANZ STEINER GMBH.
WIESBADEN 1951

Vorwort des Herausgebers

Die vorliegende Untersuchung von Herrn Dr. P. Luckey über al-Kāṣī's Miftāḥ al-ḥisāb war schon im Jahre 1944 abgeschlossen. Die letzten Kriegsmonate und ersten Nachkriegsjahre boten jedoch keine Möglichkeiten, die Arbeit zu veröffentlichen. So konnte erst nach Neugründung der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft daran gedacht werden, das Versäumte nachzuholen. Leider ist der Verfasser am 21. Juli 1949 aus dem Leben geschieden, so daß mir die Aufgabe übertragen wurde, die Arbeit zum Druck zu bringen. Nur an wenigen Stellen ist eine Änderung vorgenommen worden, die der Dahingegangene sicherlich auch vorgenommen hätte. Den arabischen Originaltext des Instituts für die Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften zu Berlin habe ich noch einmal einsehen können. Aus ihm ist auch die Druckprobe hergestellt worden, die im Anhang beigegeben ist und Blatt 10b wiedergibt. Eine Textausgabe hatte Herr Dr. Luckey nicht geplant.

An diese Arbeit wird sich eine andere hinterlassene Untersuchung anschließen, die Schrift Muḥīṭ ad-dā'ira des al-Kāṣī, zuletzt noch eine Studie über den persischen Mathematiker al-Karāǧī (früher al-Karḥī benannt). Wie die vorliegende werden auch die beiden anderen angekündigten Untersuchungen das reichhaltige Wissen des Dahingegangenen auf dem Gebiete der muslimischen Mathematik und seine großen Verdienste um die Aufdeckung bisher unerschlossener Gebiete derselben erneut zeigen und uns klar werden lassen, welchen unersetzlichen Verlust die Forschung in Mathematikgeschichte durch seinen Tod erlitten hat. Ein Nachruf in der ZDMG soll seine Lebensarbeit würdigen.

Bei der Lesung der Korrektur hat mich Herr Prof. Dr. Krafft, Marburg, besonders nach der mathematischen Seite hin unterstützt, wofür ich ihm meinen besten Dank ausspreche.

Alfred Siggel

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Darstellung will den Leser mit Ġamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī als Rechner bekannt machen. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit gibt sie vor allem einen Einblick in seinen im Jahre 1427 abgeschlossenen „Schlüssel der Rechner“, eines der vielen Rechenbücher des islamischen Mittelalters, die noch so wenig durchforscht sind. Ausführlich behandelt sie dabei al-Kāšī's Rechnen mit Sexagesimalzahlen und Dezimalbrüchen. Seine von Vorgängern übernommene Sexagesimalrechnung ist rein, wie es die babylonische war, nicht aber, soweit sie uns bekannt ist, die griechische. Ebenso folgerichtig ist das von ihm nach dem Vorbild des Rechnens mit Sexagesimalzahlen eingeführte Rechnen mit Dezimalzahlen. Er betrachtet sich als Erfinder der Dezimalbrüche und steht als solcher in der islamischen Welt nach unseren bisherigen Kenntnissen einzig da.

Die Frage, ob eine ununterbrochene Überlieferung von der reinen babylonischen Sexagesimalrechnung zur reinen Sexagesimalrechnung des Mittelalters führt, die dann das Vorbild zu den wiederholten Erfindungen der Dezimalbrüche gab, schien mir wichtig genug, um zunächst einmal der reinen Sexagesimalrechnung bei islamischen Rechnern nachzugehen.

Im Zusammenhang mit al-Kāšī's Rechnen mit reinen, ganzen und gebrochenen Sexagesimal- und Dezimalzahlen stehen seine Regeln für die Multiplikation und Division von Potenzen mit ganzen Exponenten. Diese Regeln nimmt er nicht als eigene Erfindung in Anspruch, auch nicht hinsichtlich der Potenzen mit negativen Exponenten, auf die — in einer von der unsrigen abweichenden Ausdrucksweise — die Regeln ausgedehnt sind. Eine so ausdrückliche Einführung des Exponenten Null wie bei ihm habe ich aber bei anderen islamischen Mathematikern bisher nicht gefunden.

Arbeitsweise und Rechentechnik des Autors suche ich so zu kennzeichnen, daß zugleich die von mir vorbereitete Übersetzung seines Lehrbriefs über den Kreisumfang und die ebenfalls vorbereitete Darstellung seiner Berechnung von $\sin 1^\circ$ aus $\sin 3^\circ$ leicht verständlich werde.

Die Zeitumstände versagten es, in solchem Umfange Handschriften heranzuziehen, wie ich es gewünscht hätte. Ich konnte aber aus denjenigen Werken al-Kāšī's schöpfen, die den reifen Niederschlag seiner Rechenkunst enthalten. Das Studium seiner Hāqānischen Tafeln wird später vielleicht einen Blick in den Werdegang seiner Methoden eröffnen. Aus Schriften seiner Vorgänger und Nachfolger glaube ich Bemerkenswertes herausgegriffen zu haben. Der Inhalt des Rechenbuches von Kūšyār b. Labbān (um 1000 n. Chr.) wird hier erstmalig erschlossen. So sehr ich bedaure, manche Lücke in unseren Kenntnissen noch nicht aus-

füllen zu können, erschien es mir doch schon jetzt gerechtfertigt, diese neuen kleinen Breschen in die Geschichte des islamischen Rechnens zu schlagen, die seit Suters und Schoys Arbeiten kaum mehr in Angriff genommen wurde. Solange noch nicht Textausgaben der zum Teil umfangreichen Werke in größerer Zahl gemacht werden können, halte ich eine zergliedernde und vergleichende Berichterstattung über ihren Inhalt, wie ich sie hier in einer gewissen Ausführlichkeit versuche, für nützlich. Auch daß nicht immer mehrere und die besten Handschriften eines Werks zugänglich waren, ist für diese erste Erschließung nicht erheblich.

Da sich die vorliegende Arbeit Leser sowohl unter den Freunden der Elementarmathematik und ihrer Geschichte wünscht, wie unter denjenigen, die in weiterem Sinne an der Kulturgeschichte, insbesondere der des Morgenlandes, Anteil nehmen, so wolle der Mathematiker sich nicht daran stoßen, wenn ich Mathematisches umständlicher verdeutliche, als es ihm angenehm ist, noch der Orientalist, daß ich einiges ihm Geläufige auseinandersetze.

Das Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften in Berlin ließ mir mehrere Handschriften und Kopien von Handschriften auf längere Zeit ins Haus, insbesondere eine Handschrift des „Schlüssel“ von al-Kāṣī und eine solche der „Feinheiten“ von Sibṭ al-Māridīnī. Von letzterem Werk durfte ich ferner eine Handschrift der Herzoglichen Bibliothek in Gotha in der Universitätsbibliothek in Tübingen benutzen. Lichtbilder von Handschriften verdanke ich den Handschriftenabteilungen der Pr. Staatsbibliothek in Berlin, der Bibliothek der Rijks-Universiteit in Leiden, der Société des Amis de la Bibliothèque Nationale in Paris und der Bibliothek der Aya Sofya in Istanbul. Für freundliche und wertvolle Hilfe in Einzelfragen, Auskünfte und Unterstützung bei Beschaffung von Schriften danke ich den Herren Konservator C. van Arendonk in Leiden, Prof. J. E. Hofmann in Berlin, Prof. M. Krafft in Marburg, Prof. E. Littmann in Tübingen, Prof. J. Ruska in Berlin, Pfarrer N. Schüle in Gönningen, Dr. habil. W. Wischedel, z. Z. in Paris, Bibliotheksrat M. Weisweiler in Berlin.

Mein besonderer Dank gebührt den Herren Prof. B. L. van der Waerden in Leipzig und Dr. Suleyman Sencer in Ankara. Im Jahre 1943, nachdem andere Bemühungen um Handschriftenkopien fehlgeschlagen waren, verschafften sie mir aus Istanbul unter gütiger Genehmigung und Mitwirkung des Türkischen Unterrichtsministeriums Lichtbilder des Rechenbuchs von Kūṣyār. Ebensolchen Dank schulde ich der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig, die mich in meiner Arbeit dadurch unterstützte und ermutigte, daß sie mir die Mittel zur Beschaffung von Handschriftenkopien zur Verfügung stellte. In gleicher Weise bin ich allen den Stellen verpflichtet, die unter schwierigen Verhältnissen das Erscheinen dieser Schrift ermöglichten.

Gönningen (Württ.) und Tübingen, im Februar 1944.

Paul Luckey

Inhalt

	Seite
Vorwort des Herausgebers	V
Vorwort des Verfassers	VII
Abkürzungen	X
1. Einleitung	1
2. Al-Kāšī's Leben und Werke. Die Vorrede des „Schlüssel“	4
3. Das Rechnen mit ganzen Zahlen	18
4. Die Bruchrechnung	27
5. Das Rechnen mit Sexagesimalzahlen	37
6. Das Rechnen mit Exponenten und mit den Kennzahlen der Sexagesimalstellen	54
7. Die reine Sexagesimalrechnung bei anderen islamischen Mathematikern	64
8. Die Frage nach dem Ursprung der islamischen Sexagesimalrechnung	90
9. Die Dezimalbrüche	102
10. Verwandlungen von sexagesimalen Zahlen und Brüchen in dezimale und umgekehrt	115
11. Die Dezimalbrüche bei Immanuel Bonfils	120
12. Anhang. Urtexte der aus Handschriften übersetzten Stellen	127

Abkürzungen

- Bibl. Math. (2) = Bibliotheca Mathematica, Zeitschr. für Geschichte der Mathematik, hrsgg. v. G. Eneström. Neue Folge 1—13. Berlin, Stockholm, Paris 1887—1899.
- Bibl. Math. (3) = Bibliotheca Mathematica, Zeitschr. für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, hrsgg. v. G. Eneström. Dritte Folge 1—14. Leipzig 1900—1914.
- E. I. = Enzyklopaedie des Islam. I—IV u. Ergänzungsband. Leiden und Leipzig 1913—1938.
- Quell. Stud. Math. = Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (Astronomie u. Physik), hrsgg. v. O. Neugebauer u. O. Toeplitz. A = Quellen, B = Studien. Berlin 1931—1938.
- Quell. Stud. Nat. = Quellen und Studien zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, red. v. P. Diepgen u. J. Ruska. Berlin.
- Brockelmann = C. Brockelmann, Geschichte der arabischen Literatur. I¹ Weimar 1898, II¹ Berlin 1902, Supplementband I Leiden 1937, Suppl. II Leiden 1938, Suppl. III Leiden 1942, I² Leiden 1943.
- K. = al-Kāšī.
- Krause = M. Krause, Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker. Quell. Stud. Math. B 3 (1936), S. 437—532.
- Suter = H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Abh. z. Gesch. d. math. Wiss. 10 (1900). Nachträge 14 (1902), S. 157—185.
- Tropfke = J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. I² (1930), II² (1933), III² (1937), IV² (1940), V² (1923), VI² (1924), VII² (1924). Berlin und Leipzig.
- Was in übersetzten Stellen in Klammern gesetzt ist, dient zur Ergänzung oder Erläuterung.
- Die Zeichen a), b) usw. verweisen auf den Anhang (S. 127—142).
- Abkürzungen des Anhangs s. S. 127.

1. Einleitung

In seinem Buch „Zur Geschichte der Mathematik“¹ beschreibt der Tübinger Mathematiker H. Hankel (1839—73), wie ein islamischer Astronom und Mathematiker des 15. Jahrhunderts mit großer Genauigkeit $\sin 1^\circ$ aus $\sin 3^\circ$ dadurch fand, daß er die maßgebende kubische Gleichung aufstellte und nach einem geschickten Näherungsverfahren löste.

„Diese schöne Methode der Auflösung numerischer Gleichungen“, sagt Hankel (S. 202), „steht allen seit Viète im Occidente erfundenen Approximationsmethoden an Feinheit und Eleganz nicht nach. Abgesehen von der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung, mit der sie im Prinzip eine Ähnlichkeit hat, ist sie die erste Methode successiver numerischer Approximation, die wir in der Geschichte der Mathematik antreffen; sie zeigt eine tiefe Einsicht in das Wesen solcher Annäherungen, die um so mehr Bewunderung erregt, da wir sonst die numerischen Rechnungen von den Arabern mit vielem Fleiß, aber meist mit wenig Umsicht angestellt sehen. Wir dürfen wohl diese Methode das Originellste und Bedeutendste nennen, was uns die gesamte Literatur der Araber bietet.“

Der Verkünder der so gerühmten Methode war ein Perser, der in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts dem Gelehrtenkreis des Ulug Beg angehörte. Er nennt sich selbst in seinen Werken *Ġamšīd b. Mas'ūd b. Maḥmūd, der Arzt, al-Kāšī*, zubenannt *Ġiyāṭ(addin)* (d. h. Hilfe der Religion). *Al-Kāšī*, oder *al-Kāšānī*, heißt: der Kāšāner. Im folgenden nennen wir ihn kurz bei diesem seinem Heimatnamen, den wir abgekürzt K. schreiben². Hankels Untersuchung stützt sich auf die Darstellung, die Mīram Ōlebi in seinem 1498 verfaßten Kommentar zu den astronomischen Tafeln des Ulug Beg von dem Näherungsverfahren gab³. Im Dunkeln über Person und Werk K.'s, vermutet Hankel wenig Eigenes in der Leistung dieses Vertreters der letzten Nachblüte islamischer exakter Wissenschaft. G. Schoy⁴ wollte der Sache auf Grund einer Kairoer Handschrift nachgehen. Aber ihn raffte der Tod vorzeitig dahin.

¹ H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik. Leipzig 1874. S. 289 bis 293

² Man verwechsle ihn nicht mit Yahyā b. Aḥmad al-Kāšī (Krause S. 517). In alphabetischen Verzeichnissen wird man K. unter *Ġamšīd* (*Djamshīd*) oder *Ġiyāṭaddin* oder *al-Kāšī* (*al-Kāšānī*) suchen müssen.

³ E. A. Sédillot, *Prolegomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg*. Traduction et commentaire. Paris 1853. S. 77—83.

⁴ C. Schoy, Beiträge zur arabischen Trigonometrie. Isis 5 (1923). S. 364—399. S. S. 386—389.

1 Luckey, Rechenkunst.

Zwar hatte schon Woepeke aus dem Werk K.'s über das Rechnen einen Teil des Vorworts und Formeln für die Summen von Potenzen der natürlichen Zahlen und für die Summe einer geometrischen Folge ins Französische übersetzt⁵, aber sonst blieben die Leistungen des K., abgesehen von seinem Anteil an den Tafeln des Ulug Beg, soweit ich bisher sehe, den abendländischen Mathematikern alter und neuer Zeit fast unbekannt⁶. Das ist zu bedauern. Denn nach den Einblicken, die ich bisher in einen Teil seiner Werke nehmen konnte, von denen uns zum Glück das meiste in Bibliotheken des Abend- und Morgenlandes erhalten ist⁷, erscheint mir K. als ein einsichtiger, gründlicher, erfinderischer, kritischer und im Schrifttum der Vorgänger bewandelter Mathematiker, dessen besondere Stärke im Zahlenrechnen und in der Handhabung von Näherungsmethoden liegt. Wäre sein Lehrbrief über die Berechnung des Kreisumfangs seinen Zeitgenossen im Abendland bekannt geworden, so hätte sich dieses Abendland in der Folgezeit einige beschämende Leistungen und Erörterungen auf dem Gebiet der Kreisberechnung ersparen können. Hätte seine klare theoretische und praktische Einführung der Dezimalbrüche Verbreitung gefunden, so wäre es nicht nötig gewesen, daß anderthalb Jahrhunderte später Männer wie Vieta, Stevin und Bürgi ihren Verstand und ihre Arbeitskraft auf die Neuerfindung der Dezimalbrüche richteten.

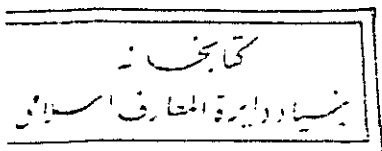
Gewissenhaft kennzeichnet K. in seinen Werken das, was er als sein geistiges Eigentum in Anspruch nimmt. Aber auch das Studium dessen, was er von Vorgängern übernahm, lohnt die Mühe, weil es uns neue Einblicke in die bisher noch so wenig erschlossene Geschichte der islamischen Mathematik und Astronomie tun läßt. Leider nennt K. seine Vorgänger meistens nicht.

K. erweist sich in seinen Schriften bei guter Darstellungsgabe als geschickter und disziplinierter Rechner. Seine Stärke liegt in der übersichtlichen Anordnung der Rechnungen, die er mit Vorliebe in Tabellenform darbietet. Obwohl er den Rechnungen höchste Genauigkeit geben kann, weiß er auch abgekürzte Methoden überall da sinnvoll zu handhaben, wo beschränkte Genauigkeit angezeigt ist. In seinem Lehrbuch des Rechnens erläutert er alles an ausgeführten Zahlenbeispielen. Be-

⁵ F. Woepeke, *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes*. *Annali di Matematica pura ed appl.* pubbl. da B. Tortolini 6 (1864), S. 225—248. S. S. 245—248.

⁶ D. E. Smith macht in *History of Mathematics* (I, 1923, S. 289, 290; II, 1925, S. 238—240, 310, 505) kurze, nicht überall richtige Angaben, die außer auf J. Taylor (*Lilawati*, Bombay 1816), Sédillot, Woepeke und Hankel mit deren Nachfolgern nur auf Mitteilungen von Professor Salih Mourad von Konstantinopel zurückzugehen scheinen. Auch Tropicke benutzt in seinen knappen Angaben (I² S. 175, III² S. 130, V² S. 175—176, VI² S. 29) außer einer brieflichen Mitteilung von C. Schoy keine neuen Quellen.

⁷ Vgl. Brockelmann, II¹ S. 211, Suppl. II, S. 295.



weise bringt er nicht, doch zeigen sowohl seine Verbesserungen hergebrachter Verfahren, wie seine Erfindung neuer, daß er mit innerem Verständnis arbeitet.

Die wichtigste Quelle für die hier versuchte Darstellung von K.'s Rechenmethoden ist sein Werk über das Rechnen und aus ihm wieder die drei ersten Bücher. In zweiter Linie zog ich seinen Lehrbrief über den Kreisumfang heran.

Dem Werk über das Rechnen gibt K. selbst im Vorwort einen Titel (مفتاح الحساب), der entweder „Schlüssel der Rechner“ (*miṭṭāḥ al-ḥissāb*) oder „Schlüssel des Rechnens“ (*miṭṭāḥ al-ḥisāb*) bedeutet. Man findet den Titel auch in der Form „Schlüssel der Rechner über die Wissenschaft des Rechnens“ und ähnlichen Fassungen angegeben. Am Ende einer der beiden in der Preussischen Staatsbibliothek aufbewahrten Handschriften (*Spr. 1824 bis*)⁸ des Werks, das ich im folgenden kurz „Schlüssel“ nenne⁹, wird als Zeit der Abfassung der Monat Ġumādā I des Jahres 830 d. H. genannt, der sich ziemlich mit dem März 1427 deckt.

Für den „Schlüssel“, der uns in einer Anzahl von Handschriften erhalten ist, benutzte ich die Handschrift, die aus dem Nachlaß von C. Schoy in die Bibliothek des Instituts für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften übergegangen ist¹⁰. Aus den beschädigten Schlusszeilen der Handschrift geht hervor, daß sie Ende Ġumādā I des Jahres 1055 d. H., d. i. im Juli 1645, abgeschlossen wurde. Titel und Anfang des Vorworts fehlen in dieser Handschrift. Vor allem aber fehlt ein beträchtlicher Teil der wichtigsten Lehrdarbietungen des Zahlenrechnens. Sie bricht nämlich S. 6b innerhalb des dritten Kapitels des ersten Buches bei der Multiplikation der ganzen Zahlen ab und beginnt S. 7a innerhalb des vierten Kapitels des dritten Buches bei der Multiplikation der Sexagesimalzahlen. Es fehlt also insbesondere das ganze zweite Buch, das von der Bruchrechnung handelt.

Ferner standen mir für das Vorwort und die drei ersten Bücher Photokopien der Leidener Handschrift 185 *Gol.*¹¹ zur Verfügung. Wie mir Herr van Arendonk in Leiden freundlichst mitteilte, ist diese Handschrift im Jahre 965 d. H., d. i. 1557—58, zu Qazwīn geschrieben worden. Für das Vorwort hatte ich noch eine Photokopie nach der Pariser arabischen Handschrift 5020¹², die nach Angabe des Katalogs auf das Jahr

⁸ W. Ahlwardt, Verzeichnis der arabischen Handschriften der Kgl. Bibliothek zu Berlin 5, Berlin 1893. S. 342—344 Nr. 5992.

⁹ Ein Hinweis wie IV, 2a bedeutet: Buch 4, Kapitel 2, Abschnitt e des „Schlüssel“.

¹⁰ Handschriftenkatalog dieses Instituts, Quell. Stud. Nat. 7 (1939), S. 160—161, Nr. I, 2.

¹¹ Catalogus codicum orientalium Bibl. Acad. Lugduno Batavae auct. P. de Jong et M. J. de Goeje III, Leiden 1865, S. 75—76, Nr. 1336.

¹² Bibliothèque Nationale, Catalogue des manusc. ar. des nouv. acquis. (1884—1924) par E. Blochet. Paris 1925, S. 48 Nr. 5020.

983 d. H., d. i. 1575—76, datiert ist. De Goeje gibt im Leidener Katalog¹¹ (V, 1873, S. 237—38) einen Teil des Vorworts wieder, Ahlwardt im Berliner Katalog² das Inhaltsverzeichnis.

Für den „Lehrbrief über den Kreisumfang“ (*ar-risāla al-muḥīṭiya*) benutze ich eine Photokopie der Photographie *Mss. simul. or. 60* der Preussischen Staatsbibliothek. Dies ist eine 1933 erworbene Aufnahme einer Handschrift des Armeemuseums in Istanbul¹². Nach dem Urteil von Herrn Weisweiler in Berlin dürfte die Handschrift dem 10. oder vielleicht noch eher dem 11. Jahrhundert der Hīġra, d. h. dem 16. oder 17. Jahrhundert n. Chr. angehören.

2. Al-Kāšī's Leben und Werke. Die Vorrede des „Schlüssel“

Über die Person und das Leben K.'s haben wir bisher nur spärliche Nachrichten. Sein Heimatname, in einigen Handschriften *al-Kāšī*, in anderen *al-Kāšānī* geschrieben, weist auf die alte persische Stadt Kāšān im Irāq 'Aġamī, dem alten Medien, etwa 150 km nördlich Isfāhān.

In der Stadt Samarqand mit ihren paradiesischen Gärten hielt als Herrscher von Westturkestan (Transoxanien) Ulūġ Beg¹⁴ (1393—1449) Hof, der Enkel des großen Eroberers Tīmūr (Tamerlan). Neben vielen Prachtbauten errichtete er, der Gelehrte auf einem islamischen Herrscherthron, dort die Sternwarte, von der die Ausgrabungen in unserer Zeit die Überreste eines riesigen Quadranten zu Tage gefördert haben. In der Vorrede der unter Ulūġ Beg's eigenem Namen gehenden astronomischen Tafeln¹⁵, die wahrscheinlich 1437 fertiggestellt, endgültig aber erst in seinem Todesjahr 1449 abgeschlossen wurden, nennt dieser Fürst als diejenigen, welche zuerst die für das Tafelwerk erforderlichen Himmelsbeobachtungen anstellten und verarbeiteten, Qāḍizāde ar-Rūmī und unseren K., dann 'Alī al-Qūšġī, der das Werk weitergeführt und zum Abschluß gebracht habe, nachdem zuerst K., dann Qāḍizāde gestorben sei. Den K. bezeichnet er als „den bewundernswerten Molla, bekannt unter den Berühmten in dieser Welt, der die Wissenschaften der Alten von Grund aus beherrschte und vervollkommnete, der die schwierigsten Fragen lösen konnte“.

In einer Glosse einer Handschrift des Kommentars von Mīram Čelebī zu den Prolegomenen der Tafeln des Ulūġ Beg (Sédillot³ S. 141) wird

¹¹ Al-Kāšī, Lehrbrief über den Kreisumfang (*ar-risāla al-muḥīṭiya*). Istanbul, Armeemuseum = Berlin, *Mss. simul. or. 60*.

¹⁴ Vgl. W. Barthold, Ulūġ Beg und seine Zeit. Deutsche Bearb. von W. Hinz. Leipzig 1935 (= Abhandl. f. d. Kunde d. Morgenlandes 21, 1, 1936). Dieses Buch bringt auch Nachrichten über die wissenschaftliche Betätigung des Ulūġ Beg und über die Person al-Kāšī's.

¹⁵ Text: E. A. Sédillot, *Chrestomathie persane I*, Paris 1847, französische Übersetzung², S. 5—6.

berichtet, wie in einer Versammlung mehrerer Sultane oder hoher Beamten K. mit seinem fürstlichen Herrn darüber diskutierte, ob die Tafel der Sonnengleichung so anzulegen sei, daß diese Größe im Perigäum und Apogäum gleich null wird.

In den Hofetiketten soll K. nicht bewandert gewesen sein, doch mußte sich Ulūğ Beg mit seinem rustikalen Auftreten abfinden, da er seine Hilfe nicht entbehren konnte. So berichtet Amīn Aḥmad Rāzī in seinem Werk „Die sieben Klimata“ (*Haft Iqlīm*), einer persischen Sammlung biographischer Nachrichten¹⁶. Daß K. es aber sehr wohl fertigbrachte, seinen Fürsten im Vorwort des „Schlüssel“ mit den zeit- und landesüblichen überschwenglichen Lobeserhebungen zu überschütten, werden wir bald sehen. Übrigens preist er ihn darin als mächtigen Herrscher und kaum als Gelehrten, was doch nahe gelegen hätte; und da er ihn doch wohl so darstellt, wie es dem Wunsche und dem Selbstgefühl des Ulūğ Beg entsprach, so bestätigt sich hier das von Barthold entworfene Bild, das uns den Ulūğ Beg unbeschadet seiner kulturellen und wissenschaftlichen Neigungen nicht als weltfernen Gelehrten zeigt, sondern als ausgeprägten türkischen Machthaber, der an den militärpolitischen Überlieferungen der Zeit Timürs festhielt. Das Gebet, das K. an diese Lobpreisungen anschließt, Gott möge die Hand des Unglücks von Ulūğ Beg fernhalten, blieb leider unerhört; denn Ulūğ Beg's eigener Sohn 'Abdallaṭīf ließ den Vater hinrichten.

Daraus, daß K. seinen kleinen persischen „Lehrbrief über die Erklärung der Beobachtungsgeräte“¹⁷ im Jahre 818 d. H., d. i. 1415—16, für den Sultan Iskandar, wahrscheinlich den Fürsten der Schwarzen Horde, schrieb, schließt Barthold, daß K. damals noch nicht im Dienste Ulūğ Beg's stand. Auch die ebenfalls persisch abgefaßten „Hāqānischen Tafeln in der Vervollkommenung der Ilhānischen Tafeln“ (d. h. der Tafeln aṭ-Ṭūsī's) gehören der frühen Arbeitszeit K.'s an. Die in Istanbul erhaltene Handschrift dieses Werks (Krause S. 516), auf die wir noch zurückkommen werden, ist vom Jahre 816 d. H., d. i. 1413—14, datiert. Barthold glaubt, daß der Hāqān, nach dem dieses Werk benannt ist, wahrscheinlich Ulūğ Beg's Vater Šāh-Ruḥ (1377—1447) ist, der in Herāt residierte.

Als K. 1427 seinen „Schlüssel“ vollendete, waren fast alle seine Werke schon geschrieben. Er starb, wie wir sahen, als erster der drei zur Bearbeitung des Tafelwerks berufenen Astronomen und früher als sein 1449 gemordeter Fürst Ulūğ Beg. Man begrub ihn nahe bei der Stätte seiner Arbeit, der von Ulūğ Beg erbauten Sternwarte¹⁸.

¹⁶ Vgl. Ch. Rieu, *Catalogue of the Persian Manuscripts in the British Museum* II (1891), S. 450.

¹⁷ Leidener Katalog¹¹ V (1873), S. 245 Nr. 2647 (*Cod. 945(3) f. 12—13 Warn.*). Vgl. Hāggī Ḥalifa, *Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum* ed. G. Flügel. Leipzig, London 1835—1858, I S. 397.

¹⁸ Vgl. E. A. Sédillot, *Prolégomènes*², Introduction, Paris 1847, S. CXXVI.

Im Vorwort des „Schlüssel“ gibt uns der Verfasser einen Überblick über seine vorher erschienenen Werke und kennzeichnet die Ziele des neu dargebotenen. Deshalb sei dieses Vorwort samt dem sich anschließenden Inhaltsverzeichnis des „Schlüssel“ hier wiedergegeben¹⁹.

Im Namen Gottes, des barmherzigen Erbarmers!

Zu Deinem Beistand nehmen wir unsere Zuflucht, Du Gütiger!

Lob sei Gott, der da einzig ist in der Hervorbringung der Einheiten, der da alleinig ist in der Zusammensetzung der Arten der Zahlen! Segen über das beste seiner Geschöpfe, Muḥammad, den wirksamsten Fürsprecher am jüngsten Tag, über seine Familie und seine Nachkommen, die Führer auf dem Wege der Rettung und der rechten Leitung!

Um zur Sache zu kommen: Dasjenige unter den Geschöpfen Gottes, des Erhabenen, das am meisten seines Erbarmens und seiner Verzeihung bedarf, Ġamšīd b. Mas'ūd b. Maḥmūd, der Arzt, al-Kāṣī, zubenannt Ġiyāf (d. i. Hilfe; nämlich der Religion) — möge Gott sein Schicksal gut machen! — spricht:

Ich habe die Rechenoperationen und die geometrischen Regeln eifrig studiert²⁰, so daß ich zu ihrem wahren Wesen gelangte, in ihren Feinheiten vollkommen wurde, das tief Liegende und Schwierige in ihnen aufdeckte und das Verwickelte in ihnen löste. Auch entdeckte ich in ihnen viele Regeln und Gesetze und bekam Dinge heraus, deren Ermittlung vielen ihrer Beflissenen (zu) schwierig war. So nahm ich die Ermittlung aller Tabellen der Ilhānischen Tafeln nach dem feinsten Rechenverfahren in Angriff, verfaßte das Tafelwerk, das den Titel führt: *Hägānische Tafeln in der Vervollkommnung der Ilhānischen Tafeln* und vereinigte darin alle meine Erfindungen auf dem Gebiet der Operationen (Rechnungen) der Astronomen, Dinge, die in keinem anderen Tafelwerk vorkommen, zusammen mit den geometrischen Beweisen. Auch verfaßte ich das Tafelwerk der Erleichterungen und mancherlei Tabellen.

Außerdem schrieb ich Lehrbriefe, wie den Lehrbrief, der den Titel führt: *Himmelsleiter*, über die Lösung von Schwierigkeiten, die den Vorgängern bei den Abständen und den Körpern aufkamen, ferner den Lehrbrief, den ich betitelte: (Lehrbrief) über den Umfang, betreffend das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang und den Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus, betreffend die Bestimmung dieser beiden für den dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder gegebenem Sinus. Auch das gehört zu den Gegenständen, die den Vorgängern (zu) schwierig waren, wie denn der Verfasser des *Almagest* in diesem (Werk) sagt: *Es gibt keinen Weg, um ihn zu er-*

¹⁹ Zu seiner oben (S. 2) erwähnten Übersetzung eines Teils des Vorworts benutzte Woepeke⁵ die Handschrift Nr. 419 des Britischen Museums, datiert Šawwāl 997 d. H. = August oder September 1588 n. Chr.

²⁰ Wörtlich: *Nachdem ich die Rechenoperationen usw. Den langen Vorder-satz löste ich in mehrere Hauptsätze auf.*

halten (d. h. zu berechnen)²¹. Auch erfand ich das Gerät mit dem Namen „Deckel (Platte) der Gürtel“ und arbeitete über die Art und Weise seiner Herstellung und Kenntnis (seiner Handhabung) die Schrift aus: die Gartenvergnügung. Dies ist ein Gerät, mit dem man die (Längen)korrekturen²² der (Wandel)sterne erhält, ferner ihre Breiten, ihre Entfernungen von der Erde, ihre Rückläufigkeit(en), die Mond- und Sonnenfinsternis(se)²³ und was mit ihnen zusammenhängt. Auch bekam ich die Antworten auf viele Probleme heraus, die mir die Meister unter den Rechnern vorlegten, um (mich) auf die Probe zu stellen oder (selbst etwas) zu lernen, und wenn einige von diesen Problemen nicht durch die sechs algebraischen (Probleme)²⁴ lösbar sind, erreiche ich in diesen Rechnungen mein Ziel auf Grund vieler Regeln, durch welche die Auflösungen der rechnerischen Prämissen auf die leichteste Art, nach dem bequemsten Verfahren, mit geringster Rechenarbeit, größtem Nutzeffekt und in klarster Darstellung gelingen.

Deshalb hielt ich es nun für angezeigt, sie (meine Methoden) gesammelt herauszugeben und wollte sie erklären, damit es ein Merkbuch für die Freunde sei und ein Verstandesschärfer für die besten Geister, und so arbeitete ich dieses Buch aus und vereinigte in ihm alles, was der Rechner braucht, wobei ich mich vor langweiliger Weitschweifigkeit ebenso hütete wie vor verwirrender Abkürzung. Zu den meisten Rechnungen gab ich ein Muster in (Form) einer Tafel, damit die Geometer sie leicht festhalten können. Bei allen in diesem Buch gebrachten Tafeln ist mein Geist der Vater des Gedankens und der Erfinder des Süßen und Bitteren, das darin steht, mit Ausnahme folgender sieben Tafeln:

1. der (Tafel) mit den Produkten der Zahlen unter zehn (d. h. der Einmaleinstafel bis 9·9),
2. des Gitters bei der Multiplikation (s. S. 19),

²¹ Hier hat Woepcke^{5 10} noch den Satz: Or, puisqu'il en est ainsi, nous avons imaginé un artifice pour trouver la corde d'un degré avec une approximation très exacte. In der Leidener¹¹ und in der Pariser Handschrift¹² fehlt dieser Satz.

²² *taqwīm* = διόρθωσις = *correctio, conversio quantitatis mediae in veram* ist der Betrag, den man zum mittleren Ort des Planeten hinzufügen muß, um den wahren zu erhalten. — *ruḡū'* = προήγησις = *regressus, retrogradatio planetarum* ist die rückläufige Bewegung eines Planeten. — Vgl. Al-Battānī, *Opus astronomicum* ed. C. A. Nallino II (1907), S. 350, S. 333.

²³ *wal-ḥusūf wal-kusūf*. Über den Bedeutungsunterschied von *ḥusūf* und *kusūf* bestehen verschiedene Meinungen, die al-Tahānawī im Artikel *al-kusūf* seines 1745 verfaßten Wörterbuchs der wissenschaftlichen Fachausdrücke (Bibliotheca Indica 17, 1862, II S. 1253) dargelegt. Das Wort *kusūf* scheint zu überwiegen und wird von einigen sowohl für Sonnen- wie auch für Mondfinsternisse und Sternbedeckungen gebraucht.

²⁴ Die „sechs Probleme“ sind die schon bei al-Hwārizmī aufgestellten sechs Normalformen von Gleichungen $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$ ($a, b, c > 0$). Vgl. F. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa*, London 1831, Text S. 3 u. 5, Übersetzung S. 6 u. 8.

3. der (Tafel) mit den Elementen der Grade (d. i. den Binomialkoeffizienten, s. S. 25),
4. des Beispiels für die Vereinheitlichung der Nenner (d. h. für das Gleichnamigmachen mehrerer Brüche, s. S. 33),
5. der (Tafel zur) Bestimmung der Stellen des Produktes und des Quotienten (s. S. 63),
6. der Tafel des Sinus,
7. der (Tafel zur) Bestimmung der Artung (ğinsīya) des Produktes und des Quotienten (s. S. 58).

Ich verfaßte das Werk für die Bibliothek des gewaltigsten, gerechtesten, weisesten und hochherzigsten Sultans, des Herrschers über die Nacken der Völker, des Schutzherrn der Sultane der Araber und Nichtaraber, des Sultans der beiden Aufgänge²⁵, des Hāqāns (Groß-Chans) von Ost und West, der Zuflucht der gewaltigsten Sultane, des Schattens Gottes auf Erden, des Machthabers zu Wasser und zu Lande, des Zeichens Gottes in den Welten, des Ausbreiters der Matte der Sicherheit und des Schutzes, des Entfallers der Gerechtigkeit und des Wohltuns, des Brechers der Bastionen der Gewalttätigkeit und der Rebellion, des Hüters der Länder Gottes zu Lande und zu Wasser, des Helfers der Knechte Gottes im Osten und Westen, der sich die kreisende Sphäre gewogen macht nach seiner Absicht, während die Erde gespalten wird in der Schlacht von der Schneide seines Schwertes, des durch göttlichen Beistand Unterstützten, des durch göttliche Leitung Geleiteten, des durch göttliche Eingebungen Inspirierten, dem der Sieg über die Feinde durch die Gunst des Einzigsten verliehen wird, des Trägers der himmlischen Seele und der menschlichen Vollkommenheiten, der engelgleichen Charaktereigenschaften und der muhammedanischen Sitten, des mit Gerechtigkeit, Tapferkeit, Scharfsinn, Mut, Hoheit, Größe und Autorität Ausgestatteten, des, dem geholfen wird durch die Hilfe dessen, der der beste Helfer ist, des Sultans, Sohnes des Sultans, Sohnes des Sultans, des Helfers der Gerechtigkeit (d. h. Gottes), der Welt, der Religion und der unumschränkten Macht, Ulug Beg Gurgān²⁶. Möge Gott der Erhabene sein Kalifat und seine Herrschaft im bewohnten Viertel (der Erde) ewig wahren lassen und möge er den Weltbewohnern seine Frömmigkeit und sein Wohltun offenbaren! O Gott, gib, daß der böse Blick vor der Wohnung seiner Hoheit verschleiert und behindert, daß die Hand der Unglücksfälle von der Matte seiner Herrschaft fern und abgehalten sei!

Dabei erhoffe ich von seiner Majestät, daß sie das Werk gern entgegennehme, berichtige, was (darin) schwach ist, seine Irrtümer verzeihe und seine Lücken ausfülle.

²⁵ Zu dem Ausdruck „die beiden Aufgänge“ vgl. Sura 43,37 und Sura 55,16. Man kann bei diesen Koranstellen an die Aufgangspunkte der Sonne am längsten und kürzesten Tage denken.

²⁶ Ulug Beg nannte sich wie Tīmūr wegen seiner Verwandtschaft mit den Tschingiziden Gurgān („Schwiegersohn“). Vgl. Barthold-Hinz¹⁴ S. 33, 43, 109, 110, 220, 222. Vgl. aber E. I. II S. 195.

Als ich es abschloß, betitelte ich es „Schlüssel der Rechner“. Ich bitte Gott, er möge mir zum Rechten verhelfen und mich auf den Weg der rechten Leitung führen. Jeden, der es studiert, bitte ich, mich zu entschuldigen, wenn ich in der Darstellungsweise schwach bin, und mich nicht zu tadeln, wenn ich strauchle. Denn ich bekenne, daß ich schwach und unvollkommen bin, und gestehe ein, daß ich Fehler bei der Abfassung und Ausarbeitung beging.

Ich schrieb es so, daß es ein Vorwort und fünf Bücher umfaßt^a).

Einleitung. Über den Begriff des Rechnens und der Zahl und seine Unterabteilungen.

Erstes Buch. Über das Rechnen mit ganzen Zahlen vermittels der indischen Ziffern. Es umfaßt sechs Kapitel.

1. Über die Zeichen (suwar) und die Stellen der Zahlen.
2. Über die Verdoppelung, die Hälftung, die Addition und die Subtraktion.
3. Über die Multiplikation.
4. Über die Division.
5. Über das Ausziehen der Wurzel aus den Potenzen, z. B. der Quadratwurzel, der Kubikwurzel und anderer.
6. Über die Probe der Rechnungen.

Zweites Buch. Über das Rechnen mit Brüchen. Es umfaßt zwölf Kapitel.

1. Über den Begriff der Brüche und ihre Unterabteilungen.
2. Über die Art, wie man die Ziffern der Brüche setzt.
3. Über die Feststellung des Aufgehens (einer Zahl in einer anderen), der Teilverwandtschaft (Vorhandensein eines gemeinsamen Teilers) und der Teilerfremdheit.
4. Über das Einrichten (tağnīs) und das Erhöhen (raf').
5. Über die Vereinheitlichung (ittiḥād) der Nenner.
6. Über die Verwandlung eines zusammengesetzten Bruches in einen einfachen.
7. Über die Verdoppelung, die Hälftung, die Addition und die Subtraktion.
8. Über die Multiplikation.
9. Über die Division.
10. Über das Ausziehen der Wurzel aus den Potenzen.
11. Über die Verwandlung eines Bruches in einen solchen mit anderem Nenner.
12. Über die Art, wie man Dānaq, Ṭassūf und Ša'ir miteinander multipliziert und durcheinander dividiert.

Drittes Buch. Über das Rechenverfahren der Astronomen. Es umfaßt sechs Kapitel.

1. Über die Kenntnis der Gummalziffern und die Art, wie man sie setzt.
2. Über die Verdoppelung, die Hälftung, die Addition und die Subtraktion.

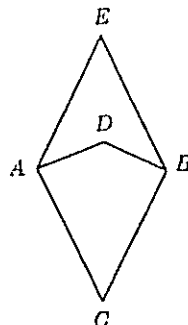
3. Über die Multiplikation.
4. Über die Division.
5. Über das Ausziehen der Wurzel aus den Potenzen.
6. Über die Verwandlung der Sechzigerzahlen in die indischen und umgekehrt, Ganze und Brüche.

Viertes Buch. Über die Ausmessung (*misāḥa* = Berechnung von Flächen- und Rauminhalten). Es umfaßt eine Einleitung und neun Kapitel.

Einleitung. Über den Begriff der Ausmessung.

1. Über die Ausmessung des Dreiecks und das, was mit ihr zusammenhängt. Es umfaßt drei Abschnitte.
 - a) Über den Begriff des Dreiecks und seine Unterabteilungen.
 - b) Über die Ausmessung des Dreiecks im allgemeinen und die Bestimmung der Abstände in ihm.
 - c) Über die Ausmessung des gleichseitigen Dreiecks im besonderen und die Bestimmung der Abstände in ihm.
2. Über die Ausmessung der Vierecke und das, was mit ihr zusammenhängt. Es umfaßt fünf Abschnitte.
 - a) Über die Begriffsbestimmungen.
 - b) Über die Ausmessung des Quadrats und des Rechtecks und die Bestimmung der Abstände in ihnen.
 - c) Über (die Ausmessung) des Rhombus und der Drachenfiguren²⁷.
 - d) Über (die Ausmessung) des Rhomboids (Parallelogramms) und der Trapeze.
 - e) Über (die Ausmessung) des Zweibeinigen²⁷ und des schiefen (allgemeinen) Vierecks.
3. Über die Ausmessung der Vielecke und was mit ihr zusammenhängt. Es umfaßt fünf Abschnitte.
 - a) Über die Begriffsbestimmungen.
 - b) Über ihre Ausmessung im allgemeinen und die Bestimmung der Abstände.
 - c) Über die Besonderheiten der gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecke und die Bestimmung der Abstände in ihnen.

²⁷ Mit „Drachenfiguren“ übersetze ich den Ausdruck *dawāt al-yamīnain*. Es ist das symmetrische Viereck $ADBC$ gemeint, das entsteht, wenn man auf einer gemeinsamen Basis AB nach beiden Seiten gleichschenklige Dreiecke ABC , ABD von verschiedener Höhe errichtet. Das „Zweibeinige“ (*du'r-riglain*) ist nach der Figur und der Berechnungsvorschrift (IV, 2e⁹) ein symmetrisches Viereck $AEBD$ mit einspringender Ecke D . Es wird (IV, 2a) definiert als „Ergänzung der Drachenfigur ($ADBC$) zum Rhombus“ ($ACBE$).

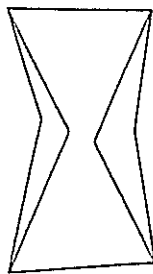


- d) Über die Besonderheiten des gleichseitigen und gleichwinkligen Sechsecks.
- e) Über die Besonderheiten des (gleichseitigen und gleichwinkligen) Achtecks.
4. Über die Ausmessung des Kreises und seiner Teile, d. h. des (Kreis-)ausschnitts (Sektors), des (Kreis-)abschnitts (Segments), des (Kreis-)rings und anderer (Kreisteile) und was mit ihr zusammenhängt. Es umfaßt fünf Abschnitte.
 - a) Über die Begriffsbestimmungen.
 - b) Über die Ausmessung des Kreises und die Bestimmung des Umfangs aus dem Durchmesser und umgekehrt.
 - c) Über die Ausmessung des Ausschnitts und des Abschnitts und die Bestimmung der Abstände.
 - d) Über die Ausmessung der übrigen (ebenen) Flächen, die von kreisrunden Linien begrenzt sind.
 - e) Über die Aufstellung der Sinustafel und die Art ihrer Anwendung.
5. Über die Ausmessung der übrigen ebenen Flächen, die verschieden von den angeführten sind, wie die Kreisähnliche, die Trommelartige²⁸, die Treppenformige (al-mudarraǧ), die Sternvielecke (dawāl aš-šaraǧāt), die Vielecke mit bogenförmigen Seiten und andere.
6. Über die Ausmessung der krummen Flächen, wie der Zylinderflächen, der Kegelflächen und der Kugeln und was mit ihnen zusammenhängt. Es umfaßt sechs Abschnitte.
 - a) Über die Begriffsbestimmungen.
 - b) Über die Ausmessung der Zylinderfläche²⁹.
 - c) Über die Ausmessung der Kegelfläche²⁹.
 - d) Über die Ausmessung der Kugelfläche und die Bestimmung ihres Durchmessers.
 - e) Über die Ausmessung der krummen Fläche des Kugelabschnitts und die Bestimmung seiner Abstände.
 - f) Über die Ausmessung der Rippe der Kugel³⁰.

²⁸ al-muṭabbal. Vgl. das Wörterbuch von Dozy (II S. 27), der auf den Muḥit al-Muḥit verweist. Nach at-Tahānawī²⁸ (I S. 924) bezeichnet al-muṭabbal bei den Geometern ein ebenes Vieleck, das der Trommel ähnlich ist, nämlich einer kleinen Pauke, die gerührt wird, um Vögeln, z. B. Enten, bei der Falkenjagd u. dgl. aufzuseuchen. Die Handschrift hat (20a) für den muṭabbal die hierneben wiedergegebene Figur.

²⁹ Auch Prismen bezeichnet K. (IV, 6a) als Zylinder, ebenso Pyramiden als Kegel: Wisse, daß der Zylinder und der Kegel vielseitig sein können, derart, daß ihre Grundfläche ein Vieleck ist, und der Mantel des Zylinders aus Rechtecken, derjenige des Kegels aus Dreiecken besteht (IV 6a); b).

³⁰ Die Rippe (dil') der Kugel ist das, was von zwei Halbgroßkreisen und einer Kugelfläche begrenzt wird, deren Halbmesser gleich dem Halbmesser der beiden Kreise ist. Sie (die Kugelrippe) ist den Rippen der Melone ähnlich (IV, 6a) c).



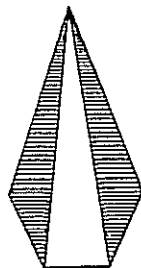
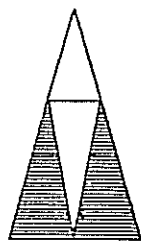
7. Über die Ausmessung der Körper. Es umfaßt acht Abschnitte.
 - a) Über die Ausmessung des Zylinders.
 - b) Über die Ausmessung des Kegels.
 - c) Über die Ausmessung des Kegelstumpfs.
 - d) Über die Ausmessung des Kegelunterschieds³¹ und die Ausmessung des Doppelkegelunterschieds³².
 - e) Über die Ausmessung der Kugel.
 - f) Über die Ausmessung des Kugelausschnitts und -abschnitts.
 - g) Über die Ausmessung der Körper, deren Grundflächen gleichseitig sind.
 - h) Über die Ausmessung der übrigen Körper.
8. Über die Ausmessung einiger Körper aus ihrem Gewicht und umgekehrt.
9. Über die Ausmessung der Bauten und Gebäude. Es umfaßt drei Abschnitte.
 - a) Über die Ausmessung des Mauer- und Hallenbogens.
 - b) Über die Ausmessung der Kuppel und der Hohlform (muḡawwafa).
 - c) Über die Ausmessung der terrassenförmigen (muḡarnasāt) Flächen.

Fünftes Buch. Über die Bestimmung der Unbekannten durch Algebra (al-ḡabr wal-muḡābala), doppelten falschen Ansatz (wörtl.: die beiden Fehler) und andere rechnerische Prinzipien. Es umfaßt vier Kapitel.

1. Über die Algebra. Es umfaßt zehn Abschnitte.
 - a) Über die Begriffsbestimmungen.
 - b) Über die Addition der Arten, wie der Zahl, des Dings (x), des Vermögens (x^2) und des Kubus (x^3).

³¹ Wird aus einem geraden Kegel ein Doppelkegel herausgeschnitten, dessen eine Spitze der Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels ist, so nenne ich den Restkörper „Kegelunterschied“. Er ist gleich einem Kegelstumpf, aus dem ein Kegel herausgeschnitten wird, dessen Spitze der Mittelpunkt der Grundfläche des ersten Kegels (des Kegelstumpfs), und dessen Grundfläche die Deckfläche des ersten Kegels (des Kegelstumpfs) ist (IV, 6a); d). (S. den hierneben dargestellten Achsenschnitt.)

³² Wird aus einem Doppelkegel ein anderer Doppelkegel herausgeschnitten, derart, daß die Spitzen des einen (zugleich) die Spitzen des anderen sind, so nenne ich den Restkörper „Doppelkegelunterschied“. Er ist gleich dem aus zwei geraden Kegeln, einem vollständigen und einem abgestumpften, deren beider Grundfläche dieselbe ist, zusammengesetzten (Körper), aus dem ein Kegel herausgeschnitten ist, dessen Spitze diejenige des vollständigen Kegels, und dessen Grundfläche die Deckfläche des Kegelstumpfes ist (IV, 6a) e). (S. den hierneben dargestellten Achsenschnitt.)



- c) Über die Subtraktion dieser Arten.
 - d) Über die Multiplikation dieser Arten.
 - e) Über die Division dieser Arten.
 - f) Über die Quadratwurzel aus diesen Arten.
 - g) Über die Aufzählung der algebraischen Probleme.
 - h) Über die Art, wie man die Unbekannte bei den bekanntesten sechs Problemen³³ ermittelt.
 - i) Über die Art, wie man die Unbekannte ermittelt, wenn die Rechnung auf eine Gleichung zwischen Arten führt, deren gegenseitige Beziehung der Beziehung zwischen den Arten der sechs erwähnten Probleme gleichkommt.
 - k) Über die in Aussicht gestellten von uns erfundenen Probleme.
2. Über die Bestimmung der Unbekannten durch doppelten falschen Ansatz.
 3. Aufzählung von rechnerischen Prinzipien, die man häufig bei der Bestimmung der Unbekannten gebraucht.
 4. Über die Beispiele. Es sind vierzig Beispiele!).

Die Sprachform der gereimten Prosa, die uns in dieser wie in anderen derartigen Vorreden begegnet, konnte ich in der Übersetzung nicht nachahmen. Am Anfang gebraucht K. Ausdrücke in mathematisch-theologischem Doppelsinn. Solche Wortspiele macht er auch in der Einleitung seines Lehrbriefs über den Kreisumfang. Sie sind kennzeichnend für diese späte Zeit. Als weitere Beispiele nenne ich den Anfang der „Essenz der Rechenkunst“ von Bahā' addīn³³ (1547—1622) und besonders die Vorrede, die Ibn al-Mağdī (1365—1447), der uns später (S. 66—67) noch beschäftigen wird, seinem Kommentar³⁴ zum „Abriß der Rechenoperationen“ des Ibn al-Bannā' gab.

Die „Īlāqānischen Tafeln“ kann man wohl als einen Vorläufer der Tafeln Ūlūğ Beg's betrachten, hinsichtlich der angewandten Rechen-technik zugleich als einen Vorläufer späterer trigonometrischer Schriften K.'s und seines „Schlüssel“. Deshalb darf man auf die Erschließung sowohl ihres astronomischen wie ihres rechnerischen Inhalts gespannt sein. Nach Angabe von Krause (S. 510) wurde die einzige uns erhaltene Handschrift dieses persischen Werkes (Istanbul, *Aya Sofya* 2692) schon 816 d. H., d. i. 1413—14, geschrieben und wimmelt von Zusätzen und Nachträgen, Verbesserungen und dergleichen. Sie könnte nach Krause vielleicht die Kladde des Verfassers sein.

Alles, was K. sonst noch neben uns nicht erhaltenen Tafelwerken nennt, sind „Lehrbriefe“. Ein solcher Lehrbrief (*risāla*) steht zu einem Werk wie dem „Schlüssel“ etwa in demselben Verhältnis, wie die in einer wissenschaftlichen Zeitschrift oder in den Schriften einer Akademie er-

³³ Mohammed Beha-eddin, *Essenz der Rechenkunst*, arabisch und deutsch von G. H. F. Nesselmann. Berlin 1843.

³⁴ Eine französische Übersetzung dieser Vorrede gab Woepeke⁵, S. 225 bis 228.

schiene kürzere Abhandlung eines modernen Gelehrten zu einem umfassenden Lehrbuch. Der Lehrbrief, gewöhnlich kürzer als das Lehrbuch, betrifft meist ein engeres Gebiet oder eine Einzelfrage und bringt in dieser Neues; das Lehrbuch vereinigt Altes und Neues in vollständiger, systematischer Darstellung. „Ein Lehrbrief“, sagt Ḥāǧǧī Ḥalīfa (1809–57) in seinem Bücherlexikon¹⁷ (III S. 357), „ist ein Werk, das sich über wenige Probleme erstreckt, die zu einem Wissenszweig gehören“.

Die „Himmelsleiter“ ist uns in einer Reihe von Handschriften erhalten. Sie behandelt Schwierigkeiten in der Frage der Entfernungen und der „Körper“ der Sterne. Im Altertum gab bekanntlich Aristarch von Samos einen grundlegenden Beitrag zu diesem Gegenstand, den al-Birūnī in seinem *Taḥīm*³⁵ in Anknüpfung an Ptolemäus aufgreift. Unter anderen islamischen Astronomen scheint sich auch Maḥmūd b. Mas'ūd Qutbaddīn aš-Šīrāzī († 1311) mit der Frage der Entfernungen der Himmelskörper befaßt zu haben. Seine Ausführungen waren dem K., wie wir noch sehen werden, bekannt. Die Abhandlung des letzteren hat nach Ḥāǧǧī Ḥalīfa (III S. 610 Nr. 7224) folgende Abschnitte: 1. Die Prämissen, 2. Die Abstände des Mondes und der Wandelsterne (*as-sayyārāt*), 3. Die Abstände der Sonne, 4. Die Abstände der Unteren, 5. Die Abstände der Sterne (*al-kawākib*), 6. Der Abstand der Fixsterne, 7. Der Abstand der Körper der Sterne (*al-kawākib*), Schluß: Tabellen.

Der „Lehrbrief über den Kreisumfang“¹³ ist uns im Istanbuler Armeemuseum, ferner in Teheran und Meschhed erhalten. Er dürfte sich mit dem Lehrbrief decken, für den Ḥāǧǧī Ḥalīfa (III S. 449 Nr. 6389) den Titel „Lehrbrief über das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang“ angibt (Flügel übersetzt irrtümlich: *de ratione inter guttam et Oceanum*).

Die islamische Kreisberechnung erfolgte in drei Schritten, die sich an die Namen Abul-Wafā', al-Birūnī und K. knüpfen. Die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṭam, so wie sie uns in der Berliner Handschrift³⁶ entgegentritt, bedeutet in diesem Zusammenhang keinen Fortschritt. Von den dreien tat K., der sich in seinem Lehrbrief mit den Kreisberechnungen seiner Vorgänger auseinandersetzt, den größten Schritt vorwärts. Er war der erste, der die Genauigkeit des Archimedes weit übertraf. Später (S. 106–109) werde ich aus dem Lehrbrief über den Umfang den von K. in sexagesimaler und in dezimaler Form gefundenen Wert von 2π angeben. Ein Bild von K.'s Leistung kann aber erst die Veröffentlichung dieser Schrift geben.

Der „Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus“ wurde bisher nicht aufgefunden. Die Fortsetzung des Titels: „betreffend die Bestimmung dieser beiden für den dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder ge-

³⁵ Al-Birūnī, The book of instruction in the elements of the art of astrology, arabisch u. englisch von R. R. Wright, London 1934, S. 115–120.

³⁶ H. Suter, Die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṭam. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 44 (1899), Hist.-lit. Abt. S. 33–47.

gegebenem Sinus“ zeigt, daß es sich um die Berechnung von $\sin \alpha$ aus $\sin 3\alpha$ und von $\text{chord } \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ aus $\text{chord } 3\alpha = 2 \sin \frac{3\alpha}{2}$ handelt. Im

Almagest (Buch I, Kap. 10) sagt Ptolemäus: „Nun kann freilich, wenn z. B. die Sehne zu dem Bogen von $1\frac{1}{2}^\circ$ gegeben ist, die das Drittel desselben Bogens unterspannende Sehne durch die Linien (διὰ τῶν γραμμῶν) auf keinerlei Weise gefunden werden.“ Wenn K. auf diese Stelle anspielt, so muß betont werden, daß Ptolemäus nicht die Auffindbarkeit überhaupt, sondern die Auffindbarkeit durch die Linien für unmöglich erklärt. Damit dürfte er meinen: durch Rechnungen, die sich nur auf elementargeometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gründen, also Rechnungen, die sich nur aus Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und dem Ausziehen von Quadratwurzeln zusammensetzen.

In Kairo ist uns unter dem Namen K.'s als Verfasser eine Schrift erhalten, die den Titel führt: „Lehrbrief über die Bestimmung des Sinus von einem Grad durch Operationen, die auf geometrische und rechnerische Prinzipien gegründet sind“³⁷. Diese Abhandlung ist in Wahrheit nicht von K., sondern sie ist eine Art kritischer Kommentar zu einer Schrift K.'s, den bald nach K.'s Tode ein ungenannter Gelehrter verfaßte. Dieser Verfasser scheint K.'s Mitarbeiter und Nachfolger Qāḍizāde ar-Rūmī zu sein; denn von diesem erwähnt Abd-ul-Hak Adnan³⁸ eine offenbar in Istanbul vorhandene Schrift, die nach dem Titel und den über den Inhalt gemachten Andeutungen mit der Kairoer Handschrift übereinstimmt³⁹. Handelt es sich wirklich um dasselbe Elaborat, so kann ich der Meinung Adnans, der Kommentator Qāḍizāde habe den K. übertroffen, keineswegs zustimmen. Der Verfasser des Kommentars übt neben allen Lobsprüchen auf K. eine stellenweise kleinlich nörgelnde und verständnislose Kritik und hat keinen neuen Gedanken in das Verfahren hineingetragen. Ohne an dieser Stelle auf den Kommentar näher einzugehen, sei nur gesagt, daß er auf folgenden Inhalt der Schrift des K. schließen läßt:

Für den Halbmesser $r = 60$ berechnet K. aus einem hinreichend genauen Wert von $\sin 3^\circ = r \sin 3^\circ$ den Wert

$$\sin 1^\circ = r \sin 1^\circ = 1.24943111444162617.$$

³⁷ *Fihrist al-kutub al-'arabiya* V, Kairo 1308 d. H. (= 1890—91 n. Chr.), S. 210. Ich benutzte die für C. Schoy von M. Sidqi angefertigte Abschrift, die jetzt dem Institut f. Gesch. d. Med. u. d. Naturw. in Berlin angehört. S. d. Handschriftenkatalog¹⁰. S. 166 Nr. I. 15.

³⁸ Abd-ul-Hak Adnan, *La science chez les Turcs ottomans du commencement jusqu'à la fin du moyen-âge*. *Archeion* 19 (1937), S. 346—365. S. 350.

³⁹ Die von Abd-ul-Hak Adnan angeführte, türkisch geschriebene Geschichte der Mathematik von Salih Zeki Bey (*Algari-Bâqiya*, Istanbul 1910—11), die sich mit dem Gegenstand beschäftigt, konnte ich bisher nicht einsehen.

Der sich aus dieser Sexagesimalzahl ergebende, von K. nicht angegebene Dezimalbruch

$$\sin 1^{\circ} = 0.01745\ 24064\ 37283\ 51$$

ist in allen 17 Dezimalstellen richtig⁴⁰.

Der Berechnung vorausgeschickt ist eine ihr äquivalente Berechnung von $\text{Chord } 2^{\circ} = 2 \sin 1^{\circ}$ aus $\text{Chord } 6^{\circ} = 2 \sin 3^{\circ}$. Die Berechnungen geschehen durch Auflösung der für diese Winkeldreiteilung maßgebenden kubischen Gleichung nach dem von Hankel so hoch gepriesenen Iterationsverfahren, das Miram Čelebi³ im wesentlichen ebenso wie der Kommentator beschreibt.

In seiner Schrift hat K. als Kern des Verfahrens die Formel

$$3 \sin \alpha - \sin 3\alpha = 4 \cdot 60^{-2} \cdot \sin^3 \alpha$$

bewiesen und in Worten ausgesprochen, d. i., da $\sin x = r \sin \alpha$ und $r = 60$ ist:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Nach alledem ist es sehr wahrscheinlich, daß die in der Kairoer Handschrift kommentierte Schrift des K. nichts anderes war, als der von ihm erwähnte „Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus, betreffend die Bestimmung dieser beiden für den dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder gegebenem Sinus“. Dieser Schluß wäre unsicher, wenn K. zwei Schriften über diesen Gegenstand verfaßt hätte. Suter⁴¹ meint, Ḥāḡḡī Ḥalifa nenne (III S. 364 und S. 452) zwei Abhandlungen K.'s. Aber hier liegt ein Versehen Suters vor, denn während die von Ḥāḡḡī Ḥalifa an der zweiten Stelle (III S. 452) angeführte Schrift der eben genannte Lehrbrief K.'s über die Sehne und den Sinus ist, nennt der Lexikograph an der ersten Stelle (III S. 364) den oben angeführten Titel der Kairoer Handschrift und fügt hinzu, K. habe diesen Lehrbrief inspiriert (*alḥanahu*). Dasselbe lesen wir an der Spitze der Kairoer Handschrift, und somit meint Ḥāḡḡī Ḥalifa hier nicht ein Werk von K., sondern die erläuternde Abhandlung, die uns in der Kairoer Handschrift namenlos erhalten ist.

Von der „Gartenvergnügung“ ist in London eine Handschrift vorhanden. Beim Titel dieses Lehrbriefs tauchen vor uns die von den morgenländischen Schriftstellern gepriesenen zauberhaften Gärten von Samaraqand auf. Wollte der Verfasser, daß man in ihrer Kühle seine Schrift studiere und die Einstellungen des in ihr beschriebenen Geräts für die nächtlichen Himmelsbeobachtungen vornehme, die vielleicht auch astrologischen Zwecken dienten? Nach Ḥāḡḡī Ḥalifa (IV S. 155) ist die „Platte der Gürtel“ ein Gerät auf den zwei Scheiben des Astrolabs. Es handelt sich also um ein aus zwei Scheiben bestehendes nomographisches Gerät. Die eine Scheibe ließ sich drehbar auf die andere einstellen. Nach Ḥāḡḡī Ḥalifa (VI S. 324) sagt K.: „Ich bringe im Anhang die Benutzung

⁴⁰ Vgl. J. Peters, Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus usw. Abh. Pr. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1911.

⁴¹ Suter S. 174, Fußnote a.

des Geräts, das den Namen führt *‘Tafel der Verbindungen’* (*lauḥ al-ittiṣālāt*). Auch dies ist eine meiner Erfindungen.“ Ein Lehrbrief über Nutzenwendungen in Form von zehn Anhängen an die „Gartenvergnügung“ schloß sich an.

Der astrologische Ausdruck „Verbindung“ (*ittiṣāl*) bezeichnet die Annäherung eines Planeten an einen anderen und das Zusammentreffen mit ihm, auch im Aspekt. Der Ausdruck „Körper“ (*ġirm*, vgl. oben S. 14) hat ebenfalls astrologische Bedeutung, jedoch nicht ausschließlich, wie die Titel von Schriften al-Kindī's⁴² zeigen. Es wäre nicht verwunderlich, wenn K. mit mehr oder weniger Überzeugung den starken astrologischen Neigungen seiner Zeit entgegengekommen wäre. Nach Abd-ul-Hak Adnan³⁸, der sich auf Salih Zeki Bey³⁹ beruft, soll bei Qāḍizāde kaum eine Zeile zu finden sein, die man auf Astrologie beziehen könnte.

Außer den von K. selbst genannten Schriften nennt Hāġġi Ḥalifa (VI S. 12) den „Auszug aus dem Schlüssel“, von dem sich mehrere Handschriften erhalten haben, ferner (I S. 397) einen persischen Lehrbrief über astronomische Beobachtungsgeräte. Es wird das der oben (S. 6) erwähnte, in der Leidener Handschrift drei Seiten lange „Lehrbrief über die Erklärung der (astronomischen) Beobachtungsgeräte“⁴¹ sein.

Weiter erwähnt Hāġġi Ḥalifa (II S. 16) die „Disputation (*baḥṭ*) des Ġiyāṭuddin Ġamāsid mit as-Sayyid aš-Šarīf al-Ġurġānī“. Es wäre anziehend, wenn diese Auseinandersetzung unseres K. mit seinem älteren Zeitgenossen al-Ġurġānī (1339—1413) noch ans Licht käme. Dieser Verfasser zahlreicher persischer und arabischer Schriften und Kommentare philosophischen und gesetzeswissenschaftlichen Inhalts hat auch einen Kommentar zum Kompendium der Astronomie von Ġagmīnī geschrieben. Er weilte von 1387 bis 1404 in Samarqand.

Nach Brockelmann⁷ befinden sich ferner von K. in Meschhed der „Lehrbrief über die Bestimmung der Richtung der Qibla aus dem bekannten indischen Kreis“ und der persische „Lehrbrief über die Herstellung (oder Handhabung?, *sāḥṭ*) des Astrolabs“ und in Mosul der „Schlüssel der Grundlagen betreffend die Wissenschaft des (astronomischen) Tabellenwerks“. In der Leidener persischen Handschrift 193(5) *Gol.* vermutet de Goeje⁴³ einen „Lehrbrief über die astronomische Wissenschaft“ von K.

Nach Brockelmann⁷ wurde in Teheran im Jahre 1306 d. H., d. i. 1888—89, eine Anzahl von Abhandlungen K.'s gedruckt. Unter diesen von mir nicht eingesehenen Drucken nennt Brockelmann folgende beiden Werke, die ich anderswo nicht erwähnt finde: „Die Ergebnisse der Wahrheiten“ und „Arten der Operation und der Multiplikation auf der Staubtafel“.

⁴² An-Nadīm, *Kitāb al-fihrist*, hrsgg. v. G. Flügel, I. II. Leipzig 1871 bis 1872. Siehe I, S. 256—260. Übersetzung: H. Suter, Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist. Abh. z. Gesch. d. Math. 6 (1892), S. 11—14.

⁴³ Leidener Katalog¹¹ III (1865), S. 151—152 Nr. 1186, V (1873), S. 245—246.

² Luckey, Rechenkunst.

3. Das Rechnen mit ganzen Zahlen

Die Gelehrten der Inder, sagt K. (I, 1)⁹, setzten für die bekannten neun Knoten (*‘uqūd*) neun Ziffern (*arqām*) von folgendem Aussehen:

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ . Er nennt also die Null nicht als Ziffer mit. Dies

beobachten wir auch bei anderen Darstellern des „indischen“ Rechnens, so schon in der mittelalterlichen Schrift *Algoritmi de numero Indorum*⁴⁴, die man mit guten Gründen als Übersetzung des arabisch nicht erhalten gebliebenen Rechenbuchs von al-Ḥwārizmī (1. Hälfte d. 9. Jahrh.) betrachtet, der vielleicht ältesten islamischen Einführung in das indische Rechnen.

Erst bei der Erläuterung des Positionssystems führt K. die Null ein und sagt, daß in jede Stelle, in der sich keine Zahl befindet, eine Null (*ṣifr*) in Gestalt eines kleinen Kreises zu setzen ist, damit die Stellen keine Lücke bekommen. Auch sonst spricht er die Null nicht recht als Zahl an, so z. B., wenn er (I, 2) beim stellenweisen Hälften der Zahl 4090427, nachdem er unter die höchste Stelle 2 gesetzt hat, zur zweit-höchsten Stelle 0 mit den Worten übergeht: *Weil die Null keine Hälfte hat, so setzen wir unter sie eine Null*⁴⁵. Doch sagt er später (I, 3) einmal, als bei der stellenweisen Multiplikation mehrstelliger Zahlen der eine Faktor in einer Stelle eine Null hat: *Wir setzen ... eine Null, weil die Multiplikation (das Produkt) der Null mit irgendeiner Zahl eine Null ist*⁴⁶. Schon in der al-Ḥwārizmī-Übersetzung⁴⁴ heißt es (S. 16 Z. 5 v. u.): *multiplicabis. IX. in circulo, eritque circulus, idest nichil*, d. h. „Du wirst neun mit null multiplizieren, es wird null ergeben, d. i. nichts“. Ebenso lesen wir in dem *Liber Algorismi de pratica arismetrice* des Johannes von Sevilla⁴⁴ (um 1140), das in näher Beziehung zu dem Rechenbuch von al-Ḥwārizmī steht, (S. 78 Z. 14 v. u.): *circulus multiplicatus in senarium et in se non reddit nisi circulum*, d. i. „Null mal sechs und (null) mal null ergibt nur null“ (vgl. auch S. 79 Z. 13). Wir werden später (S. 56) sehen, wie gerade K. dazu beiträgt, der Null die Bedeutung einer Zahl zu geben, indem er sie als Exponenten auftreten läßt.

Auf die Einführung der Ziffern und die Erläuterung des Positionssystems folgt (I, 2) die Behandlung von Verdoppelung, Hälftung, Addition und Subtraktion. Ebenso wie die anderen islamischen Rechner der späteren Zeit beginnt K., der nicht auf der Staubtafel rechnet, in der auch uns geläufigen Weise die Hälftung bei der höchsten und die übrigen drei Operationen bei der niedrigsten Stelle⁴⁵. Um das Jahr 1000, als die Rechenbücher noch die Ausführung auf der Staubtafel beschrieben, begann man jede dieser Rechnungsarten am entgegengesetzten Ende der

⁴⁴ Trattati d'Aritmetica pubbl. da B. Boncompagni. I (Seite 1 bis 23). *Algoritmi de numero Indorum*. II (Seite 25 bis 136). *Ioannis Hispalensis liber Algorismi de pratica arismetrice*. Rom 1857.

⁴⁵ H. Suter, Das Rechenbuch des ... el-Ḥaṣṣār. *Bibl. Math.* (3) 2 (1901), S. 12—40. S. S. 15.

Zahl. Als neue Zeugnisse hierfür nenne ich die Rechenbücher von Kūšyār b. Labbān⁴⁶ und an-Nasawī⁴⁷, zwei Schriften, die uns später ausführlicher beschäftigen werden.

Das ziffernweise entstehende Ergebnis der genannten Rechnungsarten schreibt K. unter die gegebenen Zahlen; nur bei der Verdoppelung bemerkt er, man könne die Ziffern des Ergebnisses auch über die gegebene Zahl schreiben. Suters Bemerkung⁴⁵, die Summe werde bei den „Arabern“ allgemein über die Summanden geschrieben, trifft also in diesem Umfang nicht zu. Den Additions- und den Subtraktionsstrich setzt K. wie wir „zur Trennung“.

Für die Multiplikation (I, 3) bringt K. die Tafel des Kleinen Einmaleins, das der Rechner aber auswendig lernen solle. Die Multiplikation von 547800 mit der einstelligen Zahl 4 geschieht nach dem nebenstehenden Schema 1. Hierbei werden die Teilprodukte in der Reihenfolge 32, 28, 16, 20 gestaffelt hingeschrieben. Nach vollzogener Addition holt man die beiden Nullen aus dem Multiplikanden in die Zeile

des Ergebnisses herunter.

Die Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen 7806 und 175 kann man mit Hilfe des in Schema 2 wiedergegebenen „Netzes“ oder „Gitters“ (*šabaka*) vollziehen. Dasselbe Verfahren hat z. B. Ibn al-Bannā⁴⁸ (1251—1321) (S. 300). Dieses Schema bringt K. nun auf bessere, in Schema 3 und 4 an dem Beispiel $358 \cdot 624$ dargestellte Formen. Eine dem Schema 3 nahestehende Form findet sich

			7	8	0	6	
1			7	8	0	6	
	7		5				
7		9	6				
	3	4	0				
5		5	0				
1	3	6	6	0	5	0	

Schema 2

			4		3		
	2		1	2		5	
6		6	2	0			8
	1	5	1	0	3		
		3	0	1	6		
			4	8			
	2	2	3	3	9	2	

Schema 3

⁴⁶ Kūšyār b. Labbān, Über die Elemente des Rechnens der Inder (*fi uṣūl ḥisāb al-Hind*). Handschrift Istanbul, *Aya Sofya 4857,7*. Vgl. Krause S. 472—473.

⁴⁷ An-Nasawī, Titel etwa: Das Zufriedenstellende über das indische Rechnen (*al-muqni' fi ḥisāb al-hindi*). Handschrift Leiden 556,6 Warn. Vgl. Katalog¹¹ S. 67—69 Nr. 1021. S. hierzu H. Suter, Über das Rechenbuch des ... el-Nasawī. *Bibl. Math.* (3) 7 (1906), S. 113—119.

⁴⁸ A. Marre, *Le Talkhys d'Ibn Albannā*, traduit ... *Atti dell'Acc. Pont. de'Nuovi Lincei* 17 (1864), S. 289—310.

bei K.'s jüngerem, im Westen wirkenden Zeitgenossen al-Qalaṣādī⁴⁹ († 1486). Bei Schema 4, das aus Schema 3 durch Weglassen der Linien und Faktoren hervorgeht, sollen die Teilprodukte in der Reihenfolge 32, 16, 48; 20, 10, 30; 12, 06, 18 gestaffelt niedergeschrieben werden.

$$\begin{array}{r}
 1\ 2 \\
 6\ 2\ 0 \\
 1\ 8\ 1\ 0\ 3\ 2 \\
 3\ 0\ 1\ 6 \\
 4\ 8 \\
 \text{Er} \frac{2\ 2\ 3\ 3\ 9\ 2}{2\ 2\ 3\ 3\ 9\ 2} \text{gebnis} \\
 \text{Schema 4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4218 \\
 1248 \\
 3515 \\
 1040 \\
 2812 \\
 832 \\
 \text{Er} \frac{1269048}{1269048} \text{gebnis} \\
 \text{Schema 5}
 \end{array}$$

Im Schema 5 endlich, das K. an dem Beispiel $456 \cdot 2783$ erläutert, werden die Teilprodukte $6 \cdot 2783$, $5 \cdot 2783$, $4 \cdot 2783$ nach Schema 1 gebildet. Diese Art, sagt K., sei leichter als die übrigen; nur liege das Verfahren mit dem Gitter dem Verständnis der Anfänger näher.

Haben beide Faktoren viele Stellen, so empfiehlt er, eine Hilfstafel der Produkte eines der Faktoren mit den Zahlen 1, 2, ..., 9 anzulegen, die dadurch entsteht, daß man diesen Faktor hinschreibt, dann zu sich selbst addiert, dann zu der Summe, u. s. f., und eine Spalte mit den Zahlen 1, 2, ..., 9 neben die untereinander geschriebenen Produkte setzt.

Die Tafel des Kleinen Einmaleins und das „Gitter“ (Schema 2) hatte K. schon im Vorwort (s. S. 7) als bekannt bezeichnet. Alles andere über die Multiplikation Gebrachte erklärt er als seine eigene Erfindung. Die sogenannte komplementäre Multiplikation hat er nicht.

Er sagt ferner nichts darüber, daß man beim Multiplizieren einer mehrstelligen mit einer einstelligen Zahl das Ergebnis von rechts nach links ziffernweise niederschreiben kann, indem man, so wie wir es heute zu tun pflegen, die Zehnerübertragungen im Kopfe vornimmt. Man kann ihm aber zutrauen, daß er diese Weiterbildung des im Schema 5 dargestellten Verfahrens befolgte, wenn er sie auch nicht in dieser für den Lernenden bestimmten Darstellung beschreibt. Denn wir werden bald sehen, daß bei seiner fortgeschrittensten Ausführungsform der Division die Teilprodukte so niedergeschrieben erscheinen. Später aber (III, 3) bezeichnet er sogar für das Multiplizieren einer einstelligen mit einer mehrstelligen Sechzigerzahl das entsprechende sofortige stellenweise Niederschreiben des Produkts als das für den Geübten leichteste Verfahren. Die höhere der beiden Sexagesimalstellen jedes sexagesimalen Einzelprodukts sei hierbei jedesmal im Kopf zu der niederen des nächsten derartigen Produkts zu addieren.

⁴⁹ F. Woepcke, Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali Ben Mohammed Alkalçadi. Atti dell'Acc. Pont. de'Nuovi Lincei 12 (1859), S. 14 des Sonderdrucks.

In den ersten vier seiner sechs Ausführungsformen der Division (I, 4) einer mehrstelligen Zahl durch eine ebensolche werden noch jedesmal, wenn eine Stelle des Quotienten gefunden ist, die Teilprodukte dieser Stelle mit den einzelnen Stellen des Divisors, bei der höchsten beginnend, nacheinander gebildet und abgezogen, so wie das später wieder Bahā'addīn in seiner Essenz der Rechenkunst²³ macht. Die vier Formen unterscheiden sich darin, daß nach der sukzessiven Subtraktion dieser Teilprodukte entweder der Divisor um eine Stelle nach rechts, oder der Rest des Dividenden um eine Stelle nach links verschoben wird, und darin, daß die Teilprodukte der einstelligen Zahlen entweder niedergeschrieben, oder nur im Kopf gebildet und sogleich abgezogen werden.

Die beiden letzten Ausführungsformen der Division bezeichnet K. als von ihm selbst ausgedacht. Ich gebe hier nur die vorletzte durch sein Beispiel 2274126 : 565 wieder. Sie unterscheidet sich nicht mehr wesentlich von der heute gebräuchlichen. Bei der letzten Form tritt an die Stelle der dreimaligen Verschiebung des Divisors 565 um eine Stelle nach rechts eine Verschiebung der jeweiligen Reste 14126, 14126, 2826 um je eine Stelle nach links.

Hier sehen wir für jede von 0 verschiedene Stelle des Ergebnisses, zuerst also für 4, das Teilprodukt mit dem ganzen Divisor gebildet und hingeschrieben, also zuerst 2260. Für die Bildung eines solchen Produkts $4 \cdot 565 = 2260$ verweist K. auf die Multiplikation einer mehrstelligen mit einer einstelligen Zahl. Wie ich schon bemerkte, nehme ich an, daß er ein solches Produkt nicht etwa in einer Nebenrechnung nach dem bei der Multiplikation gegebenen Schema 1 fand, sondern gleich stellenweise von rechts nach links niederschrieb, indem er wie wir die Bildung der Teilprodukte und die Ziffernadditionen im Kopf vornahm.

Das Ziehen der senkrechten Linien zur Trennung der Stellen schreibt K. ausdrücklich vor. Die waagerechte Linie über dem Dividenden 2274126 trennt diesen vom Quotienten 4025. Die übrigen waagerechten Striche der oberen Rechnung, die wir heute als Subtraktionsstriche bezeichnen, sollen jedesmal, wenn sie gezogen werden, das über ihnen Stehende als ausgelöscht und das unter sie zu Schreibende als das für die weitere Rechnung in Betracht kommende bezeichnen, das an die Stelle des Ausgelöschten tritt. K. sagt das ausdrücklich. Die Striche sind also die Symbole für das tatsächliche Auslöschen auf der Staubtafel und dürfen sich nicht weiter als die auszulöschenden Ziffern erstrecken. Unten ist bei jeder Teildivision der Divisor in der erforderlichen Stellenlage hingeschrieben, also die unterste 565 zuerst. Diese 565 wird beim Übergang zur nächsten Teildivision durch den über sie gezogenen Strich

				4	0	2	5
2	2	7	4	1	2	6	
2	2	6	0				
		1	4				
		1	1	3	0		
		2	8	2			
		2	8	2	5		
						1	
					5	6	5
					5	6	5
					5	6	5
					5	6	5

Die Division
2274126 : 565

als ausgelöscht bezeichnet, worauf man über den Strich den Divisor 565 in der neuen Stellenlage schreibt, und so fort. Auf der Staubtafel schrieb man jedesmal die neue Zahl in die Zeile der ausgelöschten, so daß zum Schluß nur der Quotient 4025, darunter der Rest 1 des Dividenden und unter diesem der Divisor 565 stand. Dieses Zahlenbild

$$\begin{array}{r} 4025 \\ 1 \\ \hline 565 \end{array}$$

war, wie wir sehen werden, auch noch für K. die Schreibweise der gemischten Zahl $4025\frac{1}{565}$, die das genaue Ergebnis der Division darstellt.

Hat der Divisor viele Stellen oder ist der Unterschied der Stellenzahlen von Dividend und Divisor groß, so empfiehlt K., entsprechend dem Verfahren bei der Multiplikation, eine Hilfstafel der Produkte des Divisors mit den Zahlen 1 bis 9 anzulegen.

Das fünfte Kapitel des ersten Buches lehrt die Bestimmung der Basis der Potenzen, d. h. das Ausziehen der n -ten Wurzel aus einer Zahl, wobei die ganze positive Zahl n auch größer als 3 sein darf. Die indischen Wurzelausziehungen und die bisher bekannt gewordenen islamischen beschränken sich auf Quadrat- und Kubikwurzeln. Doch gibt bekanntlich schon 'Omar Ĥaiyāmī, der 1123 starb, in seiner „Algebra“ an, numerische Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln beliebigen Grades entwickelt zu haben. Derartige Ausführungen 'Omars sind uns aber nicht erhalten.

K. besitzt zwei Verfahren der Wurzelauszziehung, die sich für $n > 2$ deutlich voneinander unterscheiden. Für keines dieser Verfahren beansprucht er grundsätzlich die Priorität. Nur gewisse Formen der Ausführung erklärt er als seine eigene Erfindung. Das erste Verfahren, das er nach Vorwegnahme der Quadratwurzel zunächst allgemein und dann am Beispiel der fünften Wurzel aus 44 240 899 506 197 ausführlich beschreibt, ist dem Inhalt nach genau die im Anfang des 19. Jahrhunderts wiederentdeckte, unter dem Namen Ruffini-Hornersches Verfahren bekannte Methode, nach der bekanntlich auch chinesische Mathematiker des Mittelalters algebraische Gleichungen niederen und höheren Grades aufzulösen verstanden. Das zweite Verfahren macht von der fertigen Formel des binomischen Lehrsatzes Gebrauch, wie uns das bei der Ausziehung zweiter und dritter Wurzeln geläufig ist.

In der äußeren Form handhabt K. das Ruffini-Hornersche Verfahren etwas anders, als es heute nach Ruffinis und Horners Vorgang üblich ist. Das Verfahren wurde nämlich zuerst auf der Staubtafel ausgeübt, und K.'s Ausführungsweise ist aus der Staubtafelrechnung durch Übertragung auf das Rechnen mit der Feder auf Papier hervorgegangen. Wie wir es beim Dividieren sahen, löscht er auch hier eine Zahl durch einen darunter oder darüber gezogenen Strich, worauf er die neue Zahl, die auf der Staubtafel an die Stelle der gelöschten tritt, unter bzw. über den Strich schreibt. Für die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln

führen uns K.'s mindestens 400 Jahre älterer Landsmann Kūšyār b. Labbān und dessen Schüler an-Nasawī in ihren Rechenbüchern^{46, 47} ein Staubtafelverfahren vor, und dieses erweist sich für die Quadratwurzel und besonders deutlich für die Kubikwurzel als dasselbe Ruffini-Horner'sche Verfahren, dessen Ausführung mit der Feder K. für beliebigen Wurzelexponenten lehrt. Da ich dies an anderer Stelle ausführlich⁵⁰ dargelegt und hierbei K.'s Zahlenbeispiel für die fünfte Wurzel wiedergegeben habe, begnüge ich mich hier damit, für das Ausziehen der Quadratwurzel aus 331781 die hierneben wiedergegebene letzte der drei von K. mitgeteilten Ausführungsformen zu erläutern, die er als die von ihm selbst ausgedachte und bevorzugte bezeichnet. Sie unterscheidet sich nur unwesentlich von den heute üblichen Formen.

Wir bezeichnen in dem ganzzahligen Teil 576 des Ergebnisses die höchste Stelle 5(00) mit a , die nächste 7(0) mit b und die letzte 6 mit c . Zunächst wird durch Probieren als größte ganzzahlige Lösung von

$$a^2 \leq q = 33(1781)$$

der Wert $a = 5(00)$ gefunden und ganz oben in die Zeile des Ergebnisses und ganz unten als letzte Zeile der Hilfszahlen eingetragen. Nachdem $a^2 = 25(0000)$ vom Radikanden $q = 33(1781)$ abgezogen ist, wird die unterste $a = 5(00)$ durch einen darübergesetzten Strich gelöscht, und an ihre Stelle tritt die darüber geschriebene, aber um eine Stelle nach rechts verschobene Zahl $2a = 10(00)$. Jetzt sucht man durch Probieren b als größte ganzzahlige Lösung von

$$(2a + b)b \leq q - a^2, \text{ also } 10(00)b + b^2 \leq 817(81)$$

und setzt die gefundene Zahl $b = 7(0)$ oben in die Zeile des Ergebnisses und unten neben die 10, so daß dort die Hilfszahl $2a + b = 107(0)$ entsteht. Nachdem man nun $(2a + b)b = 107(0) \cdot 7(0) = 749(00)$ oben gebildet und vom Rest des Radikanden abgezogen hat, wird die untere Hilfszahl 107(0) durch darüber gesetzten Strich gelöscht. An ihre Stelle tritt die um 7(0) vermehrte Zahl $2a + 2b = 114(0)$, die man, um eine Stelle nach rechts verschoben, über den Strich schreibt. Endlich findet man $c = 6$ als größte ganzzahlige Lösung von

$$(2a + 2b + c)c \leq q - a^2 - (2a + b)b, \text{ also } 1140c + c^2 \leq 6881$$

und verfährt wie früher. Nachdem man $(2a + 2b + c)c = 6876$ abgezogen hat, verbleibt als letzter Rest $r = 5$.

Die Ausziehung der Quadratwurzel beruht also auf der Formel

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + \dots$$

	5		7		6
3	3	1	7	8	1
2	5				
	8				
	7	4	9		
		6	8		
		6	8	7	6
					5
		1	1	4	6
	1	0	7		
	5				

Ausrechnung von
 $\sqrt{331781}$

⁵⁰ P. Luckey, Die Ausziehung der n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik. Math. Annalen 120 (1948), S. 217—274.

Bei Bahā'addīn³³ ist das Verfahren wesentlich dasselbe, aber insofern primitiver, als dieser späte Zeuge islamischer Rechenkunst wieder, so wie es früher z. B. Kūšyār und an-Nasawī auf der Staubtafel machten, die Glieder $2ab$ und b^2 nacheinander bildet und abzieht, und entsprechend $2(a+b)c$ und c^2 usw.

Als eigene Erfindung kann K. bei Quadratwurzelausziehung nur die Anordnung der Ausführung bezeichnen, insbesondere, wie er auch hervorhebt, die Neuerung, daß er jedes der Produkte $7 \cdot 107 = 749$, $6 \cdot 1146 = 6876$, also $b(2a+b)$ usw. wie wir Heutigen auf einmal bildet, hinschreibt und abzieht.

Wie Kūšyār, an-Nasawī und später Bahā'addīn fügt K., wenn die Quadratwurzel nicht aufgeht, zu dem ganzzahligen Ergebnis $T = a + b + \dots$ einen Bruch als Verbesserung v hinzu. Dieser ist im obigen Beispiel $v = \frac{5}{1153}$. Sein Zähler ist der letzte Rest $r = 5$, sein Nenner entsteht dadurch, daß man zu der unten stehenden letzten Hilfszahl $(2a + 2b + c) = 1146$ die oben stehende $c = 6$ und 1 hinzufügt. Das ist nichts anderes als die lineare Interpolation

$$v = \frac{5}{577^2 - 576^2} = \frac{5}{2 \cdot 576 + 1},$$

allgemein, wenn wir $a + b + \dots = T$ setzen,

$$v = \frac{r}{(T+1)^2 - T^2} = \frac{r}{2T+1}.$$

Für den Fall der n -ten Wurzel bringt K. die richtige Verallgemeinerung

$$v = \frac{r}{(T+1)^n - T^n}.$$

Für $n = 3$ gibt schon Kūšyār einen solchen Näherungsbruch an, aber mit einem Fehler, der bei an-Nasawī wiederkehrt. Diese Verbesserung v nennt K. „Korrektionsbruch“ (*kasr iṣṭilāḥī*). Der Nenner, sagt er, sei nach Maßgabe der „Korrektionsannäherung“ (*taqrīb iṣṭilāḥī*) die Differenz zwischen T^n und $(T+1)^n$. Diesen Nenner gewinnt er auch im allgemeinen Fall aus den bei seiner Wurzelausziehung nach dem Ruffini-Hornerischen Verfahren auftretenden Hilfszahlen. Doch steht ihm für die Ausrechnung von $(T+1)^n - T^n$ auch der binomische Lehrsatz zur Verfügung.

Denn nicht nur nach dem Ruffini-Hornerischen Verfahren, sondern auch mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes kann K. allgemein die bei der Ausziehung n -ter Wurzeln zu bildenden Hilfszahlen herstellen. Diesen Lehrsatz besitzt er als Verfahren der Berechnung von $(a+b)^n - b^n$ für natürliche Zahlen a, b, n . Bei der Bestimmung dieser Differenz bedürfte man, sagt er, der Kenntnis von Zahlen, die er „Elemente eines Grades“ nennt. Diese Zahlen sind nichts anderes als unsere Binomialkoeffizienten unter Ausschluß des ersten $\binom{n}{0}$ und des letzten $\binom{n}{n}$, deren jeder gleich 1

ist. So nennt er z. B. den Binomialkoeffizienten $\binom{5}{3}$ „Element des Grades Quadratokubus in der Welle⁵¹ des Kubus“ (*aṣl manzilat māl al-ka'b fī ṣaff al-ka'b*). Mit Hilfe dieser seiner Binomialkoeffizienten berechnet er z. B.

$$7^5 - 4^5 = (4 + 3)^5 - 4^5 = \binom{5}{1} \cdot 4^4 \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 4^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 4 \cdot 3^4 + 3^5.$$

Hierbei habe ich die von ihm in Worten und tabellarisch ausgeführte Rechnung in moderner Form, insbesondere unter Verwendung der uns geläufigen Symbole für die Binomialkoeffizienten, ausgedrückt.

Die eigentümliche Benennung der Binomialkoeffizienten rührt daher, daß er diese Bildungen aus seinem Wurzelausziehungsverfahren nach der Ruffini-Hornerschen Methode hervorwachsen läßt. Dies habe ich in der angeführten Arbeit⁵⁰ ausführlich gezeigt. Insbesondere erzeugt er sein

Grad des Quadrats	Grad des Kubus	Grad des Quadratoquadrats	(Grad des) Quadratokubus	(Grad des) Kubokubus	(Grad des) Quadratoquadratokubus	(Grad des) Quadratokubokubus	(Grad des) Kubokubokubus	die Wellen
							9	(Welle des) Quadratokubokubus
						8	36	(Welle des) Quadratoquadratokubus
				7	28	84		(Welle des) Kubokubus
			6	21	56	126		(Welle des) Quadratokubus
		5	15	35	70	126		(Welle des) Quadratoquadrats
	4	10	20	35	56	84		(Welle des) Kubus
	3	6	10	15	21	28	36	Welle des Quadrats
2	3	4	5	6	7	8	9	Welle der Seite

Al-Kāšī's Tafel der Binomialkoeffizienten

Dreieck der Binomialkoeffizienten, das ich hier wiedergebe, nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren. Diese Erzeugung läuft, nachdem die beiden Außenstrahlen seines dreieckigen Systems, die beide 2, 3, 4, ...

⁵¹ Das Wort *ṣaff* gebe ich durch „Welle“ wieder, weil die Übersetzung „Reihe“ zu Mißverständnissen führen könnte. Ich nehme das Bild von der Angriffswelle in der Schlacht.

lauten, niedergeschrieben sind, für die inneren Binomialkoeffizienten auf die Anwendung der Formel

$$\binom{n}{\nu} = \binom{n-1}{\nu-1} + \binom{n-1}{\nu}$$

hinaus, die K. in Worten ausspricht. Mit Rücksicht auf die Linksläufigkeit der arabischen Schrift habe ich in der Übersetzung der Tafel rechts und links vertauscht.

Im Vorwort (oben S. 7—8) bezeichnete K. seine Tafel der Binomialkoeffizienten ausdrücklich als von Vorgängern übernommen. Auch den binomischen Satz nimmt er nicht als eigene Erfindung in Anspruch. Das Dreieck der Binomialkoeffizienten besaßen bekanntlich auch die Inder und die Chinesen. Der binomische Lehrsatz für $n > 3$ scheint bei diesen Völkern bisher nicht nachgewiesen zu sein. Die Inder bildeten das Pascalsche Dreieck bei ihren auf Prosodie und Dinge ihrer Umwelt angewandten kombinatorischen Betrachtungen. Bei den Chinesen könnte man die Kenntnis des binomischen Satzes eher vermuten, da sie Gleichungen höheren Grades nach dem Verfahren von Ruffini und Horner lösten.

Das letzte, sechste Kapitel des ersten Buches handelt von der „Waage“ (*mīzān*). Als „Waage“ einer Zahl wird der Rest modulo 9 ihrer Quersumme bezeichnet, der in den Bereich 1, 2, ..., 9 fällt. „Waage“ heißt aber bei K. zugleich die mit solchen Resten ausgeführte Prüfung der Richtigkeit der Rechnung, also das, was wir die „Neunerprobe“ nennen. Er legt sie für die Multiplikation dar und vollzieht sie für die Division und die Wurzelausziehung an den inversen Beziehungen: „Quotient mal Divisor plus Rest gleich Dividend“ und „Wurzel hoch n plus Rest gleich Radikand“.

Ausdrücklich macht K. darauf aufmerksam, daß zwar, wenn die Rechnung stimmt, auch die Probe stimmt, daß aber nicht das Umgekehrte gelten muß. Es kann also nur aus dem Nichtstimmen der Probe ein Schluß gezogen werden, nämlich der, daß dann auch, falls bei der Probe kein Fehler gemacht wurde, die Rechnung nicht stimmt. Eine derartige Bemerkung, daß das Stimmen der Probe notwendig, aber nicht hinreichend für das Stimmen der Rechnung ist, vermisste ich in allen von mir eingesehenen islamischen Rechenwerken vor K., von denen diejenigen von al-Karaǧī⁵² und an-Nasawī⁴⁷ sogar ausdrücklich sagen: Wenn die Probe stimmt, so stimmt die Rechnung, wenn nicht, so ist die Rechnung falsch. Auch das Rechenbuch von al-Ĥwārizmī⁴⁴ drückt sich (S. 12—13) ähnlich aus, der Byzantiner Maximus Planudes⁵³ (starb um 1310) begeht denselben Fehler, und selbst Leonardo von Pisa sagt im *Liber*

⁵² A. Hochheim, *Al Kāfi fīl Hisāb* des ... Alkarkhī. I. II. III. 9., 10. u. 11. Progr. d. höh. Gewerbeschule (Guericke-Schule) zu Magdeburg. Magdeburg 1878—1880. — G. Levi Della Vida (Riv. d. studi orient. 14, 1934, S. 250—251) zeigt mit stichhaltigen Gründen, daß der Name des Gelehrten *al-Karaǧī*, nicht *al-Karḥī* lautet.

⁵³ Maximus Planudes, *Ὑποπορὰ κατ' Ἰνδοὺς*, ed. C. I. Gerhardt, Halle 1865. Übersetzung von H. Wäschoke, Halle 1878.

*abaci*⁵⁴ (1202, 1228) gelegentlich eines Beispiels (S. 8 Mitte): ... und wenn 1 übrigbleibt, wie man sich als Waage (*pensa*) gemerkt hat, so wird die Multiplikation jedenfalls (*utique*) richtig sein.

Nach Carra de Vaux⁵⁵ macht aber Taqiyaddīn b. 'Izzaddīn al-Ḥanbalī in seinem Werke „Das das Mark der Rechenkunst Enthaltende“ auf diesen Fehler der Rechner aufmerksam und erläutert an Beispielen, daß das Stimmen der Probe nur eine Bedingung, kein Beweis für die Richtigkeit der Rechnung sei. Über die Person des Taqiyaddīn ist nichts näheres bekannt, über seine Lebenszeit nur der Anhaltspunkt, daß die uns erhaltene Handschrift seines Werks (*Paris ar. 2469*) 1409 n. Chr. geschrieben wurde.

4. Die Bruchrechnung

Den Bruch (*kasr*) definiert K. (II, 1) als eine Quantität (*kamīya*), die in Verhältnis gesetzt ist zu (*tunabn ilā*) einem als eins angenommenen Ganzen (*ḡumla*), das Nenner (*muhriḡ*) genannt wird. Es liegt in der Eigenart dieser Definition, daß das Wort *kasr* manchmal mit „Zähler“, manchmal mit „Bruch“ zu übersetzen ist. Stellenweise nennt K. den Zähler deutlicher „Zahl des Bruches“ (*ʿadad al-kasr*).

Seine Einteilung der Brüche stelle ich unter Anwendung moderner Schreibweise in einer Übersicht zusammen. Hierbei verstehe ich unter m, n, m_1, n_1, m_2, n_2 usw. natürliche Zahlen. Die Beispiele sind aus den von K. angegebenen entnommen.

I. Einfach (*mufraḡ*): $\frac{m}{n}$, $n > 1$.

1. nackt (*mufarrad*): $m = 1$. Beispiele $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{20}$.
2. wiederholt (*mukarrar*): $m > 1$. Beispiele $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{11}$.

II. Zusammengesetzt (*murakkab*):

1. durch „und“ verbunden (*maʿtūf*)

a) zweigliedrig: $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$. Beispiel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

b) mit mehr als zwei Gliedern: $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \dots$. Beispiel $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

2. ausgenommen (= subtrahiert) (*mustatnā*)

a) zweigliedrig: $\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}$. Beispiel $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

b) mit mehr als zwei Gliedern: $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \dots - \left(\frac{m'_1}{n'_1} + \frac{m'_2}{n'_2} + \dots \right)$
Beispiel $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ ⁵⁶.

⁵⁴ Scritti di Leonardo Pisano pubbl. da B. Boncompagni, I, Rom 1857.

⁵⁵ Carra de Vaux, Sur l'histoire de l'arithmétique arabe. Bibl. Math. (2) 13 (1899), S. 33—36.

⁵⁶ Unklarheit in der Leidener Handschrift¹¹.

3. angehängt (*muḍāf*).

a) $\frac{m_1}{n_1}$ von $\frac{m_2}{n_2}$ $\left(= \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \right)$. Beispiele $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$ $(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})$,

$\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{8}$ $(= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8})$.

b) $\frac{m_1}{n_1}$ von $\frac{m_2}{n_2}$ von $\frac{m_3}{n_3}$ von ... $\left(= \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3} \cdot \dots \right)$.

Beispiel $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{8}$ von $\frac{1}{9}$ von $\frac{1}{10}$ $(= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10})$.

4. gebrochen (*munkasir*). Beispiele $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$, $\frac{1\frac{1}{2}}{5}$, $\frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{\frac{1}{2}}$

5. aus den vorhergehenden vier Arten oder einem Teil derselben zusammengesetzt. Beispiele

$$\left(\frac{1}{2\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{10}, \quad \frac{2\frac{3}{4}}{5} - \frac{5}{8}, \quad \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}, \quad \frac{2\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Für K.'s Schreibweise der einfachen und der zusammengesetzten Brüche (II, 2) mögen folgende Proben genügen, bei denen wieder die linksläufige Schreibrichtung in der Übersetzung in die rechtsläufige umgekehrt wurde.

al-Kāšī's Schreibung	$\frac{3}{1}$ $\frac{2}{2}$	$\frac{0}{3}$ $\frac{8}{8}$	$\frac{0}{1}$ $\frac{2}{2}$	$\frac{0}{1}$ $\frac{3}{3}$	oder	$\frac{0}{1}$ $\frac{2}{2}$	$\frac{0}{wa}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$ $\frac{3}{3}$	$\frac{0}{illā}$ $\frac{1}{4}$
Heutige Schreibung	$3\frac{1}{2}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$				$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$		
al-Kāšī's Schreibung	$\frac{0}{1}$ $\frac{4}{4}$ — oder $\frac{1}{6}$ — $\frac{3}{5}$	$\frac{0}{1}$ $\frac{4}{4}$ <i>li</i> $\frac{1}{6}$ <i>li</i> $\frac{3}{5}$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$ — oder $\frac{4}{4}$ $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$ <i>min</i> $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{5}$		$\frac{0}{1}$ $\frac{3}{3}$ <i>li</i> $\frac{1}{5}$ <i>min</i> $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$	$\frac{5}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{min}$ $\frac{8}{2}$ <i>wa</i> $\frac{11}{11}$	$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{min}$ $\frac{8}{2}$ $\frac{4}{wa}$ $\frac{9}{9}$	
Heutige Schreibung	$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{5}$		$\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{3}{5}}$			$\frac{1 \cdot 1}{1\frac{1}{2}}$	$\frac{5\frac{1}{2}}{8\frac{1}{11} + \frac{4}{9}}$		

Grammatiker „Anhängung“ (*idāfa*) nennen und die man auch als *status constructus* bezeichnet und gewöhnlich unter Verwendung eines Genetivs übersetzt: „Bruchbruch“ = „der Bruch eines Bruches“ (*kasr kasr*) sagt al-Ḥaṣṣār⁴⁵ (S. 24), der nach Suter wahrscheinlich dem 12. Jahrhundert angehört.

„Unaussprechbar“ nennt Abul-Wafā' einen Bruch, den man nicht durch die drei oben genannten Arten erhalten kann, wie z. B. „zwei Teile von elf“ ($= \frac{2}{11}$), „vier Teile von siebzehn“ ($= \frac{4}{17}$). Hierbei ist zu beachten, daß, wenn er sagt, ein Verhältnis lasse sich durch „Häupter“ ausdrücken, er darunter auch die Darstellung als Summe von zwei oder mehr als zwei Häuftern versteht, wie die Darstellung von $\frac{30}{100}$ durch $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, und daß „Anhängung“ auch mit mehr als zwei Brüchen vollzogen werden kann, wie bei „das Drittel des Achtels von einem Zehntel“ $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{240}$.

Bemerkenswert im Hinblick auf das altägyptische Rechnen erscheint mir, daß Abul-Wafā' in seinen Darstellungen $\frac{1}{2}$ wie einen Stammbruch behandelt, ferner seine Erklärung, daß die von ihm als „zusammen-

gesetzt“ bezeichneten Brüche $\frac{m}{n}$ ($n > m > 1$) als unschön betrachtet

und deshalb gemieden werden. Es sei, sagt er, z. B. schöner, $\frac{18}{100}$ durch $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ auszudrücken als durch $\frac{9}{50}$. Ferner führt er aus, daß die Schreiber und Finanzbeamten, für die er sein Rechenbuch abgefaßt hat, die unaussprechbaren Brüche verabscheuen und ihnen eine angenäherte Darstellung des Wertes durch Häufter vorziehen. So erscheine ihnen die Darstellung von $\frac{11}{11}$ durch den Näherungswert $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ oder den Näherungswert $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ schöner, als wenn sie sagen: „drei von elf Teilen“.

Diese Angaben über die Behandlung der Brüche durch Abul-Wafā', einen guten Vertreter der fruchtbarsten Zeit der islamischen Mathematik, habe ich vorausgeschickt, weil die ihn leitenden Gedanken in anderen Darstellungen der Bruchrechnung mehr oder weniger wiederkehren, so bei al-Karaǧī⁵², al-Ḥaṣṣār⁴⁵, Ibn al-Bannā'⁴⁸, al-Qalaṣādī⁴⁹. Die Einteilung im einzelnen und die Bezeichnungen haben allerdings gewechselt.

Wer die islamische Bruchrechnung nicht nur aus Rechenbüchern, sondern auch in lebendigen Anwendungen kennen lernen will, findet Stoff in arabischen Papyri. In den von A. Dietrich veröffentlichten arabischen Papyri aus Ägypten⁵⁰ aus der Zeit um 900 n. Chr. handelt es sich um Urkunden und Akten über Vermögen, Erbschaft, Handel, Pacht, Steuer und dergleichen. Hier beobachtet man eine Rechnung mit Geldwerten und anderen Größen, bei der als Brüche neben $\frac{1}{2}$ nur die Stammbrüche auftreten, deren Nenner die Teiler von 48 sind. Die Verwendung

⁵⁰ A. Dietrich, Arabische Papyri aus der Hamburger Staats- und Universitätsbibliothek (= Abhandl. f. d. Kunde d. Morgenlandes 22, 3), Leipzig 1937. Dietrich gibt weiteres Schrifttum an. Hingewiesen sei auf Arbeiten in „Der Islam“, wie: K. W. Hofmeier, Beiträge zur arabischen Papyrusforschung, I. Das System der arabischen Steuerverrechnung im 9. Jahrh. n. Chr. Der Islam 4 (1913), S. 97—120.

dieser Brüche stimmt offenbar weitgehend mit der Teilung der Gewichte, Münzen und sonstigen Maße überein.

Nun zu K.! Zu den „nackten“ „einfachen“ Brüchen seiner oben mitgeteilten Einteilung gehören Abul-Wafā's „Häupter“; in den „wiederholten“ „einfachen“ erkennen wir Abul-Wafā's „zusammengesetzte“ Brüche wieder. K. bemerkt, daß Brüche, deren Nenner größer als 10 ist, keinen besonderen Namen haben, aber „unaussprechbare“ Brüche treten bei ihm nicht als Einteilungsgruppe auf, und so zählt er auch Brüche wie $\frac{1}{11}$ und $\frac{1}{20}$ zu den nackten einfachen. In seinen Beispielen für die Schreibung von Brüchen kommen Brüche wie $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$ neben Brüchen mit den Nennern 2 bis 10 vor, ohne daß er es für nötig hält, etwa $\frac{1}{12}$ durch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{14}$ durch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ wiederzugeben. Er bemerkt nicht, daß „wiederholte“

„einfache“ Brüche, also Brüche $\frac{m}{n}$ für $m > 1$ zu meiden seien; auch in den Beispielen für die Schreibweise begegnen uns Brüche wie $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ neben Stammbrüchen. Als häßlich bezeichnet er nur die Verwendung derartiger Brüche in einer Form, bei der Zähler und Nenner nicht auf die kleinsten, zueinander teilerfremden ganzen Zahlen reduziert sind.

Wie die Bezeichnung „angehängt“, so sind auch die Bezeichnungen „durch ‚und‘ verbunden“ und „ausgenommen“ = „subtrahiert“ Fachausdrücke der arabischen Grammatik. Die Partikel *wa* = „und“, „plus“ für die Addition und die Partikel des Ausnehmens *illā* = „weniger“, „minus“ für die Subtraktion finden sich schon in der „Algebra“ von al-Ḥwārizmī²⁴. „Abgezogene“ („subtraktive“) Brüche werden auch von Ibn al-Bannā' und al-Qalaṣādī bei der Einteilung der Brüche genannt.

Obwohl, wie wir oben sagten, die „Anhängung“ (*idāfa*) sprachlich eine Verbindung zweier Wörter ohne Anwendung einer Präposition ist, gebraucht K. besonders bei Schreibung zusammengesetzter Brüche für die Anhängung das Verhältniswort *li* = „zu“, „von“, während er vor oder über dem Nenner eines Bruches das Verhältniswort *min* = „von“ anwendet, das also unseren Bruchstrich vertritt. Er lehrt, daß statt *min* auch ein Strich gesetzt werde, doch da dasselbe für *li* geschehe, so sei die Benutzung der Wörtchen *min* und *li* zweckmäßiger. $\frac{1}{2} \text{ min } \frac{1}{3}$ bedeutet also $\frac{1}{3}$, aber $\frac{1}{2} \text{ li } \frac{1}{3}$ bedeutet $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$ und ist gleich $\frac{1}{6}$.

Hinsichtlich der zusammengesetzten Brüche bemerkt K., daß man solche Zusammensetzungen bis ins Unbegrenzte machen könne. Wie man aus den Beispielen für die Schreibweise sieht, bedeutet seine Schreibung der zusammengesetzten Brüche unter Verwendung der Wörtchen *wa*, *illā*, *min*, *li* und des senkrechten Striches ein Mittel, beliebige rationale Verbindungen von Zahlen darzustellen. Das In-die-Länge-ziehen der Wörtchen *min* und *li* und die senkrechten Striche ersetzen unsere Klammern. Nicht eindeutig ist seine Schreibung von $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \frac{1}{2}}$, die auch den gleichwertigen Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \frac{1}{2}}$ bedeuten könnte. Offen bleibt ebenso, ob er unter

$a \text{ min } b \text{ li } c$ den Wert $\frac{a}{bc}$ oder $\frac{a}{b} \cdot c$ verstehen würde. Betreffend Addition und Subtraktion sagt K., es solle, wenn zu dem ganzen vorhergehenden Ausdruck etwas zu addieren oder von ihm etwas zu subtrahieren ist, ein senkrechter Strich neben diesen Ausdruck gesetzt und über den Strich das Wörtchen *wa* = „plus“ oder *illā* = „minus“ geschrieben werden. Beziehe sich die Addition oder Subtraktion nur auf einen Teil, so sei *wa* oder *illā* neben den (ersten Summanden oder den) Minuenden zu setzen. Daß es mehr auf die Kennzeichnung des gesamten Subtrahenden ankommt, scheint er zu übersehen. Es könnten, sagt K. ferner, auch andere Arten der Zusammensetzung von Brüchen vorkommen und erwähnt dabei die Quadratwurzel.

Als Beispiel für die Addition von Brüchen schreibt K. (II, 7) die Aufgabe $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 3\frac{5}{8} + 5$ in der Form

2	0	3	5
1	3	5	0
2	4	6	0

Würde man hier das Leerzeichen 0 als Zahl deuten, so ergäbe sich bei dem letzten Summanden das sinnlose Symbol $\frac{5}{0}$.

Bei K. finde ich nicht die aus al-Ḥaṣṣār, Ibn al-Bannā' und al-Qalaṣādī bekannte Darstellung von Brüchen als aufsteigende Kettenbrüche in der

Form $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{10}$ für $\frac{7}{10} + \frac{5}{3 \cdot 10} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10}$.

Bahā'addīn³³ hat wieder die alte Unterscheidung zwischen „ausprechbaren“ (*munṭaq*, Nesselmann: „artikulierte“) Brüchen — „das sind die bekannten neun Brüche“ — und „unaussprechbaren“ (*aṣamm*, Nesselmann: „stumm“) aufgegriffen. Ein kundiger Mathematiker mußte diese Ausdrücke *munṭaq* = *rationalis* und *aṣamm* = *surdus* bei der Einteilung der Brüche schon deshalb meiden, weil sie im Sinne von „rational“ und „irrational“ als Übersetzungen der griechischen Wörter *ῥητός* und *ἄλογος* bei der Einteilung der Größen in Gebrauch waren.

K.'s Ausführungen (II, 3) über Teilbarkeit einer Zahl durch eine andere (*tadāḥul* = „Aufgehen“), über Vorhandensein eines gemeinsamen Teilers (*taṣāruk* = „Teilergemeinschaft“), über „Teilerfremdheit“ (*tabāyun*) und über die Auffindung des größten gemeinsamen Teilers sind der Sache nach schon im siebenten Buch von Euklids Elementen enthalten. Inhaltlich nicht verschieden von der modernen Behandlung ist die Verwandlung ganzer Zahlen in Brüche (*taḡnīs* = „Umartung“, „Einrichten“) und unechter Brüche in gemischte Zahlen (*raf'* = „Erhöhung“) (II, 4) und die „Vereinheitlichung“ (*ittihād*) der Nenner, d. h. das Gleichnamigmachen mehrerer Brüche (II, 5).

In dem hier wiedergegebenen Beispiel werden die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}$ gleichnamig gemacht. Die tabellarische Anordnung bezeichnete K. im Vorwort als von Vorgängern übernommen. Die Gleichnamig-

1	1	1	2	5	3	7	2	3
1260	840	630	504	420	360	315	280	252
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1260	840	630	1008	2100	1080	2205	560	756
2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520
				0				
0	0	0	0	3		4		
2	3	4	5	6	7	8	9	10

Gleichnamigmachen der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{7}{7}, \frac{7}{8}, \frac{2}{9}, \frac{3}{10}$.

machung der neun ersten Stammbrüche ist in den Rechenbüchern als Beispiel beliebt.

Ganz oben sind zunächst die gegebenen Zähler, ganz unten die zugehörigen Nenner hingeschrieben. Von den Nennern werden 2, 3, 4 und 5 gelöscht, da sie in anderen Nennern enthalten sind. Das Löschen geschieht dadurch, daß man über jeden dieser Nenner einen Strich und über den Strich eine Null setzt. Als Zahlen, nämlich als Faktoren des Hauptnenners, würden wir statt der Nullen Einsen verlangen; hier ist aber 0 das Zeichen für das Leersein oder Ausscheiden. Dann betrachten wir die Beziehung zwischen dem größten der noch übrigen Nenner, 10, und den anderen. Die 9 ist zu 10 teilerfremd, deshalb bleibt 9 unverändert stehen. Die 8 hat mit 10 den Teiler 2 gemeinsam. Durch diesen gemeinsamen Teiler 2 dividieren wir 8 und lassen die erhaltene 4 an die Stelle der 8 treten, indem wir über die 8 einen Trennungsstrich und über diesen die 4 setzen. Die 7 bleibt, weil teilerfremd zu 10, bestehen, während 6 durch 3 zu ersetzen ist. Jetzt betrachtet man das Verhalten der unter 10 folgenden Zahl, 9, zu den links von ihr noch vorhandenen Zahlen 4, 7, 3. Die 3 ist durch 0 zu ersetzen. Die links von 9 folgende 4 ist gegen die links von ihr stehende 7 teilerfremd. Damit ist das Verfahren beendet, und $7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 = 2520$ ist der „gemeinsame Nenner“ (*al-muḥriḡ al-muṣṭarik*) jener Brüche. Es folgt die Bestimmung der Zähler. In der zweiten Feldderreihe stehen schließlich die gesuchten gleichnamigen Brüche.

Das Verfahren ist in seiner Technik offenbar aus einem Verfahren auf der Staubtafel hervorgegangen, wo jedesmal die neue Zahl an die Stelle der gelöschten geschrieben wurde. Für dieses Gleichnamigmachen der Brüche hat K. den Fachausdruck „Multiplikation des Aufnotierens“ (*ḡarb al-ta'riḡ*). Schon an-Nasawī gebraucht denselben Ausdruck für das auf der Staubtafel vollzogene Gleichnamigmachen zweier zu addierender

Brüche, z. B. für die Umwandlung von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ d. h. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ in $\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ d. h. $\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

$\frac{1}{24}$ und $\frac{1}{6}$. Er wählt nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, sondern das Produkt $6 \cdot 4 = 24$ der Nenner als Hauptnenner und findet die Zähler der beiden erweiterten Brüche dadurch, daß er in dem Aus-

gangsschema $\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{array}$ Multiplikationen übers Kreuz vornimmt: $1 \cdot 4 = 4$ und

$$1 \cdot 6 = 6.$$

K. gibt dann folgendes andere Verfahren zur Bestimmung des Hauptnenners der Nenner $n_1, n_2, \dots, n_k$ an. Ist der erste der Nenner, n_1 , teilerfremd gegen den zweiten n_2 , so bildet man $N_2 = n_1 \cdot n_2$, andernfalls

$N_2 = n_1 \cdot \frac{n_2}{t_2}$, wo t_2 der größte gemeinsame Teiler von n_1 und n_2 ist. Nun

verfährt man mit N_2 und n_3 ebenso wie vorher mit n_1 und n_2 und so fort und erhält schließlich N_k als Hauptnenner. Auch bei dieser Aufsuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen wird man zum Vergleich die entsprechenden Ausführungen in Buch VII der Elemente heranziehen.

Weiter lehrt K. (II, 6), wie man zusammengesetzte Brüche zu einfachen macht und (II, 7), wie man Brüche verdoppelt und hälftet, ferner Brüche und ganze Zahlen sowie Brüche und Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert (II, 8) und dividiert (II, 9). Die Vorschriften stimmen hierbei weitgehend mit den heute gebräuchlichen überein. Die Multiplikation der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ vollzieht er z. B. durch eine Rechnung, die in heutiger Darstellung so aussieht: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Hierbei hat er allerdings die Kürzung durch 3 erst nach Ausführung der Multiplikationen vorgenommen. Eine ganze Zahl oder einen Bruch dividiert er durch einen Bruch, indem er Dividend und Divisor auf den gemeinsamen Nenner bringt und als Ergebnis den Quotienten der Zähler der erweiterten Brüche ausrechnet.

In der Bruchrechnung kommt K. (II, 10) auf das Ausziehen der n -ten Wurzel zurück. Unter anderem finden wir die Vorschrift

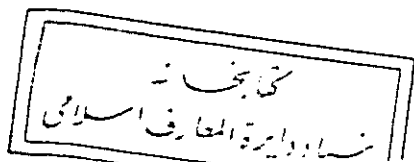
$$\sqrt[k]{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt[k]{n^{k-1} \cdot m}}{n}, \quad m, n, k \text{ natürliche Zahlen.}$$

Auf Grund von $\sqrt[T^2 + r]{} \approx T + \frac{r}{2T + 1}$ findet er

$$\sqrt[7]{\frac{1}{6}} \approx \left(\sqrt[4]{4 + 3\frac{1}{6}} \right) 2\frac{31}{5} = 2\frac{19}{30}.$$

„schärfer“ (adaqq) aber

$$\sqrt[7]{\frac{1}{6}} \approx \sqrt[4]{\frac{49}{6}} = \frac{\sqrt[4]{258}}{6} = \frac{16\frac{2}{3}}{6} = 2\frac{67}{99}.$$



Ferner berechnet er auf Grund von $\sqrt[3]{T^3 + r} \approx T + \frac{r}{(T+1)^3 - T^3}$

$$\sqrt[3]{30\frac{1}{2}} \approx \left(\sqrt[3]{27 + 3\frac{1}{2}} = 3 \frac{3\frac{1}{2}}{4^3 - 3^3} = \right) 3 \frac{3\frac{1}{2}}{37} = 3 \frac{7}{74}.$$

schärfer aber

$$\sqrt[3]{30\frac{1}{2}} \approx \sqrt[3]{\frac{61}{2}} = \sqrt[3]{\frac{244}{8}} = \frac{6\frac{28}{127}}{2} = 3 \frac{14}{127}.$$

Nach Ausführungen über die Verwandlungen von Brüchen in andere Brüche (II, 11) handelt der Schluß des zweiten Buches (II, 12) vom Rechnen mit den Brüchen *dānaq* (Mehrzahl *dawāniq* und *dawāniq*), *ṭassūḡ* (Mehrz. *ṭasāsīḡ*) oder *ṭasūḡ* und *ša'ir(a)* (Mehrz. *ša'irāl*). Die Wörter *dānaq* und *ṭassūḡ* sind persischen Ursprungs (vgl. E. I. I, S. 951; IV, S. 749); das arabische Wort *ša'ir* heißt „Gerste“ und *ša'ira* „Gerstenkorn“.

Die Geld- und Geschäftsleute und überhaupt alle Leute haben sich, sagt K., an das Rechnen mit diesen Brüchen gewöhnt. Es ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ Dānaq} &= \frac{1}{4} \text{ Dinār,} \\ 1 \text{ Ṭassūḡ} &= \frac{1}{4} \text{ Dānaq} = \frac{1}{16} \text{ Dinār,} \\ 1 \text{ Ša'ira} &= \frac{1}{4} \text{ Ṭassūḡ} = \frac{1}{16} \text{ Dānaq} = \frac{1}{64} \text{ Dinār.} \end{aligned}$$

Ša'ir kommt schon im Titel einer verlorengegangenen Schrift von al-Kindī (Mitte des 9. Jahrhunderts) vor: „Lehrbrief über die Linien und die Multiplikation bei der Ša'irzahl“⁶⁰. In den Rechenbüchern von Abul-Wafā⁶¹ und al-Karaḡī⁶² (I, S. 10, S. 23—24) finden sich auch andere derartige Untereinheiten, darunter solche, die in naher Beziehung zur Sexagesimalteilung stehen. Al-Karaḡī nimmt besondere Rücksicht auf die zu seiner Zeit (um 1000) in Bagdad und im Irāq gebräuchlichen Maße und Bruchbezeichnungen. Schon bei diesen beiden werden einige der Ausdrücke losgelöst von ihrer konkreten Bedeutung als Gewichte und Münzen zur Bezeichnung von reinen Brüchen der Einheit gebraucht, so 1 Dānaq für $\frac{1}{4}$. Derselbe Gebrauch liegt hier bei K. vor. Für ihn ist also:

$$1 \text{ Dānaq} = \frac{1}{4}, \quad 1 \text{ Ṭassūḡ} = \frac{1}{16}, \quad 1 \text{ Ša'ira} = \frac{1}{64}.$$

Unterhalb der Ša'ira wiederholt sich bei ihm dieselbe Teilungsweise:

$$1 \text{ Dānaq der Ša'ira} = \frac{1}{4} \text{ Ša'ira} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{256},$$

$$1 \text{ Ṭassūḡ der Ša'ira} = \frac{1}{16} \text{ Ša'ira} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{1024},$$

$$1 \text{ Ša'ira der Ša'ira} = \frac{1}{64} \text{ Ša'ira} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{4096}.$$

Die drei letzten Brüche sind „angehängte“ (*mudāf*). Die mathematische Anhängung wird hier sprachlich mit Hilfe des Verhältnisworts *min* vollzogen.

K. gibt eine fertige Tafel für die Produkte $x \cdot y$, wo x und y unabhängig voneinander jeden der 11 Werte

1 Dānaq ($l = 1, 2, 3, 4, 5$), m Ṭassūḡ ($m = 1, 2, 3$), n Ša'ira ($n = 1, 2, 3$)

⁶⁰ Arr-Nadīm¹² I, S. 256. Übersetzung¹² S. 11. — Ibn al-Qiftī's *Ta'riḥ al-Ḥukamā'*, hrsgg. von J. Lippert, Leipzig 1903, S. 370.

durchlaufen. Er bringt ferner Schemata für die Ausführung der Multiplikation und der Division von Zahlen, die nach diesen Brüchen entwickelt sind. Bei diesen Rechnungen werden die Teilprodukte aus der genannten Produktentafel entnommen. Treten bei einer Addition z. B. mehr als 3 Tassūğ auf, so wird für je 4 Tassūğ 1 Dānağ gesetzt. Die genannten Schemata entsprechen solchen für die Multiplikation und Division von Zahlen im Zehner- oder im Sechzigersystem, und der Verfasser spricht wie bei diesen von „Stellen“ (*marātib*). Bei Anwendung dieser Brüche wird eben jede Zahl $z < 1$ auf folgende einzige Weise nach fallenden Potenzen von 6 und 4 entwickelt:

$$z = \frac{a_1}{6} + \frac{b_1}{6 \cdot 4} + \frac{c_1}{6 \cdot 4^2} + \frac{a_2}{6^2 \cdot 4} + \frac{b_2}{6^2 \cdot 4^2} + \frac{c_2}{6^2 \cdot 4^3} + \dots$$

$$= \frac{a_1}{6} + \frac{b_1}{6 \cdot 4} + \frac{c_1}{6 \cdot 4^2} + \frac{1}{6 \cdot 4^2} \left(\frac{a_2}{6} + \frac{b_2}{6 \cdot 4} + \frac{c_2}{6 \cdot 4^2} \right) + \dots$$

Hierbei sind die a_i , b_i , c_i positive ganze Zahlen, und zwar ist $a_i < 6$, $b_i < 4$, $c_i < 4$.

Quotient	Divisor		Dānağ	Tassūğ	Ša'ir	Dānağ der Ša'ir	Tassūğ der Ša'ir	Ša'ir der Ša'ir
5 Dānağ	mal	die Zahl 4 Dānağ	4	1	1	1	2	2
		Rest der Zahl	3	1	1	2		
	mal	1 Tassūğ	0	3	3	5	2	2
		Rest der Zahl		3	3	2		
3 Tassūğ	mal	2 Ša'ira		0	1	3	2	2
		Rest der Zahl		3	1	4		
	mal	4 Dānağ		2	2	5	2	2
		Rest der Zahl		2	2	5	2	2
3 Ša'ira	mal	1 Tassūğ		0	2	3	2	2
		Rest der Zahl		2	2	2	2	2
	mal	2 Ša'ira			2	1	2	2
		Rest der Zahl			2	1	0	2
3 Ša'ira	mal	4 Dānağ			2	1	0	2
		Rest der Zahl			2	1	0	2
	mal	1 Tassūğ				3	1	2
		Rest der Zahl				3	1	2
							0	0

Division von 4 Dānağ + 1 Tassūğ + 1 Ša'ira + 1 Dānağ der Ša'ir + 2 Tassūğ der Ša'ir + 2 Ša'ir der Ša'ir durch 4 Dānağ + 1 Tassūğ + 2 Ša'ir.

K.'s Muster für die Division von

$$z_1 = \frac{4}{6} + \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 4^2} + \frac{1}{6^2 \cdot 4^2} + \frac{2}{6^2 \cdot 4^3} + \frac{2}{6^2 \cdot 4^4}$$

$$\text{durch } z_2 = \frac{4}{6} + \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{2}{6 \cdot 4^2}$$

gebe ich wieder. Die Division geht auf und das Ergebnis ist

$$5 \text{ Dānaq, } 3 \text{ Ṭassūḡ, } 3 \text{ Ša'ira, d. i. } \frac{5}{6} + \frac{3}{6 \cdot 4} + \frac{3}{6 \cdot 4^2}.$$

Die Bestimmung der einzelnen Stellen des Quotienten und diejenige der abzuziehenden Teilprodukte wird natürlich gewaltig erleichtert durch die Benutzung der erwähnten Multiplikationstafel, aus der man z. B. ohne weiteres entnehmen kann, daß das erste abzuziehende Teilprodukt 5 Dānaq mal 4 Dānaq den Wert 3 Dānaq + 1 Ṭassūḡ + 1 Ša'ira + 2 Dānaq

der Ša'ira hat $\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 4^2} + \frac{2}{6^2 \cdot 4^2} \right).$

In dem Rechenmuster liegt ein Positionssystem vor, bei dem die Spaltenüberschriften den Stellenwert angeben. Ich könnte mir vorstellen, daß derartigen schriftlichen Rechnungen im Stellungssystem solche auf dem Rechenbrett (Abakus) vorhergingen, wie sie Menninger⁶¹ für die fünf kleinen Linien der Salaminischen Tafel annimmt. Es besteht für mich kein Zweifel, daß der oben (S. 41) genannte Lehrbrief al-Kindi's „Über die Linien“ vom Rechnen auf dem Rechenbrett handelte⁶². Der Zusatz „und die Multiplikation bei der Ša'irzahl“ deutet darauf hin, daß die Schrift auch Abakusrechnungen mit solchen Brüchen lehrte. Kapp⁶³ hat sich um die Erklärung des Titels bemüht, ohne auf diese Lösung zu kommen.

5. Das Rechnen mit Sexagesimalzahlen

Das dritte Buch des Schlüssel behandelt „das Rechnungsverfahren der Astronomen“, d. i. das Rechnen mit Sexagesimalzahlen. K. teilt die für die Benutzung der Buchstaben-ziffern (Gummalziffern) gebräuchliche Bezeichnung „Gummalrechnung“ (*ḥisāb al-ḡummāl*) mit und sagt zutreffend,

⁶¹ K. Menninger, Kulturgeschichte der Zahlen. Breslau 1934, S. 210 bis 223.

⁶² Die Schrift wird in dem 987 n. Chr. erschienenen *Fihrist*⁴² unter denjenigen Werken al-Kindi's aufgezählt, die sich auf das Rechnen beziehen. Vielleicht muß der erste Teil ihres Titels richtig heißen: „Über das Rechnen auf den Linien“ (*fi-ḥisāb fi-ḥuṭūt*).

⁶³ A. G. Kapp, Arabische Übersetzer und Kommentatoren Euklids. Isis 22—24 (1934—35), siehe 24, S. 42.

diese Rechnung komme besonders in den Tafelwerken und sonstigen Schriften der Astronomen zur Anwendung.

Folgendes sind die für die reine Sexagesimalrechnung, die nur Zeichen für 0 bis 59 braucht, erforderlichen Buchstabenzeichen, denen ich die entsprechenden griechischen Buchstabenzeichen, ferner die von mir gewählte Umschrift der Buchstaben und ihre Zahlbedeutung beifüge.

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50

Für 10, 30, 40, 50 werden die oberen arabischen Buchstaben gebraucht, wenn diese Zeichen allein stehen, d. h. wenn die zugehörige Einerziffer 0 ist. Die unteren Zeichen für diese Zehner wendet man an, wenn diese Buchstaben nach links verbunden sind, nämlich mit dem Buchstaben einer von 0 verschiedenen Einerziffer.

Bekanntlich liegt hier die alte, auf den Ursprung des arabischen Alphabets zurückgehende Buchstabenfolge zugrunde, die man nach den ersten vier Buchstaben als Abğad bezeichnet⁴⁴. K. gibt die üblichen arabischen Merkwörter des Abğad wieder. Er erwähnt, daß man die Buchstaben für 2, 3, 7 und 10 ohne die ihnen sonst zukommenden Punkte schreibt und bei dem Buchstaben für 3 den Bogen wegläßt, um ihn von dem Buchstaben für 8 zu unterscheiden. Obwohl man diese sehr nützlichen Unterscheidungsvorschriften in besseren Handschriften der verschiedensten Zeiten befolgt sieht, ist die unglückliche arabische Buchstabenschrift, bei der z. B. das Verschwinden eines Punktes die Zahl ٥٥ = 55 in die Zahl ١٥ = 15 verwandelt, eine Quelle zahlreicher Unklarheiten in Rechnungen und astronomischen und trigonometrischen Tafeln.

Für Null als Sexagesimalstelle finde ich in den von mir benutzten Handschriften von Werken K.'s das Zeichen ٠. Al-Birūnī macht in seinem *Taḥkim*⁴⁵ (S. 40—42) ausführliche Angaben über die Schreibung der „Gummalbuchstaben“. Unter anderem empfiehlt er für $k = 20$ die oben von uns gewählte breite Form 𐤀, damit keine Verwechslung mit $j = l = 30$ vorkomme. Zur Ausfüllung einer leeren Stelle bei der Gummalrechnung, also als Nullzeichen, verlangt er einen Kreis, über dem sich ein ihn berührender Strich befindet, also das Zeichen 𐤁. Der Strich sei zur Unterscheidung des Zeichens von $o = 5$ erforderlich; bei den

⁴⁴ Vgl. Weil, *Abğad*, E. I. I, S. 72—73.

indischen Ziffern, wo al-Birūnī wie andere die Null als bloßen Kreis darstellt, sei der berührende Strich unnötig, weil es da kein „gebe“.

Woepcke⁶⁵ hat die sexagesimalen Nullzeichen in griechischen und arabischen Handschriften verglichen und kommt zu dem Ergebnis: Alle arabischen sexagesimalen Nullzeichen gehen auf das griechische Zeichen zurück, das aus einem Omikron mit darübergesetztem waagerechten Strich besteht und wahrscheinlich οὐδέν = „nichts“ bedeutet. Nach Heath⁶⁶ bedeutet es οὐδέμια μοῖρα, οὐδὲν ἐξήκοστόν. Unter den von Woepcke beobachteten arabischen Nullzeichen in Sechzigerzahlen befinden sich auch die Zeichen $\bigcirc$ und ζ , deren letzteres dadurch entstanden sein kann, daß man $\bigcirc$ in einem Zuge schrieb. Das von Woepcke erwähnte Zeichen $\cap$ wird in ähnlicher Form in der dem Berliner Institut gehörigen Handschrift der „Feinheiten“ des Sibṭ al-Māridīnī⁶⁷ überwiegend gebraucht. Die Gothaer Handschrift desselben Werkes⁶⁷ gibt (4b 10) dieses Zeichen in der Form III an, benutzt aber gewöhnlich das Zeichen ζ .

Al-Birūnī wirft im *Taḥkīm* (S. 40) die Frage auf, warum man nicht für die Zahlen die Reihenfolge des (zu seiner Zeit längst eingeführten) Alphabets *a b t t usv* gewählt habe und gibt auf diese Frage die vernünftige Antwort: Dies wäre natürlich möglich gewesen, „aber man ordnete diese Zahlen nach den Ġummalbuchstaben an, weil diese Anordnung unter den Vorgängern der Araber, nämlich den „Schriftbesitzern“, verbreitet war“. Unter „Schriftbesitzern“ verstand der Prophet Muhammed die Juden und Christen als Inhaber göttlicher Offenbarungsschriften, aber sehr früh hat der Islam den Kreis der Buchbesitzer erweitert. So wurden die iranischen „Magier“ in ihn einbezogen, aus denen al-Ḥwārizmī entsprossen zu sein scheint, und selbst die heidnischen Ḥarrānān, aus denen so hervorragende Mathematiker und Astronomen wie Ṭābit b. Qurra und der Muslim al-Battānī hervorgingen, sollen geltend gemacht haben, daß sie „Schriftbesitzer“ seien.

Die Reihenfolge der Ġummalbuchstaben entspricht dem hebräischen und dem aramäischen Alphabet, und in diesen Sprachen haben die Buchstaben, die den oben genannten 15 arabischen Buchstaben und noch weiteren entsprechen, dieselbe Zahlenbedeutung wie im Arabischen. Hervorgehoben sei, daß al-Birūnī nichts von einer Übernahme der ent-

⁶⁵ F. Woepcke, Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident, Rom 1859, S. 70. — F. Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Journal Asiatique (8) 1 (1863), S. 27—79, S. 234—290, S. 442 bis 529. S. S. 465—472.

⁶⁶ Th. Heath, A History of Greek Mathematics, I, Oxford 1921, S. 45.

⁶⁷ Sibṭ al-Māridīnī, Feinheiten der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten (*Raqā'iq al-ḥaqā'iq fī ḥisāb ad-daraj wad-daḡā'iq*). Handschrift II. 49 des Berliner Inst.¹⁰). Nach den Schlußzeilen (45b) wurde diese Handschrift am 13. Šawwāl 1238 d. H. = 23. 6. 1823 abgeschlossen. — Handschrift Nr. 1390 der Herzogl. Bibl. Gotha. (Vgl. Katalog Pertsch III, 3, S. 49.)

sprechenden griechischen Buchstaben sagt⁶⁸. Es ist mir nichts darüber bekannt, ob etwa islamische Mathematiker in früher Zeit Zahlen mit den griechischen Buchstaben schrieben, die den Übersetzern in griechischen mathematischen und besonders astronomischen Handschriften begegneten. Bekanntlich finden wir diese Schreibung besonders bei der Angabe von Geldbeträgen in den oben (S. 30) erwähnten arabischen Akten und Urkunden aus Ägypten aus der Zeit um 900 n. Chr. Hier wurden die griechischen Zahlenbuchstaben aus dem Brauch der vorislamischen Zeit übernommen⁶⁹.

Die Einerstelle seiner Sexagesimalzahlen bezeichnet K. mit „Grad“ (*daraġa*). Den Grad definiert er als den 360-ten Teil des Kreisumfangs, aber an einer Stelle, die wir bald anführen werden, sagt er: „Grad oder andere ganze Zahlen“ und deutet damit an, daß die Einheit der in der Sexagesimalstelle „Grad“ stehenden Zahl die unbenannte 1 sein kann.

Die Bezeichnung „Grad“ (*daraġa* = „Leiter“, „Stufe“, „Sprosse“) war ursprünglich den Dreihundertsechzigstel der Ekliptik vorbehalten, nach Meinung al-Baġdādī's, eines Zeitgenossen von K., weil die Sonne in den Graden auf- und absteigt (at-Tahānawī⁷⁰ I, S. 461). Die Dreihundertsechzigstel anderer Himmelskreise, insbesondere des Äquators, hießen, wie an der angeführten Stelle gesagt wird, „Teile“ (*aġ-ā*). Mit letzterem Wort wurden auch die ebenfalls sexagesimal untergeteilten Einheiten bezeichnet, in denen man den Durchmesser maß und die Werte der trigonometrischen Funktionen ausdrückte. Wie die griechischen, so setzten auch die meisten islamischen Astronomen den Durchmesser zu 120 solcher „Teile“ an; Abul-Wafā' aber und al-Bīrūnī in seiner späteren Zeit nahmen den Durchmesser gleich 2 „Teilen“, den Halbmesser also gleich 1 „Teil“. Das Wort „Grad“ (*daraġa*) wurde auf die Dreihundertsechzigstel beliebiger Kreise ausgedehnt. K. gebrauchte es im „Schlüssel“ auch für die Einer einer beliebigen Sexagesimalzahl, und so tun es auch andere. Für diese Einer mag die andere zur Verfügung stehende Bezeichnung, „Teile“, ungeeignet erschienen sein, da die Einer eben Ganze und nicht Bruchteile sind.

Den Sexagesimalzahlen die Bedeutung von Bögen oder Winkeln zu geben, hat bei Additionen, Subtraktionen und Divisionen praktischen Sinn, bei Multiplikationen nur dann, wenn ein Winkel mit einer unbenannten Zahl multipliziert wird. Daß die Multiplikation, Division und Wurzelausziehung der Sexagesimalzahlen aber fast ausschließlich für Fälle in Betracht kommen, in denen diese Zahlen nicht Bögen oder Winkel sind, scheinen manche sich nicht genügend vor Augen zu halten, so Sibṭ al-Māridīnī, der, wie wir sehen werden, das Produkt zweier Bögen als Bogen behandelt.

⁶⁸ Vgl. zu diesen Fragen: S. Gandz, Der Hultsch-Cantorsche Beweis von der Reihenfolge der Buchstaben in den mathematischen Figuren der Griechen und Araber. Quell. Stud. Math. B 2 (1933), S. 81–97.

⁶⁹ Vgl. Dietrich⁶⁰; Woepeke, Sur l'introduction⁶⁵ S. 55 u. folg.; Woepeke, Mém. sur la propag.⁶⁵, S. 237; Cantor¹⁰⁰, I³, S. 709; Ruska, Sitzgsber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss., Phil.-hist. Kl. 1917, S. 36 u. folg.

K. besitzt, vom „Grad“ anhebend, neben der unbegrenzten absteigenden „Kette“ der Sexagesimalstellen der Brüche „Minuten“, „Sekunden“ usw. auch die unbegrenzte aufsteigende Kette: „einmal Erhöhtes“, „zweimal Erhöhtes“ usw. für die ganzen Zahlen von Graden. Mit anderen Worten kann er eine Zahl darstellen in der Form

m -mal Erhöhtes.....	zweimal Erhöhtes.....	einmal Erhöhtes.....	Grade	Minuten	Sekunden
↓	↓	↓	↓	↓	↓
$a_m \cdot 60^m + \dots + a_2 \cdot 60^2 + a_1 \cdot 60^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} + \dots + a_{-n} \cdot 60^{-n}$					

wobei jedes a_i der Menge der Zahlen 0, 1, 2, ..., 58, 59 angehört.

Diese Koeffizienten a_i spielen dieselbe Rolle, wie im Zehnergefüge die Ziffern 0, 1, ..., 8, 9. K. bezeichnet sie demgemäß als die „Sexagesimalziffern“ (*al-arqām as-sittiniya*). Dieser Ausdruck, den auch wir gebrauchen wollen, erscheint um so treffender, als K. wie die anderen islamischen Mathematiker die Sexagesimalzahlen im Positionssystem schreibt. Nicht nur die aus einem einzigen Gummalbuchstaben bestehenden dieser Sexagesimalziffern, wie $\beth = 1$, $\beth = 9$, $\beth = 40$, sondern auch die aus zwei solchen Buchstaben zusammengesetzten, wie

$\beth = 11$, $\beth = 53$ wirken mehr oder weniger wie ein einziges Zifferzeichen, wozu der Umstand beiträgt, daß die für die Zehnerstellen erforderlichen Buchstaben zu denjenigen arabischen Buchstaben gehören, die nach links verbunden werden, wenn ihnen der Buchstabe einer Einerstelle folgt. Ein in der Praxis des Sexagesimalrechnens geübter Mann wie K. konnte also beim Rechnen fast vergessen, daß diese 60 Sexagesimalziffern in Sprache und Schreibung eigentlich ein- oder zweistellige dekadische Zahlen sind.

Ein einzelnes Glied $a_i \cdot 60^i$ einer Sexagesimalentwicklung nennt K. „einfache Zahl“ (*ʿadad mufrad*).

Eine derartig nach fallenden Potenzen von 60 entwickelte Zahl will ich als reine Sexagesimalzahl bezeichnen. Wesentlich für diesen Begriff der reinen Sechzigerzahl ist, daß alle Sexagesimalziffern, d. i. alle Koeffizienten a_i , insbesondere auch die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ der aufsteigenden Kette, dem Bereich 0, 1, ..., 59 angehören. Die Griechen hatten keine reinen Sexagesimalzahlen, weil sie die ganzen Zahlen nicht nach Potenzen von 60 entwickelten. Ptolemäus gibt im *Almagest*⁷⁰ die Länge des Jahres in Tagen zu 365 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, d. i. $365 + \frac{1}{4} \cdot 60^{-1} + \frac{1}{8} \cdot 60^{-2}$ an. Für das Quadrat der Zehneckseite, die in „Teilen“ (*τμήματα*) gemessen 37 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{55}$ beträgt, d. i. $37 + \frac{1}{4} \cdot 60^{-1} + \frac{1}{55} \cdot 60^{-2}$ Hundertzwanzigstel des Durchmessers, findet er (S. 34, Z. 16) 1375 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{15}$, d. i. $1375 + \frac{1}{4} \cdot 60^{-1} + \frac{1}{15} \cdot 60^{-2}$, und in dieser Darstellungsweise folgt ihm sein Kommentator Theon von Alexandrien, der $\mu\omicron\lambda\upsilon\alpha\iota$ statt $\tau\mu\eta\mu\alpha\tau\alpha$ sagt und die genannte Quadratzahl genauer zu 1375 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{25}{1000}$ aus-

⁷⁰ Cl. Ptolemaeus, *Synt. math.* ed. Heiberg, I, S. 208, Z. 12.

rechnet⁷¹. Derselbe Theon gibt bei einer Divisionsaufgabe⁷² den Divi-
 denden in der Form 1515 20 15 an, d. i. $1515 + 20 \cdot 60^{-1} + 15 \cdot 60^{-2}$.

Hier sehen wir also die Ganzen dekadisch und die Brüche sexagesimal
 ausgedrückt, d. h. die Zahlen sind in der Form

$a_m \cdot 10^m + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} + \dots + a_{-n} \cdot 60^{-n}$
 dargestellt, wobei die Koeffizienten der Potenzen von 10 und die Einer
 aus der Menge 0, 1, ..., 9 und diejenigen der Potenzen von 60 aus der
 Menge 0, 1, ..., 59 genommen sind. Eine solche Zahl, die nach der einen
 Seite im Zehnergefüge einherschreitet, nach der anderen im Sechziger-
 gefüge schwimmt, möchte ich „amphibisch“ nennen.

Auch bei den islamischen Mathematikern sind die reinen Sechziger-
 zahlen nicht allgemein verbreitet, und manche Rechenbücher behandeln
 die Sechzigerbrüche, nicht aber die ganzen Sechzigerzahlen. Daß K.
 auch die Sechzigerentwicklung der ganzen Zahlen von Vorgängern über-
 nommen hat, geht unzweideutig aus dem „Schlüssel“ hervor. Nachdem
 er die „auf der Seite des Absteigens unbegrenzte Kette“ der Sexagesimal-
 brüche gekennzeichnet hat, fährt er (III, 1) fort:

*Und Folgendes wird auf der Seite des Aufsteigens gemacht: Sie (die
 Astronomen) erhöhen in ihren Rechnungen für jede 60 Grad oder andere
 ganze Zahlen um eins, das „einmal Erhöhtes“ heißt, und erhöhen für jede
 60 „einmal Erhöhtes“ zum „zweimal Erhöhten“ und nach diesen fortgesetzt
 weiter durch das „dreimal Erhöhte“, dann (das) „viermal (Erhöhte)“, und
 so (fort). Einige nennen sie: „das Erhöhte“, „das Gezweite“, „das Ge-
 dritte“, „das Gevierte“ bis ins Unbegrenzte.“*

Durch die Wortbildungen „das Gezweite“, „das Gedritte“ usw. versuche
 ich die Kunstwörter الثاني, الثالث usw. zu übersetzen, die als Gegenstücke
 der Wörter (ānī = „Zweites“ = „Sekunde“, tālīt = „Drittes“ = „Terze“
 usw. gebildet sind

K.'s Beispiel für die Addition dreier Sexagesimalzahlen zeige zugleich
 seine Schreibung dieser Zahlen.

Sekunden	Minuten	Grad	Einmal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Namen der Stellen
an	m	hi	k		Die Zahlen, die wir addieren wollen
wl	hm	k	bm		
i	wi	zm	l		
zl	hm	wk	gl	a	Das Ergebnis

Addition dreier Sechzigerzahlen

⁷¹ Theon von Alexandrien, Kommentar zu Buch I des Almagest. Aus-
 gabe von A. Rome, Città del Vaticano 1936, S. 458—460. Ausgabe von
 Halma, Paris 1821, S. 117—118.

⁷² Ausgabe von Rome S. 461—462. Ausgabe von Halma S. 118—119.

Hier habe ich die Sechzigerstellen und auch die Umschriftbuchstaben innerhalb der einzelnen Stellen in der von rechts nach links laufenden Anordnung des Urtextes wiedergegeben. Die Addition wird von links nach rechts vollzogen, ebenso die Subtraktion; es wird also bei diesen Rechnungsarten mit der niedrigsten Stelle begonnen. So machte es K. auch beim Rechnen mit den indischen Ziffern, doch hatte er bei diesen wie wir die niedrigste Stelle am rechten Ende der Zahl.

Es ist natürlich, beim Übersetzen der Sexagesimalrechnungen die bei uns übliche rechtsläufige Schreibrichtung zu wählen, die uns auch von der Schreibung der Sechzigerzahlen in griechischen Texten her geläufig ist. Deshalb gebe ich die obige Rechnung durch folgendes Muster wieder, in welchem die Addition von rechts nach links ausgeführt wird.

Namen der Stellen	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden
Die Zahlen, die wir addieren wollen		20 42 30	18 20 47	40 48 16	51 36 10
Das Ergebnis	1	33	26	45	37

Addition dreier Sechzigerzahlen

In fortlaufendem Text, wo K. nicht, wie in dieser Tabellenrechnung, die Stellen durch Spaltenstriche trennt und den Stellenwert durch Spaltenüberschriften angibt, nennt er den Stellenwert der niedrigsten Stelle. Hiernach kann das Ergebnis der oben ausgeführten Addition als *1 33 26 45 37 Sekunden* ausgedrückt werden. Ursprünglich sieht das so aus: *Sekunden z l h m w k g l a* und ist von rechts nach links zu lesen. Es liegt also eine klare Schreibung im sexagesimalen Positionssystem vor.

Wenn wir griechische oder arabische Sexagesimalzahlen durch unsere Ziffern übersetzen, müssen wir uns immer vergegenwärtigen, daß im Griechischen stets und im Arabischen überwiegend die Sexagesimalziffern nicht wie bei uns als ein- oder zweistellige Zahlen durch Ziffern im dekadischen Positionssystem, sondern durch Buchstaben ausgedrückt sind, und daß z. B. das Zeichen $\alpha = \leq$ für 20 mit dem Zeichen $\beta = \cup$ für 2 nichts gemein hat. Bei der Schreibung mit unseren Ziffern können wir z. B. die Zahl *23 7 13 45 34 Sekunden*, wenn wir 07 statt 7 schreiben, als eine nach fallenden Potenzen abwechselnd von 10 und 6 dargestellte Zahl auffassen:

$$2 \cdot 6^2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 6^2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 3 + 4 \cdot 6^{-1} \\ + 5 \cdot 6^{-1} \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 6^{-2} \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 6^{-2} \cdot 10^{-2}.$$

Diese Auffassung, die bei der griechischen und arabischen Schreibweise nicht so bequem möglich ist, erleichtert manche Rechnungen, z. B. kann man in der obigen Tabellenrechnung ziffernweise von rechts nach links addieren und dabei abwechselnd Zehnerübertragungen und Sechserübertragungen vornehmen, ähnlich wie K. bei Addition von Zahlen, die in Dānaq, Ṭassūḡ und Šaʿir ausgedrückt sind, abwechselnd Viererübertragungen, Viererübertragungen und Sechserübertragungen vorzunehmen hat.

Mit seinen reinen Sexagesimalzahlen vollzieht K. reine Sexagesimalrechnungen. Weder bei den Griechen, noch z. B. bei an-Nasawī und al-Bīrūnī beobachten wir reine Sexagesimalrechnungen. Um den Unterschied zu beleuchten, stellen wir einem Multiplikationsbeispiel bei an-Nasawī ein solches bei K. gegenüber.

Im vierten Kapitel des vierten Buches seiner Schrift „Das Zufriedenstellende über das indische Rechnen“⁷³ will an-Nasawī (Anfang des 11. Jahrh.) 4 Grad 15 Minuten 20 Sekunden mit 6 Grad 20 Minuten 13 Sekunden multiplizieren. Zu diesem Zweck verwandelt er jeden der beiden Faktoren schrittweise in „die Art des letzten Bruches“ (*ḡins al-kaṣr al-aḥīr*), d. h. in Einheiten der letzten Sexagesimalstelle, hier also beide in Sekunden:

$$4 \text{ Grad} + 15 \text{ Min.} = (4 \cdot 60 + 15) \text{ Min.} = 255 \text{ Min.}$$

$$255 \text{ Min.} + 20 \text{ Sek.} = (255 \cdot 60 + 20) \text{ Sek.} = 15320 \text{ Sek.}$$

$$\text{Ebenso: } 6 \text{ Grad } 20 \text{ Min. } 13 \text{ Sek.} = [(6 \cdot 60 + 20) \cdot 60 + 13] \text{ Sek.} = 22813 \text{ Sek.}$$

Diese Verwandlung einer Sechzigerzahl in Einheiten ihrer niedrigsten Stelle bezeichnen al-Bīrūnī und andere als „Ausbreiten“ (*bast*). Mit demselben Ausdruck wird die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch bezeichnet, z. B. die Verwandlung von $3\frac{1}{2}$ in $\frac{23}{2}$. In der Tat sind ja die einzelnen Schritte der „Ausbreitung“ einer Sechzigerzahl nichts anderes als Verwandlungen gemischter Zahlen in unechte Brüche mit dem Nenner 60, z. B.

$$255 \text{ Min.} + 20 \text{ Sek.} = 255\frac{20}{60} \text{ Min.} = \frac{15320}{60} \text{ Min.} = 15320 \text{ Sek.}$$

Nun rechnet an-Nasawī rein dekadisch das Produkt der beiden, natürlich in den „indischen“ Ziffern geschriebenen Faktoren aus:

$$15320 \text{ Sek. mal } 22813 \text{ Sek.} = 349495160 \text{ Quarten.}$$

Diese Zahl von Quarten ist dann wieder durch die höheren Sexagesimalstellen bis herab zu den Quarten auszudrücken. Man dividiert sie durch 60, den ganzzahligen Teil des Quotienten wieder durch 60 und so fort, bis der Quotient kleiner als 60 ist. Der ganzzahlige Teil dieses letzten Quotienten und die Reste vom letzten bis zum ersten bilden die Sexagesimalstellen des gesuchten Produktes:

⁷³ An-Nasawī¹⁶ 78a 16—23.

349495160 Quarten	=	5824919 Terzen	+	20 Quarten
5824919 Terzen	=	97081 Sekunden	+	59 Terzen
97081 Sekunden	=	1618 Minuten	+	1 Sekunde
1618 Minuten	=	26 Grad	+	58 Minuten

349495160 Quarten = 26 Grad 58 Min. 1 Sek. 59 Terzen 20 Quarten

Diese dem „Ausbreiten“ entgegengesetzte Verwandlung in die höheren Einheiten heißt „Erhöhen“ (*rafʿ*). Eine Verwandlung wie die von $\frac{23}{7}$ in $3\frac{2}{7}$ wird ebenso bezeichnet (vgl. oben S. 32). Die Bezeichnungen „einmal Erhöhtes“ (*marfūʿ marratan*) usw. leiten sich aus diesem Prozeß der Erhöhung ab.

So wie hier an-Nasawī, verwandelt auch dessen Zeitgenosse al-Birūnī (973—1048) in den zahlreichen ausgeführten trigonometrischen Rechnungen seines *Tahdīd*⁷¹ Sexagesimalzahlen, die er multiplizieren, dividieren, potenzieren oder radizieren will, in die Einheiten ihrer niedrigsten Stellen — für das Wurzelausziehen nötigenfalls einer noch tieferen Stelle —, um die Rechnung dekadisch auszuführen und erst das Schlussergebnis wieder auf die sexagesimale Form zu bringen. Die Ausgangszahlen seiner Rechnungen sind nämlich meistens Sinusfunktionen, die er als Sinusse gegebener Winkel in Form von dreistelligen, im Positionssystem geschriebenen Sexagesimalzahlen aus der Sinustafel entnommen hat, wobei in der höchsten Stelle in den allermeisten Fällen „Teile“ (*ağzāʾ*) stehen, nämlich Teile des Kreisdurchmessers, den er im *Tahdīd* noch wie Ptolemäus zu 120 Teilen annimmt. Da das Schlussergebnis der Rechnung meist der Sinus eines gesuchten Winkels ist, so muß er es erst wieder durch „Erhöhen“ auf die gewöhnliche sexagesimale Form bringen, um den Winkel in der Tafel aufzuschlagen.

Die geschilderte qualvolle Rechenweise von an-Nasawī, al-Birūnī und ihresgleichen, also das dekadische Rechnen mit den Einheiten einer geeignet niedrig gewählten Sexagesimalstelle, wollen wir kurz als „uneigentliche Sexagesimalrechnung“ bezeichnen. Wir beobachten diese Rechenweise schon in der lateinischen Übersetzung von al-Ḥwārizmī's Rechenbuch⁴⁴ und ausführlicher in dem *Liber Algorismi* des Johannes von Sevilla⁴⁴.

Ganz anders sehen die Rechnungen bei K. aus. Er rechnet rein sexagesimal. Wir betrachten sein Beispiel der Multiplikation von 24 15 40 38 Terzen mit 13 9 51 20 Minuten (III, 3). Schon der zweite Faktor, dessen höchste Stelle „zweimal Erhöhtes“ ist, zeigt eine Form, die wir bei den Ausgangszahlen der vorhin genannten Rechner nicht kennen: sexagesimale Schreibung der Ganzen. Neben anderen Ausführungsarten der verlangten Multiplikation schlägt K. die Ausrechnung mit Hilfe des „Gitters“ nach folgendem Muster vor:

⁷¹ Al-Birūnī, Buch der Bestimmung der Grenzen der Orte zur Verbesserung der Entfernungen der Siedelungen (*Kitāb taḥdīd nihāyāt al-amākin li-taḡhīḥ masāfāt al-masākin*). Handschrift Istanbul *Fātiḥ* 3386. Vgl. Krause S. 480—481.

Die Sechzigertafel beschreibt K. (III, 3), ohne sie wiederzugeben. Der Astronom wird sie zur Hand gehabt haben, wie heute eine Logarithmentafel, eine dekadische Multiplikationstafel oder eine Rechenmaschine. Die Sechzigertafel ist eine quadratische Tafel, die in Länge und Breite so in 60 deckungsgleiche rechteckige Streifen geteilt ist, daß sie in $60 \cdot 60$ Kleinquadrate zerfällt. „Breite“ (*urā*) wird die Ausdehnung in der Richtung der Zeilen genannt, „Länge“ (*tāl*) diejenige in der Richtung der Spalten. Über die 60 Spalten sind von rechts nach links — entsprechend der arabischen Schreibrichtung — die Zahlen 1 bis 60 geschrieben, ebenso an den rechten Rand von oben nach unten neben die Zeilen. (Als ausreichend möchte eine Tafel mit 58 Spalten und 58 Zeilen für die Sechzigerziffern 2 bis 59 erscheinen, aber die Spalten und Zeilen für 1 und 60 sind für die Einschaltung [Interpolation] nützlich.) In das Kleinquadrat, das der mit $x = 15$ überschriebenen Spalte und der mit $y = 9$ beschriebenen Zeile angehört, ist das Produkt $x \cdot y = 15 \cdot 9$ als Sexagesimalzahl 2 15 eingetragen. Von $60 \cdot 60$ abgesehen, ist dieses Produkt immer zweistellig, d. h. es hat zwei Sexagesimalstellen, wenn man gegebenenfalls in eine der Stellen eine Null schreibt. Die niedere der beiden Stellen heißt bei K. „das Ausgebreitete“ (*al-mabsūt*), die höhere „das Erhöhte“ (*al-marḥū*).

Nicht nur für diese ganze Tafel mit zwei Eingängen gebraucht K. die Bezeichnung „Tafel“ (*ḡadwāl*), sondern auch für jede ihrer Spalten, die er genauer als „die Längstafeln“ (*al-ḡadwāl at-ṭūliya*) bezeichnet und nach den über ihnen stehenden Zahlen benennt. Die „Längstafel 15“ ist also die eindimensionale Tafel der Produkte der Zahl 15 mit den Multiplikatoren 1 bis 60. Manche, sagt K., trennen die Längstafeln voneinander und schreiben sie auf 60 Blätter, um Irrtümer auszuschalten. Nichts sagt er darüber, daß es, weil $x \cdot y = y \cdot x$ ist, genügen würde, die Tafel in Dreiecksform etwa derart anzulegen, daß jede Längstafel x nur bis zum x -fachen der Zahl x ausgeführt wird. Eine derartige Tafel, in Teiltafeln zerlegt, bringt J. Wallis in seiner Algebra⁷⁵. Für Multiplikationen und Divisionen mehrstelliger Zahlen, wie K. sie ausführt, ist es aber viel bequemer und sicherer, jedesmal in einer Spalte alle Produkte vom 1- bis zum 60-fachen einer Zahl vor sich zu haben.

Erst die Verwendung der Sechzigertafel macht die Sechzigerrechnung bequem und wirtschaftlich und macht die reine Sexagesimalrechnung für die meisten Rechner erst möglich, denn nicht jeder kann alle sexagesimalen Produkte je zweier Zahlen von 1 bis 59 auswendig wissen oder rasch ausrechnen. Es sind, wenn man Produkte wie $28 \cdot 43$ und $43 \cdot 28$ als ein einziges zählt, $1 + 2 + \dots + 59 = 1770$ Produkte, während das Kleine Einmaleins des Zehnersystems nur 45 Produkte umfaßt.

Dank der Benutzung der Sechzigertafel ist es möglich, alle Rechenverfahren des Zehnergefüges auf das Sechzigergefüge zu übertragen. So sind denn auch K.'s Methoden der Rechnung mit Sexagesimalzahlen

⁷⁵ Joh. Wallisii op. math., II, Oxford 1657, S. 25—28.

ein getreues Abbild seiner Methoden der Rechnung mit ganzen dekadischen Zahlen. (Daß er bei den Sexagesimalzahlen von Anfang an auch Stellen unterhalb der Einer auftreten läßt, und wie er den Stellenwert des Ergebnisses bestimmt, soll erst später behandelt werden. Hier kommt es uns zunächst nur auf den relativen Stellenwert der Zahlen an.) Auch die von K. bei den Verfahren im Zehnergefüge eingeführten Vereinfachungen und Verbesserungen kehren bei den Sechzigerzahlen wieder. Es kann deshalb hier auf eine Darstellung im einzelnen verzichtet werden.

In dem Multiplikationsbeispiel nach der Gittermethode (s. S. 46) werden die untereinander stehenden Sexagesimalziffern, von der niedrigsten Stelle beginnend, addiert, wie in Schema 3 von S. 19 die dekadischen Ziffern. Wie in Buch I der Behandlung der Multiplikation diejenige der Verdoppelung, der Häftung, der Addition und der Subtraktion vorausgeht, so ist das auch in Buch III der Fall. Die Verdoppelung beginnt wieder bei der niedrigsten, die Häftung bei der höchsten Stelle. Wie in Buch I, so wird auch in Buch III vor der Multiplikation mehrstelliger Zahlen miteinander diejenige einer mehrstelligen mit einer einstelligen behandelt. Für das Beispiel der Vervielfachung von $21\ 18\ 0\ 56$ mit 36 lehrt der Verfasser folgende Ausführungsformen, die dem von uns (S. 19) als Schema 1 bezeichneten Verfahren des gewöhnlichen Rechnens entsprechen:

$$\begin{array}{r}
 12\ 36\ 0\ 0 \\
 10\ 48\ 33\ 36 \\
 \hline
 12\ 46\ 48\ 33\ 36
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 12\ 10\ 0\ 33 \\
 36\ 48\ 0\ 36 \\
 \hline
 12\ 46\ 48\ 33\ 36
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 36\ 48\ 0\ 36 \\
 12\ 10\ 0\ 33 \\
 \hline
 12\ 46\ 48\ 33\ 36
 \end{array}$$

Die aus der Sechzigertafel, und zwar aus der Spalte der Vielfachen von 36 entnommenen Teilprodukte sollen bei jeder dieser Ausführungsformen in der Reihenfolge $12\ 36$, $10\ 48$, $0\ 0$, $33\ 36$ niedergeschrieben werden.

Als leichteste Ausführungsform für den in der Sexagesimalrechnung Geübten beschreibt K. aber die von uns schon (S. 20) erwähnte Methode, die am Beispiel der Multiplikation von $18\ 42\ 36\ 46$ mit 24 folgendermaßen ausgeführt wird: Zur Anwendung kommt in der Sechzigertafel die Spalte der Vielfachen von 24 . Das Produkt dieser Zahl mit der niedrigsten Stelle 46 des Multiplikanden ist $18\ 24$. Von dieser Zahl schreiben wir 24 als letzte Stelle des Ergebnisses nieder und behalten 18 im Sinn. Dann finden wir $24 \cdot 36 = 14\ 24$, addieren im Kopf zur letzten Stelle 24 dieses zweiten Teilprodukts die gemerkte 18 und schreiben die Summe 42 als zweitletzte Stelle des Ergebnisses links neben die zuerst niedergeschriebene letzte Stelle 24 , während wir uns 14 merken. So wird stellenweise weitergerechnet, bis schließlich die höhere Stelle 7 des zuletzt gebildeten Teilproduktes $24 \cdot 18 = 7\ 12$ als höchste Stelle des Ergebnisses niedergeschrieben wird. Dieses lautet $7\ 29\ 2\ 42\ 24$.

Außer der von uns vorweggenommenen Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen entsprechend dem Schema 3 von S. 19 bringt K. auch die den damaligen Schemata 2, 4, 5 entsprechenden, und zwar alles in der-

selben Reihenfolge wie beim Rechnen mit den indischen Ziffern. Bei Schema 5 beginnt die Multiplikation natürlich wie bei Schema 1 bei der niedrigsten Stelle. Sind viele Zahlen mit einer mehrstelligen zu vervielfachen, so wird wie früher eine Hilfstafel angelegt, die die Produkte der genannten mehrstelligen Zahl mit allen Sexagesimalziffern von 1 bis 59 enthält. Die Vielfachen werden wieder durch fortwährende Addition der mehrstelligen Zahl gebildet.

Bei allen Rechnungen, insbesondere auch in dem Gitterschema von S. 46, habe ich, wie überhaupt bei der Schreibung der Sechzigerzahlen, mit Rücksicht auf unsere Schreibrichtung links und rechts des Urtextes in der Übersetzung vertauscht. Dies soll auch in Zukunft geschehen, ohne daß darauf noch einmal besonders aufmerksam gemacht wird.

Für die Division einer Sexagesimalzahl durch eine andere solche Zahl schreiben al-Ĥwārizmī⁴⁴ (S. 20) und Johannes von Sevilla⁴⁴ (S. 53) vor, beide Zahlen in die niedrigste der bei Dividend und Divisor vorkommenden Arten zu verwandeln, also z. B. in Sekunden, wenn der Dividend aus Graden und Minuten, der Divisor aus Graden, Minuten und Sekunden besteht. Dann ist die Division dekadisch auszuführen. Das Ergebnis sind Grade. Ist der Dividend kleiner als der Divisor, so wird er so oft mit 60 multipliziert, bis er größer als der Divisor ist, und es ergeben sich dementsprechend bei der Division Minuten oder Sekunden usw. Al-Karāǧī⁵² schreibt (II S. 11) für den Fall, daß der Dividend kleiner als der Divisor ist, vor: Du „ziehst die Ordnungszahl des Dividenten von der des Divisors ab. Der Rest ist die Ordnungszahl des Quotienten.“ Wir werden bei Kūšyār diese Regel auf den Fall ausgedehnt sehen, daß die Ordnungszahl des Dividenten algebraisch größer als die des Divisors ist.

Bei Johannes von Sevilla⁴⁴ ist (S. 91) eingestreut, wie man eine nicht aufgehende Division dadurch auf beliebig viele sexagesimale Bruchstellen weitertreibt, daß man den jeweiligen Rest mit 60 multipliziert. Dieses Verfahren für die Bruchstellen, das auch Abul-Wafā' befolgt (s. weiter unten S. 84—85) und dessen erster Schritt schon bei al-Ĥwārizmī⁴⁴ (S. 20 unten) zu beobachten ist, kommt der eigentlichen sexagesimalen Division schon näher.

Im Gegensatz zu diesen Rechenweisen lehrt K. (III, 4) die rein sexagesimale Division. Wir begnügen uns damit, diejenige seiner Ausführungsarten wiederzugeben, die er als die geschickteste und leichteste bezeichnet. Es sei $18\ 4\ 19\ 36$ Sekunden durch $25\ 36\ 50$ Minuten zu dividieren. Abgesehen davon, daß K. den Divisor ganz unten, das Ergebnis ganz oben hinschreibt und den Rest jedesmal um eine Stelle verschiebt, würden wir alles genau so machen. Die erste Stelle 42

Quarten			
42	20	0	45
18	4	19	36
17	55	47	0
8	32	36	
8	32	16	40
0	19	20	
19	20		
	25	36	50

Division von $18\ 4\ 19\ 36$
durch $25\ 36\ 50$

⁴⁴ Luckey, Rechenkunst.

des Quotienten findet er folgendermaßen. Wir suchen in der Sechzigertafel in der mit 25, der höchsten Sexagesimalziffer des Divisors überschriebenen Spalte das größte Vielfache von 25, das nicht größer als die von den beiden höchsten Stellen des Dividenden gebildete zweistellige Sexagesimalzahl 18 4 ist. Wir finden 17 55 und am Rande vor der betreffenden Zeile 43. Dasselbe führen wir in der Spalte für $25 + 1 = 26$ aus, finden 17 46 und am Rande 41. Die von uns gesuchte Sexagesimalziffer des Quotienten kann hiernach nicht größer als 43 und nicht kleiner als 41 sein, so daß wir den Divisor höchstens mit jeder der drei Zahlen 41, 42, 43 versuchsweise zu multiplizieren brauchen, um die gesuchte Sexagesimalziffer des Quotienten, hier 42, zu finden. Auf diese nützliche Eingrenzung der Versuchszahlen konnte K. natürlich bei der leichter übersehbaren Division im Zehnersystem verzichten. Übrigens lehrt, was K. unausgesprochen läßt, meist ein Blick auf die zweite Stelle des Divisors und eine im Kopf ganz roh ausgeführte lineare Einschaltung (Interpolation), mit welcher etwa der möglichen Zahlen der Versuch zu beginnen ist. Dies erweist sich besonders dann als nützlich, wenn die Schranken der möglichen Versuchszahlen weiter auseinander liegen. Zu der [zu vollziehenden Multiplikation der einstelligen Sexagesimalzahl 42 mit der mehrstelligen 25 36 50 dient natürlich die Spalte 42 der Sechzigertafel. Als Ergebnis der ganzen Division erhält K. 42 20 0 45 *Quarten*. Bei den *Quarten* hat er die Division abgebrochen. Die nächste Stelle des Quotienten würde weniger als 30 *Quinten* betragen.

Der Hinweis auf die Verwendung einer Tafel der Vielfachen des Divisors beschließt das Kapitel der Division. In welchen Fällen die Anlage einer solchen Tafel lohnend sein kann und ob sie sich auf alle Multiplikatoren von 1 bis 59 erstrecken soll, wird nicht ausgeführt.

Zur Hervorhebung von K.'s rein sexagesimalen Wurzelausziehungen sei zunächst gezeigt, wie andere mittelalterliche Rechner Quadratwurzeln aus Sechzigerzahlen auszogen. An Beispielen aus al-Karaği⁷⁶ (II S. 15), an-Nasawī⁷⁷ (78b 23—29), al-Bīrūnī⁷⁸ und anderen ließe sich erweisen, daß diese Männer alle in gleicher Weise den sexagesimalen Radikanden in die Einheiten einer hinreichend niedrig gewählten Sexagesimalstelle gerader Ordnung verwandeln, also in Sekunden oder *Quarten* oder *Sexten* usw., um aus dieser dekadischen Zahl von Einheiten dekadisch die Quadratwurzel zu ziehen. Das Ergebnis ist eine dekadische Zahl von Minuten oder Sekunden oder Terzen usw., die sich dann wieder als reine Sexagesimalzahl schreiben läßt. Schon die Söhne des Mūsā b. Šākir (1. Hälfte des 9. Jahrh.) deuten das entsprechende Verfahren für Kubikwurzeln an⁷⁷. Daß diese dekadische Radizierung von Sexagesimalzahlen über den islamischen Bereich hinaus verbreitet war, beobachtet

⁷⁶ *Tahdīd*⁷⁴ S. 76, S. 154, S. 159. In diesen Fällen ist der Radikand eine rationale Funktion von Sexagesimalzahlen.

⁷⁷ *Liber trium fratrum*, hrsgg. v. M. Curtze, Acta Nova Leopold. 49, 2, Halle 1887, S. 157—158. Vgl. Suter, *Bibl. Math.* (3) 3 (1902), S. 271.

man schon bei Johannes von Sevilla⁷⁴ (S. 81—83), ferner z. B. bei K.'s abendländischem Zeitgenossen Johann von Gmunden.

Dasselbe zeigt ein Beispiel aus den Scholien zum 10. Buche von Euklids Elementen⁷⁵. Um aus der Zahl $31\ 10\ 36$, deren höchste Stelle „Einer“ ($\muονάδες$) sind, die Quadratwurzel zu ziehen, verwandelt der Scholiast diese Zahl in der oben S. 51—52 beschriebenen Weise in Einheiten der niedrigsten Stelle, d. h. hier in 112236 Sekunden ($δεύτερα λεπτά$). Als Quadratwurzel hieraus ergibt sich bei Vernachlässigung des geringen Restes von 11 Sekunden die Zahl 335 Minuten. Diese sind zu „erhöhen“ ($ἀναβιβάζειν$, vgl. ar. *rafa'a*), und hierbei erhält man $5\ 35$. Macht man den Radikanden „nicht nur zu Quarten, sondern sogar zu Sexten, zieht die Quadratwurzel und „erhöht“ dann die Sexagesimalteile, so findet man die Sekunden und die Terzen“.

Die Schreibung der dekadischen Zahlen mit indischen Ziffern deutet auf islamischen Einfluß. In anderen dieser Scholien byzantinischer Herkunft sind auch Sexagesimalzahlen mit indischen Ziffern und mit untereinander gesetzten Sexagesimalstellen in einer Weise geschrieben, die wir auch z. B. bei Kūšyār b. Labbān und an-Nasawī beobachten und weiter unten näher betrachten werden. Der Einfluß islamischer Mathematik dürfte hier größer sein, als F. Hultsch⁷⁶ anzunehmen scheint. Der Scholiast will die von ihm ange-deutete Verfeinerung des Ergebnisses nicht so vorgenommen wissen, wie Hultsch es (S. 232) ausführt. Hultsch bestimmt die Sekunden in Anlehnung an Theon von Alexandrien nach der sogenannten Newtonschen Näherungsmethode.

Zur Kennzeichnung von K.'s rein sexagesimaler Quadratwurzelausziehung (III, 5) diene die zweite seiner beiden Ausführungsformen für die Berechnung von $\sqrt[10]{10\ 9\ 49\ 20\ Grad}$. Sie bedarf keiner Erklärung, da das Verfahren und die Anordnung der Zahlen genau dieselben sind, wie bei der oben (S. 22—23) erläuterten dekadischen Ausziehung der Quadratwurzel. Im vorliegenden Beispiel hat K. zur Verfeinerung des Ergebnisses das Verfahren über die Grade, also die Einer hinaus weitergetrieben, um noch die Minuten des Ergebnisses, das $24\ 41\ 40\ Minuten$ beträgt, zu erhalten.

1-mal.					
Erh.		Grad		Min.	
24		41		40	
10	9	49	20		
9	36				
	33				
	33	16	1		
		33	19		
		32	55	6	40
			23	53	20
			49	22	40
		48	41		
	24				

Berechnung von $\sqrt[10]{10\ 9\ 49\ 20}$

⁷⁴ Euclidis Elementa ed. Heiberg 5, Leipzig 1888, S. 466 Z. 12—25.

⁷⁵ F. Hultsch, Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen. Bibl. Math. (3) 5 (1904), S. 225—233.

Auch K.'s Ausziehung dritter und höherer Wurzeln ist ein genaues Abbild seiner entsprechenden Rechnungen im Zehnergefüge. Er erläutert diese Wurzelausziehungen an den Beispielen

$$\sqrt[3]{18\ 52\ 59\ 43\ 51\ 24\ \text{Quarten}} \quad \text{und} \quad \sqrt[6]{34\ 59\ 17\ 14\ 54\ 23\ 3\ 47\ 40\ \text{Minuten}}.$$

Über die Waage (Probe) sexagesimaler Rechnungen macht K. im „Schlüssel“ (III, 3) nur die kurze Bemerkung, daß man ein über das andere Mal 59 von der Zahl abziehe und im übrigen wie früher verführe. Damit stellt er der Neunerprobe der Rechnungen im Zehnergefüge die ganz entsprechende Neunundfünfzigerprobe im Sechzigergefüge an die Seite. Die Probe auf die S. 46 nach dem Gitterverfahren ausgeführten Multiplikation wird folgendermaßen verlaufen:

Die beiden Faktoren und das Produkt haben die Quersummen

$$24 + 15 + 40 + 38 \equiv 58 \pmod{59},$$

$$13 + 9 + 51 + 20 \equiv 34 \pmod{59},$$

$$5 + 19 + 22 + 54 + 44 + 27 + 50 + 40 \equiv 25 \pmod{59},$$

$$\text{Nun ist} \quad 58 \cdot 34 \equiv (-1) \cdot 34 \equiv -34 \equiv 25 \pmod{59}.$$

Ohne Anwendung negativer Zahlen kann man die letzte Rechnung so ausführen:

$$58 \cdot 34 \equiv (59 - 1) \cdot 34 \equiv 59 \cdot 34 - 34 \equiv 59 \cdot 1 - 34 \equiv 25 \pmod{59}.$$

Das Produkt der „Waagen“ der beiden Faktoren ist also gleich der „Waage“ ihres Produkts.

Man möge sich stets vor Augen halten, daß die im „Schlüssel“ dargebotenen Rechnungen nur Beispiele zur Anleitung des Lernenden sind. Um zu ermessen, mit welcher Meisterschaft und Sicherheit K. die Sechzigerrechnung beherrscht, muß man ihn bei seiner eigenen Forschungsarbeit beobachten, nämlich bei der Berechnung von $\sin 1^\circ$ und von 2π . Alle die hierzu erforderlichen überaus genauen Rechnungen vollzieht er sexagesimal, und zwar nach seiner Gewohnheit in sehr übersichtlicher tabellarischer Form. Aus 20-stelligen Sexagesimalzahlen zieht er im Lehrbrief über den Kreisumfang richtig die Quadratwurzeln als 20-stellige Sexagesimalzahlen, wobei er zur Probe jedesmal wieder das Quadrat der gefundenen Wurzel ausrechnet. Neben allerhand klugen Vereinfachungen kommt hierbei die Neunundfünfzigerprobe zur Anwendung; auch macht er, wie sich das ganz natürlich ergibt, von der abgekürzten Multiplikation und der abgekürzten Wurzelausziehung Gebrauch, d. h. er läßt in den Rechnungen alle Stellen unterhalb einer hinreichend niedrigen weg.

Will jemand, der den Urtext nicht vergleichen kann, K.'s gleichzeitige Fertigkeit im schriftlichen dekadischen und sexagesimalen Rechnen

würdigen, so muß er daran denken, daß K. wie wir die dekadischen Zahlen von links nach rechts fallend und in „indischen“ Ziffern schreibt, die sexagesimalen aber von rechts nach links fallend und in Buchstaben-ziffern.

Nirgend habe ich bei K. eine Bemerkung über die zahlreichen Rechen-vorteile gefunden, die das reine Rechnen im Sechzigersystem dadurch bietet, daß 60 so viele Teiler hat. Diese Vorteile machen die Sechzigertafel bei Multiplikationen und Divisionen oft entbehrlich. Eine mehr-stellige Sechzigerzahl wird man ohne Sechzigertafel mit einer der Ziffern 2 bis 9 multiplizieren, indem man das Ergebnis, mit der niedrigsten Stelle beginnend, niederschreibt, abwechselnd Zehner- und Sechserübertragungen vornehmend. Entsprechend wird man die mehrstellige Sechzigerzahl, bei der höchsten Stelle beginnend, durch jede der Ziffern 2 bis 9 dividieren. Vom Stellenwert abgesehen, kommt aber eine Multiplikation mit 30 oder 15 oder 7 30 oder 12 oder 20 oder 10 oder 6 40 usw. einer Division durch 2 oder 4 oder 8 oder 5 oder 3 oder 6 oder 9 usw. gleich, und umgekehrt. Statt also z. B. durch 7 30 zu dividieren, wird man mit 8 multiplizieren. Durch Zusammensetzung solcher einfacher Rechnungen werden weitere Multiplikationen ohne Sechzigertafel ausführbar. Um z. B. von 23 41 10 das 21-fache zu finden, bildet man zunächst das 20-fache, indem man durch 3 dividiert, also von links nach rechts 7 53 43 20 niederschreibt. Hinzu kommt 1-mal 23 41 10, wobei die 10 unter die 20 zu schreiben ist, und so erhält man schneller als mit der Sechzigertafel 8 17 24 30. Um das 19-fache zu finden, wäre das 1-fache vom 20-fachen abzuziehen. K. da-gegen verweist auch in solchen Fällen auf die Sechzigertafel. Beim prak-tischen Gebrauch der Sexagesimalrechnung wird man eine Fülle solcher und anderer Rechen-vorteile entdecken und sich merken, die auch in den von uns noch zu betrachtenden Schriften von Sibṭ al-Māridīnī und Kūšyār nicht behandelt sind.

Jede sexagesimale Rechnung K.'s zerfällt in zwei Teilaufgaben, erstens die Bestimmung der Folge der Sexagesimalziffern des Ergebnisses nach ihrem relativen Stellenwert und zweitens die Bestimmung des absoluten Stellenwertes der errechneten Sexagesimalziffern, also das, was beim dezimalen Rechnen die Bestimmung der Lage des Kommas ist, das die Ganzen von den Bruchstellen trennt. (Bei Sexagesimalzahlen hat man heutzutage diese Trennungsstelle durch einen Strichpunkt [;] angedeutet.) Für jede Art von Aufgaben erledigt K. beide Teilaufgaben, indem er der Bestimmung der Ziffernfolge eine Bestimmung des Stellenwertes beigibt. Wir haben die Darstellung seiner Ausführungen zur zweiten Teilaufgabe abgetrennt und zurückgestellt, um sie nun in einem größeren Zusammen-hang nachzuholen, nämlich im Rahmen von K.'s Ausführungen über das Rechnen mit Potenzen.

6. Das Rechnen mit Exponenten und mit den Kennzahlen der Sexagesimalstellen

Potenzen mit negativen Exponenten und mit dem Exponenten 0 sind im Abendland aus dem 1484 abgefaßten *Triparty* von Chuquet und aus Stiefels 1544 erschienener *Arithmetica integra* bekannt. Über den Stand, den die Potenzrechnung im islamischen Schrifttum erreichte, herrscht noch viel Dunkel, zu dessen Aufhellung die folgenden Mitteilungen beitragen mögen.

Im ersten Buch des „Schlüssel“ beginnt das fünfte Kapitel, das die Ausziehung der n -ten Wurzel aus einer ganzen Zahl behandelt, mit folgenden Ausführungen, denen ich unter Verwendung neuzeitlicher Größen- und Rechensymbole kurze Erläuterungen in Klammern beifüge:

Über die Bestimmung der Grundzahl (a , wörtl.: „erste Seite“, *dil' auwal*) der Potenzen (a^n , wörtl.: „Geseitlen“, *muḍalla'āt*⁸⁰).

Wenn man irgendeine Zahl (a) mit sich selbst multipliziert, dann mit dem Ergebnis (a^2), dann mit dem zweiten Ergebnis (a^3), dann mit dem dritten Ergebnis (a^4) und so fort bis ins Unbegrenzte, so heißt jene erste Zahl (a) „erste Seite“ in bezug auf jedes jener Ergebnisse, und „Wurzel“ (*ǧīdr*) in bezug auf das erste Ergebnis (a^2), d. h. das Ergebnis der Multiplikation der Zahl (a) mit sich selbst, und sie heißt „Kubikwurzel“ (ka^3b) in bezug auf das zweite Ergebnis (a^3). Jene Ergebnisse heißen mit der allgemeinen Bezeichnung Potenzen (a^n , wörtl.: „Geseitete“), und jede Potenz hat einen besonderen Namen, wie das erste Ergebnis (a^2) „zu Wurzelndes“ (*maǧḍūr*) oder „Vermögen“ (*māl*) oder „Quadrat“ (wörtl.: „Geviert(es)“, *murabba'*), das zweite Ergebnis (a^3) „Gewürfeltes“ (*muka'ab*⁸⁰) und auch bei einigen „Kubus“ (ka^3b) mit dem Namen der Seite — am einfachsten sagen wir aber, „Kubus“ sei der Name der Potenz; man übertrug ihn in unzulässiger Weise auf die Seite —, das dritte Ergebnis (a^4) „Quadratoquadrat“ (*māl māl*), das vierte (a^5) „Quadratokubus“ (*māl ka^3b*), das fünfte (a^6) „Kubokubus“ ($ka^3b ka^3b$); dann (folgt) (a^7) „Quadratoquadratokubus“ (*māl māl ka^3b*), dann (a^8) „Quadratokubokubus“ (*māl ka^3b ka^3b*), dann (a^9) „Kubokubokubus“ ($ka^3b ka^3b ka^3b$), und so ersetzt man das Wort „Kubus“ durch zwei „Quadrat(o)“, dann das eine der beiden „Quadrat(o-)“ durch „Kubo-“, dann auch das andere durch „Kubus“ („Kubo-“), und so unbegrenzt weiter. Es sind die Eins und jene Ergebnisse proportional nach ein- und demselben Verhältnis, d. h. es ist das Verhältnis der Eins zur Wurzel (a) gleich dem Verhältnis der Wurzel (a) zu dem Vermögen (a^2) und gleich dem Verhältnis des Vermögens (a^2) zum Kubus (a^3) und gleich dem Verhältnis des Kubus (a^3) zum Quadratoquadrat (a^4), und so sind sie alle bis ins Unbegrenzte proportional. Dies (gilt) auf der Seite des Aufsteigens. Etwas dem Gleiches muß man sich auf der Seite des Absteigens vorstellen, nämlich „der Teil der

⁸⁰ Die Kunstwörter *muka'ab* für a^3 und *muḍalla'* für a^n sind offenbar entsprechend *murabba'* („Geviertes“) für a^2 gebildet worden.

Wurzel“ (d. h. $\frac{1}{a}$, die Reziproke der Wurzel a), „der Teil des Vermögens“

$\left(\frac{1}{a^2}\right)$, „der Teil des Kubus“ $\left(\frac{1}{a^3}\right)$, „der Teil des Quadratoquadrats“ $\left(\frac{1}{a^4}\right)$ (usw.)

bis ins Unbegrenzte. Diese sind ebenfalls der Reihe nach proportional, und das Verhältnis jedes von ihnen zur Eins ist gleich dem Verhältnis der Eins zu dem ihm namengleichen (Glieder) (vgl. Diophant: $\delta\mu\acute{o}\nu\omicron\mu\alpha$) auf der

Seite des Aufsteigens $\left(\frac{1}{a^n} : 1 = 1 : a^n\right)$. Offenkundig steht die „Wurzel“ (a)

im ersten der Grade⁵¹ (*manāzil*), das „Vermögen“ (a^2) im zweiten, der „Kubus“ (a^3) im dritten und so fort bis ins Unbegrenzte. Wollen wir nun die „Zahl des Grades (den Exponenten) einer Potenz“ (*‘adad manzilat mudalla’*) wissen, so nehmen wir für jedes „Quadrat(o)“ 2, für jedes „Kubus“ („Kubo“) 3 und addieren sie alle, dann kommt die Zahl ihres Grades heraus. Wünschen wir aber den Namen der Potenz aus der Zahl ihres Grades (zu bestimmen), so sehen wir zu: Hat sie (die Zahl des Grades) ein ganz(zahliges) Drittel (d. h. ist sie durch 3 teilbar), so nehmen wir soviel (mal das Wort) „Kubus“ („Kubo“), wie ihr Drittel angibt. Die Aneinanderhängung der „Kubo“ („-kubus“)⁵² wird dann der Name jener Potenz sein. Hat sie (die Zahl des Grades) aber kein ganz(zahliges) Drittel, so nehmen wir von ihr 2 und machen sie zu einem „Quadrat(o)“ und danach das Drittel des Restes zu (Worten) „Kubo“ („Kubus“), falls er (der Rest) ein ganz(zahliges) Drittel hat. Andernfalls nehmen wir nochmals 2 und machen sie zu einem weiteren „Quadrat(o)“ und setzen nach der Zahl des Drittels des Restes wiederholte „Kubo“ („Kubus“), wobei wir das Wort „Quadrato“ dem Worte „Kubo“ („Kubus“) vorangehen lassen. Dann kommt der Name der Potenz heraus.^k)

Während hier von den Potenzen

$$\dots, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \dots$$

einer (beliebigen) „Zahl“ (a) die Rede war, spricht K. im fünften, algebraischen Buche des „Schlüssel“ von denselben Potenzen einer Unbekannten (x). Der Potenzbegriff war also im Mittelalter nicht, wie Tropfke (II³, S. 133) sagt, auf die Unbekannte beschränkt. Letztere wird, wie K. (V, 1a) sagt, „Ding“ ($\{x\}$) oder „Dinar“ oder „Dirham“

⁵¹ Man achte darauf, daß das deutsche Wort „Grad“ in zwei ganz verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, erstens für *darajā* als Einerstelle einer Sexagesimalzahl, zweitens, wie oben, für *manzila* als Grad einer Potenz.

⁵² Die Wörter „Kubo“ („-kubus“) werden zueinander ins Abhängigkeitsverhältnis der *idāfa* oder des status constructus gesetzt. (Vgl. oben S. 34–35). Nach dem sprachlichen Sinn dieser Wörterverbindungen müßte man z. B. *māl ka’b* durch „Quadrat eines Kubus“ übersetzen. Das wäre $(a^3)^2 = a^6$ und entspräche dem indischen *va gha* (Tropfke II³, S. 134). K. folgt aber, wie man sieht, der Diophantischen Benennung der Potenzen.

oder „Anteil“ (*naṣīb*) oder „Los“ (*saḥm*) oder sonstwie benannt, wobei meistens ausgemacht sei, daß man sie „Ding“ (*ṣai'*) nenne. Wird das „Ding“ (x) mit sich selbst multipliziert, so heißt das Ergebnis (x^2) „Vermögen“ (*māl*). Die hierauf folgenden Potenzen von x heißen „Kubus“, „Quadratoquadrat“ und auch weiterhin genau so wie die Potenzen einer bekannten Größe an der vorhin angeführten Stelle, auf die K. zurückverweist, genannt wurden. Diese „Range“ (*marātib*) heißen „die unbekannten Range“ und „die unbekannten Arten“ (*al-aḡnās al-maḡhūla*), weil ihre erste „Seite“ das unbekannte „Ding“ ist.

Auf die Behandlung der Addition (V, 1b) und der Subtraktion (V, 1c) der „Arten“ folgt ein Abschnitt (V, 1d) über ihre Multiplikation. Bei der Multiplikation zweier Arten sucht man die „Quantität“ (*kamīya*) und die „Artung“ (*ḡinsiya*) des Ergebnisses. Bei $10 x^2$ heißt 10 die „Quantität“ und x^2 die „Artung“. Die Quantität des Produkts zweier Arten, z. B. $10 x^2$ und $9 x^3$ ist das Produkt der Quantitäten beider Arten, im Beispiel $10 \cdot 9 = 90$. Über die Artung führt K. folgendes aus:

Was die letztere (die Artung) betrifft, so bemerkten wir schon im fünften Kapitel des ersten Buches, daß diese Arten zwei Ketten haben, auf den beiden Seiten des Aufsteigens und des Absteigens. Beider Anfang ist bei der Einheit, und sie alle (die Arten) sind der Reihe nach proportional. Die „Zahl des Grades“ (der Exponent) der Eins ('adad manzilat al-wāḥid) ist 0, diejenige des Dings (x) und des Teiles des Dings ($\frac{1}{x}$) ist 1, diejenige des Vermögens (x^2) und des Teiles des Vermögens ($\frac{1}{x^2}$) ist 2, diejenige des Kubus (x^3) und seines Teils ($\frac{1}{x^3}$) ist 3, diejenige des Quadratoquadrats (x^4) und seines Teils ($\frac{1}{x^4}$) ist 4, und so beliebig weit. Hier steht die Zahl in der Kraft der Eins, auch wenn sie größer als 1 oder kleiner als 1 sein sollte, weil die Zahl, wieviel sie auch betragen möge, die Quantität der Art der Eins ist⁸³, so wie (z. B.) fünf Dinge ($5 x$) die Quantität der Dinge (x) sind.

Multiplizieren wir nun eine dieser Arten mit einer anderen, so ist das Ergebnis von einer Art, deren Zahl ihres Grades (deren Exponent) vom Betrage der Summe der Zahlen der Grade der beiden Faktoren ist, wenn sie hinsichtlich der beiden Ketten des Aufsteigens und des Absteigens auf derselben Seite (nämlich der 1) liegen. Im anderen Falle ist sie vom Betrage des Überschusses der einen der beiden über die andere. Es (das Ergebnis) liegt (im ersten Falle) auf der Seite der Summe oder (im zweiten Falle) auf der Seite des Überschusses. Wir bringen eine Tafel für die Artung der Ergebnisse der Multiplikationen dieser Arten miteinander. Aus ihr erfährt man (auch) die Artung des Ergebnisses der Division einer (Art) durch eine andere.¹⁾

⁸³ Die Potenzen von x ; wie $\frac{1}{x^3}$, 1, x^2 sind „Arten der Eins“. Der Koeffizient, z. B. 7 in $7 x^2$, ist „die Quantität der Art der Eins“.

Auf die Behandlung der Multiplikation mehrerer Arten miteinander, d. h. von Binomen und Polynomen miteinander, folgt der Abschnitt (V, 1e) *Über die Division dieser Arten durcheinander*. Er beginnt folgendermaßen:

Wollen wir eine einzige Art durch eine einzige Art dividieren, so dividieren wir die Quantität der Art des Dividenden durch die Quantität der Art des Divisors. Dann ist der Quotient die Zahl der Art des Quotienten, dessen Zahl des Grades (Exponent) vom Betrage des Überschusses zwischen den Zahlen des Grades (Exponenten) von Dividend und Divisor ist, wenn diese beiden auf ein und derselben Seite sind, oder vom Betrage ihrer Summe, wenn sie (auf) verschieden(en Seiten) sind, und er (der Quotient) ist auf der Seite des Aufsteigens, wenn der Rang (maraba) des Dividenden über dem Rang des Divisors ist, andernfalls auf der Seite des Absteigens.^{m)}

Von der erwähnten Tafel gebe ich auf S. 58 die Ecken wieder. Es ist eine quadratische Tafel mit zwei Eingängen. Die Spalten sind oben und die Zeilen rechts und links mit den „Artungen“ beschriftet, vom „Quadratokubus“ (x^5) fallend über „die Eins“ bis zum „Teil des Quadratokubus“ (x^{-5}). In dem Teilquadrat, in dem sich Zeile und Spalte treffen, kann man die Artung des Produktes ablesen. Die Artung des Quotienten aufzufinden ist dadurch ermöglicht, daß die Spalten unten mit den Reziproken der oben stehenden Potenzen beschriftet sind. Aber auch durch inverse Benutzung der Multiplikationstafel kann die Artung des Quotienten gefunden werden. Hierauf macht der Verfasser aufmerksam, nicht aber darauf, daß diese Benutzung den Bereich der Exponenten erweitert und daß ebenso auch die Divisionstafel als Multiplikationstafel dienen kann.

Eine mit dieser Tafel inhaltlich und in der Anordnung genau übereinstimmende Tafel fand Woepcke isoliert auf einer Seite der Handschrift 169 des Pariser *Ancien fonds persan* und veröffentlichte sie⁸⁴. Leider vermochte er das Stück nicht genau zu datieren. Der Unterschied gegen K.'s Tafel besteht hauptsächlich nur darin, daß die Namen der Potenzen in den Feldern für die Ergebnisse abgekürzt sind, und zwar, wie man das auch sonst bei arabischen Wörtern beobachtet, durch Niederschrift ihrer Endbuchstaben.

Die Diophantischen Namen der Potenzen begegneten uns auch (S. 24 bis 25) in den Ausdrücken für die Binomialkoeffizienten. Wie umständlich war die Multiplikation und Division von Potenzen infolge dieser schwerfälligen Bezeichnungen für die Potenzen! Bei dem, was K. hier über Potenzen und das Rechnen mit ihnen vorbringt, macht er nirgendwo Anspruch auf eigene Erfindung. Die Tafel zur Bestimmung der Artung des Produktes und des Quotienten bezeichnet er in der Einleitung (s. oben S. 8) ausdrücklich als von den Vorgängern übernommen. Immerhin könnten Einzelheiten, z. B. terminologische Besonderheiten, sein

⁸⁴ F. Woepcke, *Recherches*⁸⁴, Premier article. *Journal Asiatique* (5) 4 (1854), S. 348—384. S. S. 375—380.

Multi — plikand									
		Quadrato- kubus	Quadrato- quadrat	= = =		Teil des Quadrato- quadrats	Teil des Quadrato- kubus		
Quadrato- kubus		Quadrato quadrato- kubo- kubus	Kubo- kubo- kubus			Ding	Eins	Quadrato- kubus	
Quadrato- quadrat		Kubo- kubo- kubus	Quadrato- kubo- kubus			Eins	Teil des Dings	Quadrato- quadrat	
Teil des Quadrato- quadrats		Ding	Eins			Teil des Quadrato- kubo- kubus	Teil des Kubo- kubo- kubus	Teil des Quadrato- quadrats	
Teil des Quadrato- kubus		Eins	Teil des Dings			Teil des Kubo- kubo- kubus	Teil des Quadrato- quadrato- kubo- kubus	Teil des Quadrato- kubus	
		Teil des Quadrato- kubus	Teil des Quadrato- quadrats	= = =		Quadrato- quadrat	Quadrato- kubus		
Divi — sor									

aufgenommen. Vorhanden sind insbesondere Fachausdrücke für die Grundzahl („Seite“, *ḍil*), für die Potenz überhaupt („Geseitetes“, *muḍalla*) und für den Exponenten („Zahl des Grades“, *adad al-manzila*). Bestimmte Potenzen a^n ($n \geq 0$) bezeichnet K. noch schwerfällig nach Diophant mit Worten wie „Quadratokubus“ (*māl ka'b*) für a^5 . Er zeigt aber, wie man für $n > 1$ aus der Diophantischen Benennung den Exponenten und aus dem Exponenten die Diophantische Benennung findet: Ist

$$n = 2n_1 + 3n_2 \quad (n_1 = 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 2),$$

so hat der Name der Potenz an der Spitze n_1 -mal das Wort „Quadrat(o)“ Darauf folgt n_2 -mal das Wort „Kubo-“ („Kubus“).

Der 1 wird der Exponent 0 zugeschrieben. Die Potenzen a^n und $\frac{1}{a^n}$ haben denselben Exponenten. Der Unterschied wird durch die Angabe gekennzeichnet, daß für $n > 0$ die Potenz a^n „auf der Seite des Aufsteigens“ und $\frac{1}{a^n}$ „auf der Seite des Absteigens“ liegt. Der hier vorliegende

Gebrauch des Ausdrucks „Seite“ (*ḡānib* oder *ṭarf*) entspricht der Gepflogenheit des Altertums und des Mittelalters in Geometrie und Koordinatengeometrie der Ebene und der Kugel. So lesen wir in Tābit b. Qurra's Berechnungen von Sonnenuhren sehr oft, daß eine Größe auf die eine oder auf die andere von zwei „Seiten“ fällt. Für uns heißt das, daß die Größe im einen Falle positiv und im anderen negativ ist. „Auf der Seite des Aufsteigens“ bedeutet also hier $n > 0$, und „auf der Seite des Absteigens“ bedeutet $n < 0$, wobei allerdings zu beachten ist, daß K. von der Potenz, nicht vom Exponenten, sagt, sie liege auf der Seite des Aufsteigens oder Absteigens. Unter Verwendung dieser Fachausdrücke gibt K. die vollständigen Regeln für Multiplikation und Division zweier Potenzen, deren Exponenten beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder null sind. Er besitzt also die Vorschriften, die wir durch die Formeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \text{ ganz und } \geq 0).$$

ausdrücken.

Im Westen bezeichnet der 1486 verstorbene al-Qalaṣādi⁸⁵ den Exponenten der Potenzen x, x^2, x^3 mit *ass* (= „Grundlage“) Er sagt z. B.: *Der ass der Kuben ist 3*. Ferner: *Die „Zahl“* (d. h. das konstante Glied einer Gleichung) *hat keinen ass*. Das ist unvollkommener als bei K., und auch die von al-Qalaṣādi ausgesprochene Exponentenregel für Multiplikation und Division der Potenzen ist anscheinend nur für den Fall gemeint, daß alle vorkommenden Exponenten, auch der des Ergebnisses, positiv sind.

⁸⁵ F. Woepcke, Traduction⁸³, quatrième partie, chap. 3, 7, S. — F. Woepcke, Recherches, 1^{er} art.⁸⁴, S. 353, 364, 367, 368.

Das Verfahren der sexagesimalen Ausziehung der n -ten Wurzel leitet K. (III, 5) mit folgenden Ausführungen ein:

Wenn man irgend eine einzelne Zahl ('*adad mufrad*)⁸⁶ mit sich selbst multipliziert, dann mit dem Ergebnis, dann mit dem zweiten Ergebnis und so bis ins Unbegrenzte und (andererseits) die „(Kenn)zahl der Stelle“ ('*adad al-marṭaba*) jener einzelnen Zahl zu sich selbst addiert, dann zu der Summe, dann zu der zweiten Summe und so bis ins Unbegrenzte, so sind diese Zahlen der Reihe nach die (Kenn)zahlen der entsprechenden Stellen jener Ergebnisse auf Grund des Vorhergehenden, wonach die (Kenn)zahl der Stelle des Ergebnisses der Multiplikation vom Betrage der Summe der beiden (Kenn)zahlen der Stellen der beiden Faktoren ist, wenn sie auf derselben Seite von den Graden (d. h. der Einerstelle „Grad“) sind. Notwendig erhält man diese (Kenn)zahlen auch dadurch, daß man die (Kenn)zahl der Stelle jener einzelnen (Zahl) mit der Zahl des Grades (dem Exponenten) irgend einer Potenz multipliziert. Daraus erkennt man, daß jede Potenz in der Stelle gefunden wird, die (so beschaffen ist, daß), wenn man ihre (Kenn)zahl durch die Zahl ihres Grades (durch den Exponenten der Potenz) dividiert, nichts (d. h. kein Rest) übrigbleibt, d. h. es ist die Zahl ihres Grades (der Exponent der Potenz) ein Teiler ihrer (Kenn)zahl oder ist ihr gleich, wenn sie eine (Kenn)zahl hat.“)

Wählen wir als Beispiel für die gegebene „einzelne“ Sexagesimalzahl 2 „Gedritte“ = $2 \cdot 60^3$, so wird hier der Folge der Potenzen

$$2 \cdot 60^3, \quad 4 \cdot 60^6, \quad 8 \cdot 60^9, \quad 16 \cdot 60^{12}, \quad \dots$$

die ihr gliedweise entsprechende Folge der Exponenten von 60, welche „(Kenn)zahlen der Stellen“ heißen,

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad \dots$$

gegenübergestellt. Diese Folge wird durch Addition erzeugt, wie jene durch Multiplikation.

In den beiden letzten Sätzen dieser Textstelle stecken die Formeln:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = a^m.$$

K. braucht sie, um zu begründen, daß z. B. das Ausziehen der Kubikwurzel aus „Gedrittem“ „einmal Erhöhtes“, aus Sexten Sekunden ergibt. Der Zusatz *wenn sie eine (Kenn)zahl hat* gibt dem Exponenten 0 eine Sonderstellung.

An einer anderen Stelle des Schlüssel (V, 3) gibt der Verfasser zur Erleichterung der Berechnung von Potenzen als eigene Erfindung eine Regel, die auf der dyadischen Darstellung des Exponenten beruht. Er erläutert sie an zwei Beispielen, die wir folgendermaßen schreiben:

$$5^8 = [(5^2)^2]^2 \quad \text{und} \quad 3^{14} = 3^{8+4+2} = [(3^2)^2]^2 \cdot (3^2)^2 \cdot 3^2.$$

⁸⁶ Gemeint ist eine Zahl $a_i \cdot 60^i$, $0 \leq a_i \leq 59$. Die ganze Zahl i ist die „(Kenn)zahl ihrer Stelle“. Vgl. S. 41.

Um 2^{11} auszurechnen, zerlegt er 11 in $8 + 2 + 1 (= 2^3 + 2^1 + 2^0$, oder, im dyadischen Positionssystem geschrieben, $= 1011$). Er hat also aus der Folge

$$2, 2^2, (2^2)^2, [(2^2)^2]^2 \text{ d. i. } 2^{(2^0)}, 2^{(2^1)}, 2^{(2^2)}, 2^{(2^3)}$$

und ausgerechnet 2, 4, 16, 256,

in der jede folgende Zahl durch Quadrieren der vorhergehenden entsteht, die ursprüngliche Zahl 2 und die nach der ersten und dritten Quadrierung entstehenden Zahlen 4 und 256 miteinander zu multiplizieren.

8	3 mal ...	..	256
2	1 mal	..	4
1	0	..	2

Hilfszahlen zur Berechnung von 2^{11}

8	... 3 mal	6561
4	... 2 mal	81
2	... 1 mal	9

Hilfszahlen zur Berechnung von 3^{14}

In seiner durch unser linkes Täfelchen angedeuteten tabellarischen Rechnung sieht man in der ersten Spalte die Exponenten 8, 2, 1 der Basis 2. In der mittleren Spalte steht, durch wievielmals Quadrieren man bei Ausgang von 2 zu der betreffenden Potenz gelangt. In der letzten stehen die ausgerechneten Potenzen 256, 4, 2. Wir sehen also hier den Zahlen 256, 4, 2 ihre Logarithmen zur Basis 2 und die Logarithmen dieser Logarithmen gegenübergestellt. Die 0 steht wirklich in der Tabelle; zu der Redeweise „0-mal“ schwingt sich K. nicht auf. Ebenso sehen wir in der

Ausrechnung von 3^{14} (rechtes Täfelchen) die Zahlen $\log z$ und $\log \log z$ den Zahlen $z = 6561$, $z = 81$, $z = 9$ gegenübergestellt.

Entsprechend findet K. 2^{11} (für die bekannte, an das Schachbrett anknüpfende Aufgabe der Berechnung von $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$ als siebentes Glied der obigen Folge 2, 4, 16, 256, 65536, ... Die Zahl steht in Ziffern und in Worten in seiner Tabelle.

Mit der vorhin wiedergegebenen Textstelle sind wir schon zu K.'s Anwendung seiner Regeln der Potenzrechnung auf die Bestimmung des Stellenwertes bei seinen Sexagesimalrechnungen übergegangen. Den Bezeichnungen und Regeln, die er für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen gebraucht, entsprechen genau seine Bezeichnungen und Regeln für die Bestimmung des Stellenwertes der Produkte und Quotienten von Sexagesimalzahlen. Während dort der Exponent „Zahl des Grades“ (*adad al-manzila*) genannt wurde, heißt hier der Exponent von 60 eines Gliedes der sexagesimalen Potenzreihe „(Kenn)zahl der Stelle“ (*adad al-martaba*). Bekanntlich finden wir wie bei Theon von Alexandria⁸⁷, so z. B. im Rechenbuch von al-Hwärizmi⁴⁴ (S. 18) und bei al-Karāǧi⁵² II S. 11, Kap. 36) Vorschriften, die aussagen, daß z. B. Minuten mal Sekunden Terzen ergeben. Im *Liber Algorismi* des Johannes

⁸⁷ Ausgabe von Rome⁷¹ S. 452–457. Ausgabe von Palma⁷¹ S. 110 bis 116.

von Sevilla⁴⁴ findet sich (S. 103) ebenso wie z. B. in der von Curtze herausgegebenen Algorismusschrift des 12. Jahrhunderts⁴⁵ (S. 21) eine Tafel mit zwei Eingängen, die den Stellenwert des Produktes zweier Sexagesimalbrüche aus den Stellenwerten ihrer Faktoren finden läßt.

K. hat die Erweiterung dieser Regel auf alle Stellenwerte der ganzen und gebrochenen Sechzigerzahlen von Vorgängern übernommen und führt diesen Gegenstand (III, 3) folgendermaßen aus:

Was die Bestimmung der Artung (jinsīya) der Stellen betrifft, so (gilt folgendes): Wie das Verhältnis der Eins zu einem der Faktoren (eines Produktes) gleich dem Verhältnis des anderen Faktors zum Produkt ist, so ist das Verhältnis der Stelle der Grade⁴¹ zur Stelle eines der Faktoren gleich dem Verhältnis der Stelle des anderen Faktors zur Stelle des Produktes, weil alle Stellen in ständigem Verhältnis stehen (d. h. 1 Grad : 1 Min. = 1 Min. : 1 Sek. usw.), so daß der Abstand der Stelle eines der Faktoren von der Stelle der Grade gleich dem Abstand der Stelle des Produktes von der Stelle des anderen Faktors ist. Nehmen wir also für die Grade (null)⁴⁹, für das einmal Erhöhte oder die Minute eins, für das Gezwelte und die Sekunde zwei, für das Gedritte und die Terz drei und (so weiter) nach dieser Regel, so sind dies die Abstände der Stellen von den Graden. Sie heißen „(Kenn)zahlen der Stellen“. Multiplizieren wir nun eine „einzelne Zahl“⁴⁸ mit einer ebensolchen, so addieren wir die (Kenn)zahlen der beiden Faktoren, wenn sie auf derselben Seite der Grade sind, und die Summe ist dann die (Kenn)zahl der Stelle des Produktes auf jener Seite. Wir nehmen aber den Unterschied zwischen beiden (Kenn)zahlen, wenn sie (auf) verschieden(en) Seiten der Grade sind. Das ist dann die (Kenn)zahl der Stelle des Produktes (und sie liegt) auf derjenigen Seite, die den Überschuß hat.“

Diese Regel entspricht der Gleichung

$$60^i \cdot 60^k = 60^{i+k}$$

für beliebige ganzzahlige Werte von i und k , die also auch 0 oder negativ sein können. Wie früher bei den Potenzen überhaupt, kommt das Vorzeichen wieder dadurch zum Ausdruck, daß zwei „Seiten“ unterschieden werden, diesmal die beiden Seiten, auf denen die Glieder in bezug auf „die Grade“ ($\alpha_0 \cdot 60^0$) stehen.

Ebenso bringt K. (III, 4) für die Bestimmung der (Kenn)zahl der Stelle eines Quotienten aus den (Kenn)zahlen der Stellen von Dividend und Divisor die der Gleichung

$$60^i : 60^k = 60^{i-k}$$

für beliebige ganze Zahlen i und k entsprechende Regel.

⁴⁴ M. Curtze, Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts. Abh. z. Gesch. d. Math. 8 (1898), S. 1—28.

⁴⁹ Das Wort für null fehlt in der Handschrift; ich kann aber nur so ergänzen. Die Stelle entspricht dann der oben (S. 56) mitgeteilten Festsetzung: Die „Zahl des Grades“ der Eins ist null. Sie steht ferner im Einklang mit der Festsetzung der Kennzahl der Einer der dekadischen Zahlen (S. weiter unten S. 104).

Zur bequemen Bestimmung des Stellenwertes von Produkt und Quotient auf Grund dieser Regeln bringt K. ebenso wie die oben (S. 62) genannten Algorismusschriften eine Tafel mit zwei Eingängen, deren Ecken ich unten wiedergebe. Über und unter den Spalten und links und rechts von den Zeilen stehen die Namen der Stellen, und im Treffpunkt einer Zeile mit einer Spalte liest man den Stellennamen des zugehörigen Produktes oder Quotienten ab. Die Stellen reichen aber hier — im Gegensatz zu jenen Algorismusschriften und im Einklang mit K.'s oben (S. 69) wiedergegebenen Tafel für die Produkte und Quotienten von Potenzen — von den „Gefünften“ (60^5) über den Grad (60^0) bis herab zu den Quinten (60^{-5}), umfassen also auch die über den Grad hinausgehenden Sexagesimalstellen der Ganzen. Auch diese Tafel für die Stellenwerte bezeichnet K. in der Einleitung (oben S. 7—8) ausdrücklich als von Vor-

			Multi — plikand					
Multipli — kator		Gefünftes	Geviertes			Quarte	Quinte	
	Gefünftes	Gezehntes	Geneuntes			Erhöhtes	Grad	Quinte
	Geviertes	Geneuntes	Geachtles			Grad	Minute	Quarte
	Quarte	Erhöhtes	Grad			Oktave	None	Geviertes
	Quinte	Grad	Minute			None	Dezime	Gefünftes
			Gefünftes	Geviertes		Quarte	Quinte	
			Divi — dend					
						Divi — sor		

Al-Kāšī's Tafel zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes und des Quotienten zweier Sexagesimalzahlen

gängern übernommen. Da in den Namen fast aller Stellen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 stecken, so ist die Tafel im Grunde nichts anderes als die für uns triviale Tafel für die Addition und Subtraktion

$$z = x \pm y, \quad x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5.$$

Auf die Stellenregeln für das Potenzieren und das Radizieren einer Sexagesimalzahl brauchen wir nicht einzugehen. Ihre Begründung ist in der oben S. 60—61 wiedergegebenen und erläuterten Textstelle enthalten.

Später werden wir sehen, wie K. die für das Rechnen im Sechzigergefüge aufgestellten Regeln über den Stellenwert auf das Zehnergefüge einschließlich der von K. eingeführten Dezimalbrüche überträgt.

7. Die reine Sexagesimalrechnung bei anderen islamischen Mathematikern

Die in den beiden letzten Abschnitten bei K. nachgewiesene Sexagesimalrechnung ist dadurch gekennzeichnet, daß auch die Ganzen sexagesimal entwickelt sind, daß die Zahlen im Positionssystem mit den „Sexagesimalziffern“ 0, 1, . . . , 59 geschrieben sind und daß mit diesen Zahlen genau entsprechend gerechnet wird, wie mit den Zahlen des Zehnersystems, wobei an die Stelle des Kleinen Einmaleins das in der „Sechzigertafel“ niedergelegte Einmaleins der Sexagesimalziffern tritt. Diese reine Sechzigerrechnung, die K. von Vorgängern übernommen hat, war durchaus nicht bei allen islamischen Mathematikern verbreitet, auch nicht bei denjenigen, die in erster Linie auf die Sechzigerrechnung angewiesen waren, den Astronomen. Wir nahmen schon wiederholt Gelegenheit, darauf hinzuweisen und halten hier noch einmal fest, daß wir weder in der lateinischen al-Hwārizmī-Übersetzung⁴⁴ und dem mit ihr zusammenhängenden *Liber Algorismi* des Johannes von Sevilla⁴⁵, noch in den umfangreichen trigonometrischen Rechnungen, die al-Birūnī, einer der belesensten und aufgeklärtesten islamischen Astronomen der Blütezeit, in seinem *Tahdīd*⁴⁶ darbietet, eine reine Sexagesimalrechnung finden. Hier wie auch z. B. in dem Rechenbuche eines so klugen Mathematikers wie al-Karaǧī⁴⁷ wird mit den Einheiten einer geeignet niedrig gewählten Sexagesimalstelle dekadisch gerechnet. Nur bei der Multiplikation (II, S. 11, Kap. 36) erwähnt al-Karaǧī, daß man jede Stelle $a_i \cdot 60^i$ ($i \leq 0$) des Multiplikators mit jeder ebensolchen des Multiplikanden multiplizieren könne. Ebenso vermissen wir die reine Sechzigerrechnung wohl in den meisten bisher erschlossenen byzantinischen und abendländischen Schriften des Mittelalters. Von byzantinischen Quellen seien neben den schon (S. 51) erwähnten Scholien zu Euklid Maximus Planudes⁴⁸ und Barlaam († 1348) genannt. Das dritte Buch von Barlaams Logistik⁴⁹ handelt von der Multiplikation und Division von

⁴⁹ Barlaami Monachi Logistica, griechisch und lateinisch hrsgg. von J. Chambers, Paris 1600.

„Teilen“ (μοιρα) und „Minuten“ (λεπτά), — letzteres Wort umfaßt bekanntlich außer den „ersten Minuten“ auch die „zweiten“, „dritten“ usw. Minuten, die daher ihre Namen „Sekunden“, „Terzen“ usw. haben. Barlaam weiß weder etwas von ganzen Sexagesimalzahlen noch von der Sechzigertafel. Dasselbe gilt für Levi ben Gerson (1288—1344) in seiner „Praxis des Rechners“⁹¹.

Bei dieser Sachlage erscheint es wissenswert, welche Mathematiker des Mittelalters, zunächst im Bereiche des Islam, außer K. nachweislich oder vermutlich die reine Sexagesimalrechnung kennen, lehren oder anwenden. Der folgende Überblick soll die zur Zeit mir mögliche erste Zurechtfindung in dieser Frage hinsichtlich der islamischen Mathematiker geben. Ich gehe dabei rückwärts von der spätesten Zeit auf die frühere.

Einer der letzten Gelehrten um Ulug Beg, Schüler und Nachfolger des oben (S. 5, S. 17) genannten Qāḍizāde ar-Rūmī war ‘Alī‘addīn ‘Alī b. Muḥammad al-Qūṣḡī (starb 1474) der die Tafeln Ulug Begs abschloß (vgl. oben S. 4), später aber unter Muhammed II an der Aya Sofya in Konstantinopel wirkte. Sein diesem Sultan gewidmeter Lehrbrief über das Rechnen (*ar-risāla al-Muḥammadiya fil-ḥisāb*) ist anscheinend von westeuropäischen Forschern noch nicht untersucht worden. Er weist in der Einteilung und den Überschriften der Kapitel eine starke Anlehnung an den „Schlüssel“ von K. auf (Katalog Leiden III¹¹, S. 74—75). Man kann also vermuten, daß das zweite Buch des ersten Teils, das die Überschrift „Über das Rechnen der Astronomen“ trägt, ebenso wie K.’s ähnlich überschriebenes drittes Buch eine Darstellung der reinen Sexagesimalrechnung enthält. Daß al-Qūṣḡī die ganzen Sexagesimalzahlen besaß, geht aus dem Artikel *ar-raʿ* („das Erhöhen“) in dem 1745 geschriebenen Fachwörterlexikon von at-Tahānawī⁹² (I, S. 572) hervor. Dieser Artikel erläutert die ganzen Sechzigerzahlen: „einmal Erhöhtes“, „zweimal Erhöhtes“ usw. und verweist dabei auf al-Qūṣḡī’s Lehrbrief des Rechnens.

Gleiches wie für den Abschnitt al-Qūṣḡī’s gilt für das zweite Kapitel des Werkes „Quellen des Rechnens“ (*‘Uyūn al-ḥisāb*)⁹², das von dem wenig bekannten Muḥammad Bāqir b. Zayn al-‘Ābidīn al-Yazdī verfaßt ist. Dieses Rechenbuch, das in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts geschrieben sein mag, ist uns nur in Bankipur erhalten. Seine Kapitelüberschriften und ihre Reihenfolge lehnen sich stark an K.’s „Schlüssel“ an, der nach Angabe des Katalogs auch vom Verfasser zitiert wird.

Etwas derselben Zeit wie die beiden eben genannten Verfasser von Rechenwerken gehört Sibṭ al-Māridīnī (1423—1506) an. Unter seinen

⁹¹ Levi ben Gerschom, *Sefer Maassei Choscheb*. Die Praxis des Rechners. Text u. Übers. von G. Lange, Frankfurt a. M. 1909 (1909. Progr. Nr. 560); J. Carlebach, *Levi ben Gerson als Mathematiker*. Heidelberger Diss. 1910.

⁹² Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore 22, Patna (Bihar, Indien) 1937, S. 15 Nr. 2420.

überaus zahlreichen Schriften über Rechnen und Astronomie befindet sich eine, die ausschließlich der reinen Sexagesimalrechnung gewidmet ist, und die wir deshalb näher betrachten wollen. Diese schon früher (S. 39) von uns erwähnte Schrift ist betitelt: *Feinheiten der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten*⁹⁷. Bisher scheint nur F. Woepcke ihr Beachtung geschenkt zu haben und im Anschluß an ihn Carra de Vaux⁹⁸. In seinen Untersuchungen über die Einführung der indischen Arithmetik im Abendland⁹⁹ erwähnt Woepcke auf S. 54 dieses Werkchen, von dem ihm zwei Pariser Handschriften¹⁰⁰ zur Verfügung standen, und auf S. 66 bis 70 übersetzt er das Vorwort, die Einleitung und die Kapitelüberschriften. Bei der Erörterung der Verbreitung der indischen Ziffern¹⁰¹ berührt er die Schrift (S. 464) erneut. Im Vorwort sagt Sibṭ al-Māridīnī:

Es gibt im Rechnen der sphärischen Operationen nichts schöneres, als das Rechenverfahren des Sechzigerverhältnisses, wie es in unserer gegenwärtigen Zeit angewandt wird, wo man das Verfahren der Früheren wegen seiner Schwierigkeit und seiner vielen Operationen aufgab. Ich habe keine befriedigende Einführung in diesen Zweig (der Wissenschaft) gelesen außer der Einführung unseres Meisters, des Imām, des Hochgelehrten, Šihābaddīn Aḥmad b. al-Maǧdī — möge Gott der Erhabene sich seiner erbarmen —, die betitelt ist: Enthüllung der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten. Ich kenne über diesen Zweig kein vor ihr (erschiedenes) Werk. Es gibt über die Ziele dieser Wissenschaft nur geringfügige, ungenügende Darlegung (von Kūšyār und anderen)¹⁰². Er (Šihābaddīn) — Gottes Erbarmen über ihn! — gab aber in ihr ausführliche Hinweise auf das Verfahren der Früheren in Sachen des maṣtūḥ und des ġubār und breite Auseinandersetzungen über das Verfahren des Verhältnisses, obwohl er sich kurz fassen wollte. So ergaben sich Schwierigkeiten hinsichtlich seiner Erklärungen, derart, daß man einiges davon kaum nach langem Nachdenken versteht¹⁰³.

Deshalb, so fährt Sibṭ al-Māridīnī fort, wolle er selbst eine praktische Einführung schreiben, in der er nur das Notwendige über das (Sechziger-)verhältnis bringen und die von Šihābaddīn zu knapp behandelten Dinge durch leicht verständliche Erklärungen und zahlreiche Beispiele erläutern werde. Von Hinweisen auf das Verfahren der Früheren und unnötigen Dingen wolle er dabei absehen.

Die hier übersetzten Ausführungen bestätigen unsere Beobachtung, daß die reine Sexagesimalrechnung bei den islamischen Mathematikern

⁹⁷ Die eine ist die jetzt mit Nr. 2541,1 bezeichnete; vgl. Bibliothèque Nationale, Catalogue des manusc. ar. par M. le Baron de Slane, Paris 1883—1895 S. 454. Die andere, die nach Woepckes Angabe damals noch nicht katalogisiert war, wird die Handschrift Nr. 2560,15, S. 462 des genannten Katalogs sein.

⁹⁸ Die Worte von Kūšyār (Woepcke schreibt Quīchyār) und anderen ergänze ich nach Woepckes Übersetzung. Sie fehlen in der Gothaer Handschrift⁹⁷.

und auch bei den Astronomen nicht zu allen Zeiten verbreitet war. Auffallend ist, daß Sibṭ al-Māridīnī, der anfangs wahrscheinlich in Damaskus und später ebenso wie sein gepriesener Lehrer Šihābaddīn in Kairo wirkte, den „Schlüssel“ von K. nicht nennt. Sollte dieses Werk, das vier Jahre jünger als der Vielschreiber Sibṭ war, zu seiner Zeit noch nicht nach Kairo gelangt sein? Šihābaddīn, bekannt unter dem Namen Ibn al-Mağḍī, lebte von 1365 bis 1447, war also Zeitgenosse von K. und war 62 Jahre alt, als der „Schlüssel“ 1427 erschien. Seine von Sibṭ genannte Schrift ist uns in Oxford und Algier erhalten. Nach Angabe des Oxforders Katalogs (S. 222) ist sie ein *Liber de arithmetica astronomica et Tabula sexagenaria* und besteht aus 23 Blättern. In diesem Werk hat gerade das, was Sibṭ als Ballast abwarf, die Auseinandersetzung mit den Verfahren der Früheren, für uns Belang. Nach Untersuchung der Schrift wird man auch die Abhängigkeit des Sibṭ von Šihābaddīn und die zwischen diesen beiden und K. etwa bestehenden Abhängigkeitsverhältnisse eher beurteilen können. Ferner wird man erfahren, ob *maftūḥ*, wie Woepcke angibt und wie es auch an dieser Stelle natürlich erscheint, das Kopfrechnen bedeutet. Anderswo wird für *maftūḥ* die Bedeutung „rational“ (= *munṭaq*) angegeben.

Sibṭ al-Māridīnī gibt viele Zahlenbeispiele, doch teilt er bei den meisten nur das fertige Ergebnis mit. Wie die Rechenschemata aussehen sollen, muß man sich besonders bei der Division und der Wurzelausziehung erst nach dem Text klarmachen. Denn diesem sind hierfür keine ausgeführten Muster beigegeben, und das gilt anscheinend nicht nur für die beiden von mir benutzten Handschriften.

Die Sexagesimalbrüche Minuten, Sekunden usw. werden nach Sibṭ bis ins Unbegrenzte gebildet. Diesen „Erniedrigten“ (*al-maḥṭūlāt*) stehen die entsprechenden „Erhöhten“ (*al-marṭūʿāt*) gegenüber: „einmal Erhöhtes“, „zweimal Erhöhtes“ usw. bis ins Unbegrenzte. „Dies ist die verbreitete Benennung. Einige nennen das auch „Erhöhtes“, „Gezweites“ usw.“ (dieselben Kunstwörter wie bei K.). Die „Erniedrigten“ liegen „auf der Seite des Erniedrigens“ (*fi ḡānib al-ḥaṭṭ*), die „Erhöhten“ „auf der Seite des Erhöbens“ (*fi ḡānib al-raʿ*), und die Grade liegen zwischen ihnen als „die mittleren“ (*al-wāsiʿa*).

Wie K. schreibt Sibṭ al-Māridīnī die Sechzigerzahlen im Positionssystem von rechts nach links fallend mit den Gummalbuchstaben und dem oben (S. 39) erwähnten Nullzeichen. Den Stellenwert macht er bei Zahlen im laufenden Text wie in folgendem Beispiel kenntlich: 4 25 40, *Erhöhtes, Grade und Minuten*, oder bei einer längeren Zahl: 7 38 30 49 41 45 *Quarten, und ihre erste (Stelle ist) einmal Erhöhtes*. Anderswo schreibt er aber auch einfach ähnlich wie K.: 0 30 0 36 *Terzen*. Offenbar mit Rücksicht darauf, daß bei den meisten Anwendungen die Grade die höchste Stelle bilden, hat er hier eine Null an die Spitze gesetzt, wie man auch, wenn nichts über den Stellenwert gesagt ist, die höchste Stelle als „Grad“ zu lesen hat. Für den Fall, daß den Graden höhere Stellen voraufgehen, schreibt er vor:

Du mußt aber die Stelle der Grade durch ein Zeichen markieren, wenn bei ihnen Erhöhtes steht, und wenn der Name der letzten der Stellen notiert wird, so ist das gut.⁹⁾

Den ersten Teil dieser Vorschrift sehen wir, wenigstens in den beiden von mir benutzten Handschriften, nicht befolgt. Ein solches Zeichen zur Kennzeichnung der Einerstelle der Sechzigerzahl, das K. nicht vorschreibt, bedeutet einen wirklichen Fortschritt. Es macht aus der ohne beigegebene Stellennamen relativen Sechzigerzahl eine absolute, ist ein Vorläufer der entsprechenden Kennzeichnung der Einer der Dezimalzahlen durch den dahinter gesetzten Punkt oder das Komma und entspricht dem Strichpunkt (Semikolon), den O. Neugebauer eingeführt hat. In einem Beispiel für Addition von mehr als zwei Summanden sind in der Gothaer Handschrift die Namen der Stellen wie so oft bei K. über die Spalten geschrieben, und zwar hier abgekürzt durch die letzten Buchstaben der Wörter für „Tierkreiszeichen“, „Grad“, „Minuten“, „Sekunden“.

Die „Sechzigertafel“ (Kap. 3), die nach „dem sexagesimalen Verhältnis“ (*an-nisba as-sittīniya*) so heiße — später nennt Sibṭ sie auch „Tafel der Verhältnisse“ —, ist nach seiner Beschreibung genau so gestaltet wie bei K. Ist das Produkt aus der „Breitenzahl“ und der „Längenzahl“ kleiner als 60, so heißt es „Erniedrigtes“ (*munḥaṭṭ*) und wird (entsprechend der arabischen Schreibrichtung) in die linke Seite des zugehörigen Kleinquadrats geschrieben. Andernfalls dividiert man das Produkt durch 60 und schreibt den Quotienten als „Erhöhtes“ (*marfū*) in die rechte Seite desselben Feldes und den Rest, falls ein solcher vorhanden ist, als „Erniedrigtes“ (*munḥaṭṭ*) links daneben. Ist die Stelle des Erhöhten oder die des Erniedrigten leer, so setzt man eine Null hinein.

Da die ganze Tafel nur schwer auf einem Blatt untergebracht werden könne, und, falls dies geschehe, schwer zu benutzen sei, werde sie meistens in Teiltafeln zerlegt, die man auf mehrere Blätter verteile. In der „Breite“ werde die Tafel nach Belieben untergeteilt, und gewöhnlich stelle man dann zwecks bequemer Benutzung auf einem Blatt die Teiltafel für den Bereich der „Länge“ von 1 bis 30 her und neben ihr die für denselben Breitenbereich geltende Teiltafel für die Längenzahlen von 31 bis 60. Hinter dem Schluß der Handschrift des Instituts befindet sich (46a—51b) eine solche zerlegte Sechzigertafel. Die Teiltafeln haben in der „Länge“ die Bereiche 1—30, 31—60, in der „Breite“ 1—10, 11—20, 21—30, 31—40, 41—50, 51—60, so daß 12 Teiltafeln entstanden sind.

Das Wesen der Sechzigertafel als sexagesimales Einmaleins erläutert Sibṭ gut dahin, daß hier die Einer von 1 bis 59 reichen und daß die Tafel hergestellt wurde, um alle Produkte je zweier dieser Einer zu enthalten, weil es zu schwierig sei, sie alle auswendig zu wissen.

Die Addition (Kap. 1) und die Subtraktion (Kap. 2) beginnt er bei der niedrigsten Stelle. Er schreibt bei diesen Rechnungsarten vor, das Ergebnis über die gegebenen Zahlen zu setzen. Von den vielen Multiplikationsverfahren will er (Kap. 5) nur zwei behandeln. Nach der ersten

Ausführungsart gibt er für das Beispiel der Multiplikation von 5 10 mit 20 30 40 eine Beschreibung, die bei unserer Umkehrung der Schreibrichtung zu nebenstehendem Schema führt. Hier soll die höchste Stelle beider Faktoren „Grad“ sein, und vom darüber geschriebenen Ergebnis wird die niedrigste Stelle richtig als Terzen und die höchste richtig als einmal Erhöhtes gefunden. Die zweite Ausführungsweise ist das uns bekannte Verfahren mit dem „Gitter“. Sibṭ nennt dieses Verfahren „die Multiplikation vermittels der Tafel“ (*aḍ-ḍarb bil-ğadwal*) und bezeichnet es als das schönste aller Verfahren. K. sah im Gebrauch des Gitters eine Hilfe für Anfänger.

1 45 58 26 40
1 40
2 30
3 20
3 20
5 0
6 40
5 10
20 30 40
20 30 40

Die ausführlichen Anweisungen, nach denen (Kap. 7) in verschiedenen Fällen die Division einer Sechzigerzahl durch eine andere ausgeführt werden soll, übergehe ich hier. Hingewiesen sei aber auf das achte Kapitel, das Vereinfachungen für die Fälle behandelt, in denen Dividend oder Divisor oder beide besonders geartete Zahlen sind. Ein einfacher Fall ist folgender: Der Divisor sei zweistellig und habe als höchste Stelle 1 wie bei der Aufgabe $42\ 30 : 1\ 25$. Hier sucht man in der mit der Breitenzahl 25 überschriebenen Spalte der Sechzigertafel die Zahl, die so beschaffen ist, daß wenn man zu ihrem „Erhöhten“ die zugehörige Längenzahl addiert, der Dividend oder eine ihm möglichst nahe kommende kleinere Zahl herauskommt. Dann ist die betreffende Längenzahl der gesuchte Quotient oder dessen höchste Stelle. Im Beispiel ergibt sich als Quotient 30, da 12 30 zu 42 30 wird, wenn man zu 12 die Längenzahl 30 addiert.

	25
1	0 25
2	0 50
...	...
30	12 30
..	

In diesem achten Kapitel empfiehlt Sibṭ auch für geeignete Fälle eine abgekürzte Division. Sei z. B. 49 durch 45 1 20 zu dividieren, so komme 1 5 18 3 mit dem Rest 40 56 *Quarten* heraus. Doch reiche in diesem Beispiel 1 5 18 als Ergebnis aus. In einem solchen Falle sei es am geschicktesten, den ersten Rest, der hier 3 18 40 betrage, nur durch die Grade und Minuten des Divisors, d. i. hier durch 45 1 zu dividieren, nachdem man (wie hier) die Sekunden abgestrichen oder zu den Minuten aufgerundet habe. Wenn man wolle, könne man auch den zweiten Rest dividieren, der hier 13 33 20 betrage; dann werde man ihn nur durch die Grade des Divisors (hier 45) dividieren, nachdem man die zugehörigen Minuten aufgerundet oder abgestrichen habe. „Das hat keinen Einfluß, und es liegt kein großer Nutzen in der Steigerung der Verfeinerung.“ In demselben Kapitel weist Sibṭ auf die achtegliedrigen Perioden der Sexagesimalzahlen hin, die bei der Division von 47 50 und von 1 18 durch 1 25 entstehen⁵⁵.

Die reine sexagesimale Wurzelausziehung (Kap. 9) behandelt Sibṭ nur für die Quadratwurzel und in einer weniger geschickten Anordnung als K. Im Unterschied zu K.'s Verfahren werden die zweite und die folgenden Sexagesimalstellen der Wurzeln jedesmal zunächst wie bei Theon von

Alexandrien auf eine dem Newtonschen Näherungsverfahren entsprechende Weise näherungsweise bestimmt, aber natürlich unter Verwendung der Sechzigertafel. Wie wenig brauchbar diese Näherungsbestimmung z. B. für die zweite Sexagesimalstelle von $\sqrt[3]{3}$ ausfällt, wird nicht gesagt.

Den Exponenten von 60 in einem Gliede einer Sexagesimalentwicklung, den wir bei K. als „(Kenn)zahl der Stelle“ bezeichnet haben, nennt Sibṭ ass. Er sagt in der Einleitung:

Was den ass betrifft, so ist er beim Rechnen ein Ausdruck für die Zahl der Stelle (martaba) der Zahl, hier aber ein Ausdruck für den Abstand der Stelle (rutba) der Zahl von den Graden, einerlei, ob es ein Erhöhtes oder ein Erniedrigtes ist. Die Grade haben also keinen ass; der ass der Minuten ist 1 und ebenso derjenige des einmal Erhöhten; der ass der Sekunden ist 2 und ebenso derjenige des zweimal Erhöhten und (so fort) nach dieser Vorschrift.⁹⁵

Das Wort *ass* (auch *uss* oder *iss* ausgesprochen) bedeutet „Grundlage“ (vgl. S. 59 unten). Es begegnet uns bei al-Ḥaṣṣār (wahrscheinlich 12. Jahrhundert) als Bezeichnung der Nummern der mit den natürlichen Zahlen von den Einern aufwärts gezählten Stellen der ganzen dekadischen Zahlen:

Und da die Einer die erste Stufe bilden, so sagt man, ihr ass sei 1, ebenso der ass der Zehner sei 2, derjenige der Hunderter 3 usw. . . . Und die Männer der Rechenkunst nennen dieses Kapitel der Zahlenstufen auch das Kapitel des ass⁹⁵.

Derselbe Begriff liegt bei Ibn al-Bannā' (13. Jahrh.) an einer Stelle vor, die A. Marre⁴⁸ (S. 291) so übersetzt: *Der Exponent (l'exposant) der Einer ist 1, der Exponent der Zehner ist 2, der Exponent der Hunderter ist 3 usw.*

Noch al-Qalaṣādī⁴⁹, der im Westen wirkende Zeitgenosse des Sibṭ, gebraucht (S. 10) das Wort *ass* im gleichen Sinne, während er bei den Potenzen einer Unbekannten mit demselben Wort *ass* den wahren Exponenten bezeichnet (vgl. S. 59).

Diesen bei al-Ḥaṣṣār und Ibn al-Bannā' vorkommenden, schon in der Sandrechnung des Archimedes nachweisbaren Begriff dürfte Sibṭ meinen, wenn er an der eben angeführten Textstelle sagt, der *ass* sei beim Rechnen, d. h. beim dekadischen Rechnen, ein Ausdruck für die Zahl, d. h. die Ordnungszahl, einer Stelle einer Zahl. Sehr fraglich ist, ob er hierbei schon in verbesserter Weise den Einern die Ordnungszahl 0, den Zehnern 1 usw. zuschreibt. Dem Begriff der Ordnungszahl der Stellen der ganzen Zehnerzahlen stellt er nun seinen Begriff des *ass* der Sechzigerzahlen gegenüber: Der *ass* ist der Abstand der beiderseits des Grades liegenden Stellen von diesem. Schon K. gebrauchte in diesem Zusammenhang den Ausdruck: Abstand einer Stelle von der Stelle der Grade (s. oben S. 62). Sibṭ's hier vorliegender Gebrauch des Wortes *ass* für den Exponenten der Sexagesimalstellen steht im Einklang mit al-Qalaṣādī's Gebrauch des-

⁹⁵ Nach der Übersetzung von H. Suter⁴⁵, S. 15.

selben Wortes für den Exponenten der Unbekannten. In Sibṭ's Ausspruch *Die Grade haben keinen ass* tritt uns im Vergleich mit K. dieselbe Rückständigkeit entgegen, wie in al-Qalaṣādi's Ausspruch *Die Zahl* (d. h. das konstante Glied einer Gleichung) *hat keinen ass*. K. sagt in diesen Fällen, wie wir sahen, „die Zahl des Grades“ der Eins bzw. „die (Kenn-)zahl der Stelle“ der Grade sei null. Man findet die hier erörterten Bezeichnungen weiter unten in unserer tabellarischen Zusammenstellung (S. 124) wieder.

Zur Bestimmung der „Art“ (*ḡins*), d. h. des Stellenwertes eines Produktes aus den Stellenwerten der beiden Faktoren gibt Sibṭ (Kap. 4) zunächst eine Anzahl Einzelregeln, die er dann in folgende einzige Regel zusammenfaßt:

Der ass eines Produktes ist gleich der Summe der ass der beiden Faktoren, wenn beide in der „Seite“ (ḡiha) übereinstimmen, und gleich ihrer Differenz (, genommen) auf der „Seite“ desjenigen der beiden, der den größeren ass hat, wenn sie (in der „Seite“) verschieden sind.⁴⁾

Sagen wir hier statt *ass* „absoluter Wert des Stellenexponenten“, und gebrauchen wir statt „Seite“ den Ausdruck „Vorzeichen“, so erhält die Regel die moderne Form. Sie entspricht der oben (S. 73—74) mitgeteilten Regel K.'s, aber die Regel von Sibṭ hat gegenüber derjenigen von K. den Mangel, daß sie nicht die Fälle umfaßt, in denen einer der Faktoren oder beide „Grade“ sind, d. h. den Stellenexponenten 0 haben, denn „die Grade haben“ bei Sibṭ „keinen ass“.

Für die „Art“ des Quotienten folgen (Kap. 6) entsprechende Einzelregeln, die Sibṭ dann so zusammenfaßt:

Wenn beide (nämlich die ass von Dividend und Divisor) nach „Betrag“ (kam) und „Seite“ (ḡiha) übereinstimmen, so hat das Ergebnis keinen ass. Unterscheiden sie sich in der „Seite“, so ist allgemein ihre Summe (, genommen) auf der „Seite“ des Dividenten (der ass des Ergebnisses). Sind sie verschieden nach dem „Betrag“ und stimmen sie in der „Seite“ überein, so ist (der ass des Ergebnisses) der Überschuß (, genommen) auf der gemeinsamen „Seite“, wenn er (der Überschuß) dem Dividenten zukommt, andernfalls umgekehrt. Alles dieses läuft darauf hinaus, daß der Abstand der Stelle (rutba) des Quotienten von (derjenigen) der Grade gleich dem Abstand (der Stelle) des Divisors von (derjenigen) des Dividenten ist.⁴⁾

Tafeln zur Bestimmung des Stellenwertes von Produkt und Quotient bringt Sibṭ nicht.

Das zehnte Kapitel handelt von der Probe. Diese könne man, sagt Sibṭ, mit einer beliebigen „einzeln Zahl“ (*ʿadad mufrad*) machen — so nennt Sibṭ die Sexagesimalziffern —; er, Sibṭ, beschränke sich aber auf die besten Probezahlen 7 und 8. Für die Zahl 15 9 24 0 40 reduziert man bei der Siebenerprobe die höchste Stelle 15 auf den kleinsten positiven Rest modulo 7. Diesen Rest 1 multipliziert man mit 4 und addiert das Ergebnis 4 zur nächsten Stelle 9. Mit der gefundenen Zahl 13 verfährt man ebenso wie vorher mit der höchsten Stelle 15, und so fort. Es ergibt

sich schließlich als letzter Rest 3. Bei der Achterprobe verfährt man entsprechend. Auch hier ist das Vierfache des jeweiligen Restes zur nächst niederen Stelle zu addieren. Der letzte Rest ist im obigen Beispiel 0. Die Zahl $15\ 9\ 24\ 0\ 40$ hat also für die Siebenerprobe die „Waage“ 3 und für die Achterprobe die „Waage“ 0, d.h. es ist $15\ 9\ 24\ 0\ 40 \equiv \begin{cases} 3 \text{ mod. } 7 \\ 0 \text{ mod. } 8 \end{cases}$.

Die einfache Begründung seiner Berechnung dieser „Waagen“ gibt Sibṭ nicht. Sie beruht darauf, daß 60 sowohl bei der Teilung durch 7 wie bei der Teilung durch 8 den Rest 4 läßt. Daß man bei der Achterprobe die „Waage“ nur zu der aus den beiden niedrigsten Stellen gebildeten Sexagesimalzahl zu bilden braucht, da 60^n für $n \geq 2$ durch 8 teilbar ist, und daß die Teilbarkeit des einmal „Erhöhten“ durch 4 das Verfahren der Berechnung der „Waage“ für diese Probe weiter vereinfacht, scheint Sibṭ nicht bemerkt zu haben.

Wie mit diesen „Waagen“ die Probe auf Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Quadratwurzelanziehung vorzunehmen ist, brauchen wir hier nicht wiederzugeben. Gleich anderen islamischen Rechnern (Siehe S. 26—27) meint Sibṭ, das Stimmen der Probe reiche hin, um eine Rechnung für richtig zu erklären. So sagt er in bezug auf die Addition: *Wenn die beiden* (nämlich die Summe der Waagen der Summanden und die Waage ihrer Summe) *sich decken, so ist die Addition richtig, andernfalls wiederhole sie!*¹⁴ Wie kraß ist dieser Fehler! Wenn alle Sexagesimalstellen des Ergebnisses mit Ausnahme der beiden niedrigsten falsch sind, so wird doch die Achterprobe stimmen!

Auf die Wiedergabe der Rechnungsweise und der Proben bei Zahlen, in denen Tierkreiszeichen zu je 30 Grad vorkommen, verzichten wir. Diese Rechnungen haben nur beschränkte Bedeutung. Daß Sibṭ (Kap. 5) zwei Größen, deren jede aus Tierkreiszeichen, Graden und Minuten besteht, auch miteinander multipliziert, hat weder theoretischen noch praktischen Wert. Daß er es fertig bringt, das Produkt wieder als einen Kreisbogen zu behandeln, indem er es unter Weglassung der Vielfachen von 6 Erhöhten = 360 Grad wieder durch Tierkreiszeichen, Grad und Minuten ausdrückt, wirft ein Licht auf das geringe mathematische Verständnis dieses fruchtbaren Bücherschreibers. Er scheint sich kaum bewußt zu sein, daß das Rechnen mit Graden, Minuten usw. seinen Wert darin hat, daß es ein Rechnen mit unbenannten Zahlen ist. Auch K. berücksichtigt das Rechnen mit Ausdrücken, in denen Tierkreiszeichen vorkommen, also Längen auf der Ekliptik, aber nur beim Verdoppeln, Hälften, Addieren und Subtrahieren.

Den Schluß der „Feinheiten“ bildet die Behandlung der linearen Einschaltung (Interpolation) bei Benutzung sexagesimaler Tafeln mit einem und zwei Eingängen.

Über die Geschichte der islamischen reinen Sechzigerrechnung in den vier Jahrhunderten, die der Zeit K.'s vorhergehen, müssen in Zukunft Quellenstudien Aufschluß geben. Aus einer Bemerkung Schoy's⁹⁶ ersehe ich, daß in der Berliner Handschrift der Ilhānischen Tafeln von at-Ṭūsī (1201—74 n. Chr.) das Wort *marfū'* vorkommt. Es wird hier offenbar wie überall in der Bedeutung „Erhöhtes“ für die den „Graden“ oder „Teilen“ übergeordnete Sechzigerstelle gebraucht. Hiernach besaß at-Ṭūsī die ganzen Sexagesimalzahlen. Näheres darf man aus der Untersuchung seiner beiden uns erhaltenen Rechenbücher erhoffen. Das eine derselben: „Zusammenfassungen des Rechnens mit Tafel und Staub“⁹⁷ bringt im dritten Kapitel zwei „Wege“ (*maslak*) der Bruchrechnung nach dem Verfahren der Astronomen, nämlich erstens „ihr Verfahren vermittels der Rechnung der Inder“ und zweitens „ihr Verfahren vermittels der Ḡummalrechnung“. Das andere Rechenbuch at-Ṭūsī's ist persisch geschrieben, heißt: „Schrift über die Multiplikation und die Division“⁹⁸ und handelt im dritten Buche „über die Rechnung der Grade und Minuten“.

Nun werfen wir einen Blick auf den Stand der reinen Sexagesimalrechnung in der Zeit um das Jahr 1000 n. Chr., der Blütezeit der islamischen Mathematik. Wir sahen oben (S. 66), daß zum mindesten in einer der Pariser Handschriften der „Feinheiten“ des Sibṭ al-Māridīni Ausführungen von Kūšyār über die Sexagesimalrechnung erwähnt sind. In dem schon (S. 19) genannten kleinen Rechenbuch¹⁰⁰ dieses Astronomen sind uns solche Ausführungen erhalten. Die Lebenszeit des Kūšyār b. Labbān al-Ġilī muß nach Suter (S. 83—84 Nr. 192) etwa in die Jahre 971 bis 1029 gefallen sein. Zu der Angabe von Tropicke (I³ S. 82), er sei ein jüdischer Gelehrter⁹⁹, sind mir keine Unterlagen bekannt. Sowohl seine Heimat Ġilān wie sein Name führen zu dem Schluß, daß er wie die meisten damaligen Mathematiker und Astronomen Perser war. Nach al-Baihaqī¹⁰⁰ (1105—60) nimmt man an, daß der Name seines Vaters als *Labbān* oder *Labbār* überliefert werde; in der Sprache der Bewohner von Ġilān heiße das: „der Löwe“. Von Kūšyār besitzen wir neben einer astrologischen Schrift astronomische Arbeiten, insbesondere astronomische Tafeln. Er nahm Anteil an den Fortschritten, die die Trigonometrie zu seiner Zeit machte, wie der Erfindung des sphärischen Sinusatzes und der trigonometrischen Verwertung der Tangensfunktion. Als rechnender Astronom konnte er sich wohl berufen fühlen, eine Anleitung zum Rechnen und insbesondere zu dem bei den Astronomen üblichen Rechnen mit Sechzigerzahlen zu schreiben.

⁹⁶ C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen ... al-Birūnī, Hannover 1927, S. 108.

⁹⁷ *Ġawāmi' al-ḥisāb bit-taht wat-turāb*. Vgl. Krause S. 406.

⁹⁸ *Kitāb al-qarb wal-qisma*. Vgl. Krause S. 497.

⁹⁹ Dieselbe Angabe findet sich bei A. Mieli, *La science arabe*, Leiden 1939, S. 109.

¹⁰⁰ *Al-Baihaqī, Tatimmat Siwān al-Hikma* ed. by M. Shafi', I, Lahore 1935, S. 83.

Sein Rechenbuch „Über die Elemente des Rechnens der Inder“¹⁰⁰ ist uns arabisch nur in Istanbul erhalten und es ist bei uns erst durch den Katalog von Krause bekannt geworden. Das Werkchen umfaßt in der Handschrift 31 siebzehnzeilige Seiten (263^b—278^b), die 1283—84 n. Chr. geschrieben wurden. In Oxford ist eine hebräische Handschrift, die man als Übersetzung dieses Rechenbuchs von Kūšyār angesehen hat: „Betrachtung der Elemente“¹⁰¹ verfaßt von Schalom b. Josef, der 1450 bis 1460 in Konstantinopel lebte.

Das Rechenbuch des Kūšyār ist im Gegensatz zu anderen, weitschweifigen islamischen Schriften dieser Art knapp. Da hie und da etwas nicht voll durchgeführt ist, möchte man zuweilen meinen, eine gekürzte Bearbeitung vor sich zu haben. Aber schon an-Nasawī, Kūšyār's Schüler, hebt die gedrängte Darstellungsweise im Rechenbuche seines Lehrers hervor. Die Schrift gibt an Hand von Beispielen einen so frischen und lebendigen Einblick in das dekadische und das sexagesimale Staubtafelrechnen, daß mir ihre Veröffentlichung in Text und Übersetzung lohnend erscheint, zumal sie mit den Rechenbüchern von Abul-Wafā' und al-Karaǧī zu den ältesten Rechenbüchern gehört, die sich in arabischer Sprache erhalten haben.

Der Stambuler Text beginnt nicht mit den im Bücherlexikon des Ḥāǧǧī Ḥalifa (VI, S. 51 Nr. 12691) für das „Buch (*maqāla*) über das Rechnen“ des Kūšyār mitgeteilten Anfangsworten. Die Einleitungsworte der Handschrift sagen nach Nennung des Titels „Über die Elemente des Rechnens der Inder“ nur, daß die Schrift zwei Bücher (*maqāla*) umfasse, und zwar:

1. *Buch: Die Herausbringung der Elemente durch das Einfache, Offenbare und Bekannte,*
2. *Buch: Ihre Herausbringung durch das Zusammengesetzte, d. i. vermittlels der Tafel, die „Sechzigertafel“ zubenannt ist.“)*

Da Kūšyār unter „Elementen“ (*uṣūl*) die drei Rechnungsarten Multiplikation, Division und Quadratwurzelausziehen versteht, denen er anhangsweise als viertes „Element“ das Ausziehen der Kubikwurzel beigibt, so bedeutet „Herausbringung (*istihrāǧ*) der Elemente“ die Ausführung dieser Rechnungsarten. Im ersten Buch finden wir das dekadische Positionsrechnen und die uneigentliche Sexagesimalrechnung, im zweiten die reine Sexagesimalrechnung.

Die von Steinschneider¹⁰² mitgeteilten Kapitelüberschriften der Übersetzung des Schalom b. Josef decken sich bis zur achten annähernd oder

¹⁰¹ *‘Iyūn hā’iqqārīm*. Bodl. Oppenh. 272 A. Qu. Dieser Schrift setzt Brockelmann I² S. 253 irrtümlich die Handschrift Kairo V²⁷, S. 317 gleich. Letztere enthält die 1. Maqāla von *az-Ziǧ al-ǧāmi‘* von Kūšyār und hat sphärisch-astronomischen Inhalt.

¹⁰² M. Steinschneider, Abraham Ibn Esra, Abh. z. Gesch. d. Math. 3 (1880), S. 57—128, S. S. 109. Vgl. auch M. Steinschneider, Zur Gesch. d. Übers. aus d. Ind. ins Arab., Zeitschr. d. D. Morgenl. Ges. 24 (1870), S. 332, S. 335, S. 375; ferner M. Steinschneider, Die hebr. Übers. d. Mittelalters u. d. Juden als Dolmetscher, Berlin 1893, S. 565—566.

vollkommen mit den Überschriften der ersten acht Abschnitte des ersten Buchs der arabischen Schrift. Das letzte, zwölfte Kapitel bei Schalom über die Probe entspricht dem neunten und letzten Abschnitt des ersten Buches des arabischen Textes. Kapitel 10 bei Schalom behandelt die dekadische Ausziehung der Kubikwurzel, die die arabische Handschrift anhangsweise als letzten, 16. Abschnitt des zweiten Buches bringt, obwohl sie inhaltlich zum ersten Buch gehört. Die Kapitel 9 und 11 bei Schalom behandeln das Ergebnis der Quadratwurzel und das Ergebnis der Kubikwurzel. Offenbar enthalten sie Entsprechendes wie die Abschnitte, die vom Ergebnis der Multiplikation und der Division handeln, d. h. von der Bestimmung des Stellenwertes der Produkte und Quotienten.

Die Oxforder hebräische Handschrift enthält also im wesentlichen nur den Inhalt des ersten Buches der Stambuler arabischen Handschrift, d. h. in der Hauptsache das dekadische Rechnen, nicht aber die reine Sexagesimalrechnung des zweiten Buches. Da Ḥāǧǧī Ḥalifa auch nur ein „Buch (*maqāla*) über das Rechnen“ von Kūšyār zu nennen weiß, ist es möglich, daß dem Schalom nicht mehr vorlag, als er übersetzt hat, und man kann fragen, ob etwa nur das erste Buch Kūšyār's Werk ist und ein anderer als er das zweite Buch des Stambuler Textes mit den Ausführungen über eine Sexagesimalrechnung dem ersten angefügt habe. Das müßte dann vor 1283—84, der Zeit der Niederschrift der Stambuler Handschrift, geschehen sein. Eine solche Annahme erscheint mir recht unwahrscheinlich, da das zweite Buch denselben Charakter islamischen Staubtafelrechnens der früheren Zeit trägt, wie das erste und sich dem ersten ganz organisch angliedert. Auch ist ja, wie wir (S. 66) sahen, in mindestens einer der beiden Pariser Handschriften der „Feinheiten“ von Sibṭ al-Māridīnī Kūšyār als Bearbeiter desselben Gegenstandes genannt. Ferner werden wir sehen, daß die reine Sechzigerrechnung schon vor Kūšyār vorhanden war. Eher möchte ich also annehmen, daß etwa in einer dem Schalom und dem Ḥāǧǧī Ḥalifa vorliegenden Ausgabe von Kūšyār's Rechenbuch die vielen Benutzern zu fern liegende und zu schwierig erscheinende reine Sexagesimalrechnung weggelassen war. Daß eine solche Kürzung nahe lag, werden wir bei an-Nasawī sehen. Wenn ich im Folgenden vom Werk Kūšyār's spreche, so meine ich den Inhalt der Stambuler Handschrift.

Der Behandlung der „Elemente“ wird im ersten Buche (I, 1) die Kenntnis der „Figuren“ (*suwar*) der Ziffern (*hurūf*), also der neun Zeichen

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩, ihre und der Null (*ṣifr*) Setzung im dekadischen Positionssystem, ferner (Abschn. 2) die „Vermehrung“ (*ziyāda*) und (I, 3) die „Verminderung“ (*nuqsān*) vorausgeschickt. Als „Vermehrung“ wird die Addition bezeichnet; die Subtraktion ist „Verminderung“; eine andere Art der „Verminderung“ sei die „Hälfung“ (*tanṣīf*). Es folgen (I, 4—5) Multiplikation, (I, 6—7) Division und (I, 8) Quadratwurzelausziehung. Die dekadische Kubikwurzelausziehung ist, wie oben schon gesagt wurde,

dem zweiten Buch (II, 16) angehängt. Weder bei den astronomischen noch bei den geschäftlichen Rechnungen sei sie unbedingt erforderlich.

Die Ausführung aller Rechnungen im ersten wie im zweiten Buch ist ein reines Staubtafelrechnen, das ich hier nicht schildere. Der Text mit seinen lebendigen Beispielen vermag das beste Bild zu geben. Die Rechnungen werden nach der älteren Weise ausgeführt, also Addition und Subtraktion bei der höchsten, Hältung bei der niedrigsten Stelle beginnend. Das Verfahren der dekadischen Kubikwurzelausziehung ersieht man aus meiner Wiedergabe⁵⁰ der Kubikwurzelziehung bei an-Nasawī, der den Kūšyār hierin wie in vielem anderem nachahmt.

Hier sei nur hervorgehoben, was sich auf die Sechzigerrechnung bezieht. Es fällt auf, daß Kūšyār das Rechnen mit gemeinen Brüchen so gut wie gar nicht behandelt. Sicher nachweisbar sind solche nur an wenigen Stellen. Bei der Division einer ganzen durch eine ganze Zahl dient ein gemeiner Bruch als genaue Ergänzung des ganzzahligen Ergebnisses, wenn die Division nicht ganzzahlig aufgeht; bei der nicht aufgehenden Wurzelziehung aus einer ganzen Zahl tritt er als angenäherte derartige Ergänzung auf. Bei der Division verwandelt Kūšyār obendrein diesen Restbruch genau oder näherungsweise in einen zweistelligen Sechzigerbruch. Da wo er, auch im ersten Buch, von „Brüchen“ (*kusūr*) spricht, meint er fast immer Sechzigerbrüche.

Schon dieses erste Buch behandelt Rechnungen mit Sechzigerbrüchen. In dem Unterabschnitt: „Multiplikation der Grade und Brüche“, der dem Abschnitt 4 über die Multiplikation angehängt ist, wird die Multiplikation von Sexagesimalzahlen, deren höchste Stelle höchstens „Grade“ sind, nach der Weise gelehrt, die wir oben (S. 45) als „uneigentliche Sexagesimalrechnung“ gekennzeichnet haben: Verwandlung der gegebenen Sexagesimalzahlen in „die Art (*ǧins*) des letzten Bruches“ wie Kūšyār sich ausdrückt, d. h. in Einheiten der niedrigsten Sexagesimalstelle und anschließende dekadische Multiplikation der Zahlen dieser Einheiten. Über die Rückverwandlung des Produkts in eine normale Sexagesimalzahl sagt Kūšyār nichts, wohl aber begegnen uns die auch sonst (vgl. S. 60) in der uneigentlichen Sechzigerrechnung bekannten Regeln:

*Das Produkt von Graden mit Graden ist Grade, (dasjenige) von Graden mit Brüchen sind die betreffenden Brüche, wie z. B. (dasjenige) von Graden mit ... Sekunden ist Sekunden.“*⁵¹)

Die sich unmittelbar anschließende Regel für die Multiplikation einer Sexagesimalbruchstelle mit einer anderen Sexagesimalbruchstelle finden wir auf folgende bemerkenswerte Form gebracht:

*(Das Produkt) von Brüchen mit Brüchen ist die Summe der beiden Worte, wie z. B. (dasjenige) von Minuten mit Sekunden ist Terzen, weil es eins plus zwei ist, und (dasjenige) von Sekunden mit Sekunden ist Quarten, weil es zwei plus zwei ist.“*⁵²)

Also $(a_i \cdot 60^i) \cdot (a_k \cdot 60^k) = a_i a_k \cdot 60^{i+k}$ für $i, k < 0$.

Der hier gebrauchte Ausdruck „Wort“ (la/z) bezeichnet die Grundzahl 2, 3, usw., die in den Wörtern „Sekunde“, „Terze“ usw. steckt, also den absoluten Wert des Exponenten der betreffenden gebrochenen Sechzigerstelle. Ihren Vorläufer und ihre Parallele hat die Textstelle in den Stellen S. 18 und S. 50—51 der beiden lateinischen al-Ḥwārizmī-Schriften⁴⁴. In der zweiten derselben heißt es: *Et sic semper numerus, qui ex multiplicatione fractionum in se prouenerit, denominationem habebit a numero, qui ex ipsarum agregatione prouenerit.*

Bei der Division ist von der Teilung von Ganzen mit Brüchen durch Ganze mit Brüchen die Rede. Der Gebrauch des Wortes „Ganze“ (*ṣiḥaḥ*) statt „Grade“ zeigt, daß man hier nicht bloß an Sechzigerbrüche zu denken braucht. Dividend und Divisor sollen wie bei der Multiplikation auf „die Art des letzten Bruches“ gebracht werden, so daß also z. B. der Dividend in lauter Sekunden und der Divisor in lauter Terzen verwandelt wird. Dann sollen diese Brüche dividiert werden, d. h. in unserem Beispiel die Sekunden durch die Terzen.

Aus den nun folgenden Vorschriften für die Bestimmung des Stellenwertes des Quotienten seien von den einzeln behandelten Fällen zwei hervorgehoben:

(Der Quotient) aus der Teilung von Graden durch Brüche ist Grade, die entsprechend der Zahl (*ʿadad*) des Divisors erhöht sind, wie z. B.: Grade durch Sekunden (ergibt) zweimal erhöhte Grade . . . Unter „Erhöhtem“ verstehe ich, daß das Ergebnis mit 60 multipliziert werden muß, dann das, was herauskommt, mit 60. Bis dahin ist es das Ergebnis aus der Division von Graden durch Sekunden. Oder es wird (z. B.) viermal mit 60 multipliziert, dann ist es der Quotient von Graden durch Quartan.^v)

Das bedeutet

$$a_0 : a_{-i} \cdot 60^{-i} = \frac{a_0}{a_{-i}} \cdot 60^i \quad \text{für } i > 0.$$

Letzteres Ergebnis wird als dekadische Zahl ausgerechnet. Ferner:

(Das Ergebnis) der Division eines Bruches von kleinerem „Wort“ durch einen solchen von größerem „Wort“ sind Grade, die entsprechend der Zahl (*ʿadad*) des Unterschiedes zwischen dem „Wort“ des Dividenten und (demjenigen) des Divisors erhöht sind, wie z. B. Minuten durch Terzen (ergibt) zweimal erhöhte Grade.^v)

Das heißt: Für $0 < i < k$ ist $(a_{-i} \cdot 60^{-i}) : (a_{-k} \cdot 60^{-k}) = \frac{a_{-i}}{a_{-k}} \cdot 60^{k-i}.$

Die beiden lateinischen al-Ḥwārizmī-Schriften⁴⁴ bedürfen der Einführung der n -mal erhöhten Grade nicht, da sie, wie oben (S. 58) erwähnt, Dividend und Divisor in Einheiten derselben Sexagesimalstelle, nämlich der niedrigsten vorkommenden, zu verwandeln vorschreiben, so daß stets Grade, wenn auch mitunter mehr als 59, und unter den Graden liegende Sexagesimalstellen herauskommen.

Das zweite Buch beginnt so:

Für diese drei Elemente, nämlich Multiplikation, Division und Quadratwurzel gibt es ein anderes Verfahren nach der Weise der Zusammensetzung vermittelt einer Tafel, die unter dem Namen „Sechzigertafel“ bekannt ist. Dieses Verfahren wollen wir in diesem Buche befolgen, weil es, wenn befolgt, die Anwendung der (Sexagesimal)brüche und das Weitreiben der Verfeinerung (Genauigkeit) erleichtert durch die Anlehnung an das vorhergehende Einfache (die dekadische Rechnung des ersten Buches), wobei uns keine andere Mühe obliegt, als die Ziffern (hurūf) aus der Tafel auf das Rechenbrett zu übertragen.^{aa)}

In der an die Spitze (II, 1) gesetzten kurzen Beschreibung der Sechzigertafel, die grundsätzlich genau so eingerichtet ist, wie bei K. und Sibṭ al-Māridinī, sehen wir wieder wie bei diesen beiden auch jede einzelne Spalte als „Tafel“ bezeichnet. Die ganze Tafel wird zu Beginn „Tafeln“ genannt, wenn die Schreibung der Gothaer Handschrift richtig ist. Am Kopfe jeder der 60 Spalten steht die „Breitenzahl“, deren Vielfache die Spalte enthält. Im Verlauf der Anwendungen wird z. B. die mit der Breitenzahl 18 überschriebene Spalte einfach „Tafel der 18“ (*ʿadwat lamūniyaʿašar*) bezeichnet; manchmal ist hinzugefügt: „von den Breitenzahlen“. In jeder Einzeltafel (Spalte) stehen die Vielfachen der Kopfszahl in zwei „Reihen“ (*saṭrān*), deren erste die höheren Sexagesimalstellen der zweistelligen Produkte enthält. Kūšyār nennt diese höheren Stellen „Stellen der Sechzig“ (*marātib as-sittīn*), so wie wir von der Zehnerstelle einer Zahl im Zehnergefüge sprechen. Die andere „Reihe“ enthält „die Teile der Sechzig“ (*aṣṣāʿ as-sittīn*). Aus der Beschreibung ersehe ich nicht klar, ob die beiden Stellen jedes Produkts wie bei K. nebeneinander oder untereinander geschrieben gedacht sind. Letzteres würde dem Brauch Kūšyār's entsprechen, in Rechnungen die Stellen der Sexagesimalzahlen untereinander zu schreiben. Am Längsrande stehen die „Längenzahlen“ von 1 bis 60. Von einer Zerlegung der Sechzigertafel in Teiltafeln ist nicht die Rede.

Im zweiten Abschnitt lehrt Kūšyār die Verwandlung einer ganzen dekadischen Zahl in eine ganze Sechzigerzahl. 15621 z. B. wird durch Division mit 60 in $260 \cdot 60 + 21$ verwandelt, und ebenso ergibt sich $260 = 4 \cdot 60 + 20$, und so erhält man für 15621 die sexagesimale Dar-

04

stellung, die Kūšyār in der Form 20 schreibt. Diese Verwandlung nennt

21

er „Erhöhen“ (*rafʿ*), was dem sonstigen Gebrauch dieses Wortes entspricht (vgl. oben S. 32, S. 45, S. 51).

Die oberste Stelle ist im vorliegenden Falle „zweimal Erhöhtes“, darunter folgen „einmal Erhöhtes“ und „Grad“. Falls noch „Brüche“, d. h. also Minuten, Sekunden usw. bei den Graden stehen, soll man sie unter die 21, also unter die Grade setzen. Fehlende Stellen werden nötigenfalls mit Nullen ausgefüllt. In dieser Schreibung der Sechzigerzahl mit Ziffern

nicht wiedergegeben. Oben und am rechten Rande stehen wieder die Stellenbezeichnungen für jeden der Faktoren. Sie enthalten sowohl die verschiedenen „Erhöhten“, wie die Brüche Minuten, Sekunden usw. Ich nehme an, daß auch die Grade nicht fehlten. Ist nun z. B. „einmal Erhöhtes“ mit „zweimal Erhöhtem“ zu multiplizieren, so trifft sich die Spalte, an deren Kopf „einmal Erhöhtes“ steht, mit der Zeile, die mit „zweimal Erhöhtes“ beschriftet ist, in einem Kleinquadrat, in das der Stellenwert des Produktes hineingeschrieben ist. Bei Kūšyār steht hier aber nicht, wie bei K., das Wort „dreimal Erhöhtes“, sondern die schwarz geschriebene Ziffer 3, die anscheinend als Gummalbuchstabe γ geschrieben ist. Schwarz geschriebene Ziffern bedeuten den Stellenexponenten von „Erhöhten“, rot geschriebene von „Brüchen“. Eine rote 4 würde also Quarten anzeigen. Was der Mathematiker der Gegenwart durch die Vorzeichen $+$ und $-$ andeutet, nämlich das, was das Mittelalter so oft als die eine oder andere von zwei „Seiten“ bezeichnet, ist also hier durch schwarze und rote Farbe unterschieden, so wie heutzutage der Kaufmann in Abrechnungen die Vermögensbeträge schwarz, die Schuldsummen aber rot einträgt. Umgekehrt malten im Mittelalter die Chinesen positive Zahlen rot, negative schwarz¹⁰³. Als schwarz oder rot geschriebene Ziffern treten also hier in der islamischen Mathematik, der man eine ausdrückliche Einführung der negativen Zahlen absprechen muß, die Zahlen auf, die wir als positive oder negative Exponenten in der Entwicklung nach Potenzen von 60 bezeichnen. Ob in dieser Tafel Kūšyār's die Exponenten der Grade als Nullen eingetragen waren, ist aus seiner Beschreibung nicht ersichtlich.

Für die Bestimmung des Stellenwertes des Quotienten sieht Kūšyār eine besondere Tafel vor, die entsprechend der vorhin beschriebenen angelegt ist.

Der zwölfte Abschnitt des zweiten Buches lehrt, daß bei einer n -stelligen ganzen Sexagesimalzahl die höchste Stelle $(n - 1)$ -mal Erhöhtes ist, ferner, daß bei Division von m -mal Erhöhtem durch n -mal Erhöhtes die Stelle der Grade die $(m - n + 1)$ -te Stelle von oben sei.

Wie die Überschriften zeigen, sollte in den dreizehnten Abschnitt die Sechzigertafel kommen, der vierzehnte und der fünfzehnte sollten die soeben beschriebenen beiden Tafeln für den Stellenwert von Produkt und Quotient enthalten. Unsere Handschrift hat nur die Überschriften.

Wie das erste Buch (I, 9) mit der Probe schließt, so behandelt Kūšyār im zweiten Buche (II, 11) gegen Ende der Ausführungen über die reine Sexagesimalrechnung ebenfalls die Probe. In beiden Fällen begeht er nicht wie andere die Torheit, das Stimmen der Probe als hinreichend für die Richtigkeit der Rechnung zu erklären. Aber seine Probe für die Sexagesimalrechnung ist ungeschickt. Er überträgt die Neunerprobe, die er bei der Rechnung im Zehnersystem allein dargeboten hat, auf die Rechnung im Sechzigersystem.

Um z. B. die „Waage“, d. h. den kleinsten positiven Rest der Division

¹⁰³ Vgl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik I³ (1907), S. 685.

durch 9 für die ganze dreistellige Sexagesimalzahl 25 38 46 zu bilden, reduziert er die Quersumme 7 der höchsten Stelle 25 auf ihren kleinsten positiven Rest modulo 9, der hier 7 selbst ist. Diese Zahl 7 multipliziert er mit 6 und addiert zum Produkt 42 die Ziffern 3 und 8 der zweithöchsten Stelle 38. Die Summe 53 wird wieder (durchfortwährendes Subtrahieren von 9) auf den kleinsten positiven Rest modulo 9 gebracht, der hier 8 ist. Dann wiederholt sich das Spiel: $8 \cdot 6 + 6 + 4 = 58 \equiv 4 \pmod{9}$. Die „Waage“ von 25 38 46 ist also 4.

Kūšyār macht sich hier unnötige Arbeit. Er bemerkt nicht, daß die dritte Stelle von unten und alle höheren Stellen einer ganzen Sexagesimalzahl, nach ihrem Stellenwert zusammengenommen, eine Zahl bilden, die durch 60^2 , also auch durch 9, teilbar ist. Die Neunerwaage einer mehr als zweistelligen ganzen Sechzigerzahl ist also gleich der Neunerwaage der aus den beiden niedrigsten Stellen bestehenden ganzen Sechzigerzahl. Und auch für diese zweistellige Sechzigerzahl ließe sich Kūšyār's Bildungsvorschrift noch vereinfachen, da die höhere der beiden Stellen einen durch 60, also durch 3 teilbaren Bestandteil darstellt. Wie geringwertig diese Neunerprobe der Sechzigerzahlen ist, erhellt daraus, daß sie in der dritten Stelle von unten des Ergebnisses und in allen höheren Stellen keinen Fehler aufdecken kann. Ähnliches begegnete uns bei der Achterprobe des Sibṭ al-Māridīnī. Dagegen wählte K. im Sechzigergefüge die „Waage“ 59. Sie ist das wahre Gegenstück der „Waage“ 9 des Zehnergefüges, weil $60 \equiv 1 \pmod{59}$ ist, wie $10 \equiv 1 \pmod{9}$.

Nichts nimmt der Verfasser als neu oder gar von ihm selbst erfunden in Anspruch. Dies gilt besonders für die *Tafel, die unter dem Namen Sechzigertafel bekannt ist* (vgl. oben S. 78), und deren Einrichtung ebenso wie die „Erhöhten“, d. h. die ganzen Sechzigerzahlen, als übernommenes Gut erscheint. Bemerkenswert ist, daß die „Erhöhten“, wie wir sahen, bei der Behandlung der Division in die uneigentliche Sechzigerrechnung des ersten Buches sozusagen übergestrahlt sind, dort aber sofort in Zahlen des Zehnersystems verwandelt werden.

Die Beurteilung von Kūšyār's Rechenbuch enthält dadurch weitere Unterlagen, daß wir das Rechenbuch von an-Nasawī heranziehen. Nach al-Baihaqī¹⁰⁰ (S. 109—110) gehörte dieser am Buyidenhof zu ar-Raiy wirkende Perser, der an die 100 Jahre alt geworden sein soll, zu den Schülern des Kūšyār. Sein von uns schon wiederholt genanntes Rechenbuch⁴⁷ „Das Zufriedenstellende (*al-muqni'*) über das indische Rechnen“ ist uns in Leiden erhalten. Im Vorwort, das der Leidener Katalog abdruckt, setzt sich an-Nasawī mit den Rechenbüchern seiner Vorgänger auseinander und sagt unter anderem:

Einige hatten eine Art verfaßt, die (nur) an eine einzige Art der angewandten Rechnungen (mu'āmalat) gebunden ist, wie Abū Ḥanīfa ad-Dīnawarī und Kūšyār al-Ġilī. Denn trotz der kurzen Fassung schrieb Kūšyār für die astronomische Rechnung den Leitfaden (daftar) der übrigen angewandten Rechnungen, und Abū Ḥanīfa schrieb für die übrigen angewandten Rechnungen den Leitfaden der astronomischen Rechnung.⁶⁶

⁶⁶ Luckey, Rechenkunst.

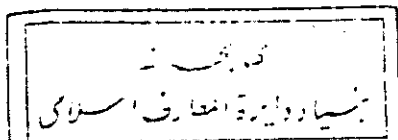
Wenn ich die hier über Kūšyār gemachte Bemerkung richtig verstehe, so wirft an-Nasawī seinem Lehrer vor, daß sein Rechenbuch zwar, wie auch dessen Titel „Elemente des Rechnens der Inder“ zeigt, allen möglichen Anwendungen des Rechnens gerecht werden sollte, daß der Verfasser es aber bei der Ausführung zu sehr auf die astronomischen Rechnungen zugespitzt habe. Das würde gut zu dem oben von uns gekennzeichneten Inhalt passen und dafür sprechen, daß auch das zweite Buch des Werkes dem Kūšyār angehört.

In seinem eigenen Werk verspricht an-Nasawī solche Einseitigkeit zu vermeiden; er will eine für alle angewandten Rechnungen, einschließlich der astronomischen, brauchbare Anleitung schreiben. So ist denn zu verstehen, daß er, der sich stark an Kūšyār anlehnt, zwar die uneigentliche Sechzigerrechnung nach dem Vorbild von Kūšyār's erstem Buch behandelt — siehe das Beispiel oben S. 44—45 —, nicht aber die reine Sechzigerrechnung entsprechend Kūšyār's zweitem Buch. Man muß sich stets vergegenwärtigen, daß auch für die Mehrzahl der astronomischen Rechnungen, insbesondere die der sphärischen Trigonometrie, die gegebenen und die gefundenen Sechzigerzahlen fast immer aus weniger als 60 Einern („Teilen“, „Graden“), ferner Minuten und höchstens noch Sekunden bestanden, und daß man also, wie die Rechnungen in al-Bīrūnī's *Tahdīd* auch zeigen, mit der uneigentlichen Sechzigerrechnung auskam. An-Nasawī bringt in seinem Vorwort zum Ausdruck, daß er das mehr Abgelegene und ihm schwierig Erscheinende meiden will. So mag er auch der reinen Sechzigerrechnung als etwas zu Theoretischem und Ungewohntem aus dem Wege gegangen sein. Im übrigen geht seine Abhängigkeit von Kūšyār, auch in den gebrauchten Ausdrücken, weit. Wie dieser arbeitet er bei der Division der Sechzigerzahlen mit „einmal Erhöhten“, „zweimal Erhöhten“ usw. und bestätigt damit, daß die Sechzigerstellen mit positivem Exponenten zu seiner Zeit eingeführt waren. Natürlich muß er auch die Ausziehung von Wurzeln aus Sechzigerzahlen auf uneigentliche Weise lehren. Bei Kūšyār fehlt diese Behandlungsweise der Wurzeln, da er offenbar die Wurzelausziehung auf rein sexagesimale Art als einfacher betrachtete.

Abgesehen davon, daß Kūšyār b. Labbān die reine Sechzigerrechnung als etwas Übernommenes darbietet, besitzen wir noch ein gewichtiges Zeugnis dafür, daß sie zu seiner Zeit vorhanden war. Nach Angabe des zuverlässigen Biographen und Bücherkenners Ibn al-Qiftī¹⁰⁴ (1172 bis 1248) verfaßte Abul-Wafā' al-Būzaḡānī eine „Schrift über die Rechnung mit der sexagesimalen Tafel“ (*kitāb al-'amal bil-ḡadwal as-sittīnī*). Der Perser Abul-Wafā', vielleicht der bedeutendste Mathematiker jener Blütezeit, war am 10. Juni 940 n. Chr. in Būzaḡān bei Nisābūr geboren und starb nach Ibn al-Qiftī am 1. Juli 998¹⁰⁵. Auf seine Bruchrechnung

¹⁰⁴ Ibn al-Qiftī⁶⁰ S. 288 Z. 14.

¹⁰⁵ Nach Ibn Ḥallikān soll er im Jahre 387 d. H. gestorben sein, das am 2. Januar 998 endete. In diesem Jahre 387 d. H. beobachtete er in Bagdad eine Mondfinsternis in Verabredung mit al-Bīrūnī, der diese Finsternis in der Hauptstadt von Ḥwārizm beobachtete. (*Tahdīd*⁷⁴) S. 275.)



gingen wir schon ein. Seine Schrift über reine Sechzigerrechnung ist uns nicht erhalten. Indessen scheint sein oben (S. 29) erwähntes Rechenbuch⁵⁸ zu bestätigen, daß er die reine Sechzigerrechnung besaß. Die erste „Station“ (*manzila*) des Werkes, die mir bisher allein zugänglich war, enthält keinen unmittelbaren Hinweis auf die reine Sechzigerrechnung. Eher kann dies bei der noch zu untersuchenden zweiten Station der Fall sein, denn Woepeke, der die Leidener Handschrift einsah, sagt von den beiden ersten Stationen¹⁰⁶:

Les deux premiers livres forment un traité complet d'arithmétique pratique. On y trouve une théorie fort développée des fractions, de la conversion des nombres entiers et des fractions en quantités sexagènes et sexagésimales, de la multiplication des nombres entiers et des fractions.

Die zweite Station enthält hiernach unter anderem die Verwandlung ganzer Zahlen des Zehnergefüges in ganze Sechzigerzahlen. Wir sahen, daß Kūsyār mit dieser Verwandlung die reine Sechzigerrechnung seines zweiten Buches eröffnete.

Obwohl die erste Station zwar keine Sechzigerrechnung behandelt, ist sie uns im Hinblick auf die Sechzigerrechnung wichtig. Sie bringt zahlreiche Tafeln und Anleitungen für Verwandlungen von einfachen Brüchen und ganzen rationalen Verbindungen solcher Brüche in andere Brüche und Bruchverbindungen, insbesondere auch in Brüche mit dem Nenner 60 und Tafeln und Anleitungen für die umgekehrten Verwandlungen. Zunächst werden die „Häupter“ als Brüche mit dem Nenner 60 ausgedrückt. Es ergeben sich die beiden Zusammenstellungen

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \hline 30 & 20 & 15 & 12 & 10 & 6 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \hline 8\frac{4}{7} & 7\frac{1}{2} & 6\frac{2}{3} \end{array}$$

In der Leidener Handschrift sind diese wie alle Zahlen in Worten geschrieben. Unter jedes „Haupt“ ist hier der Zähler des gleichwertigen Bruches mit dem Nenner 60 gesetzt. Bei der ersten Gruppe ist der Zähler des Bruches mit dem Nenner eine ganze Zahl, bei der zweiten eine gemischte.

Dann folgt eine Tafel, in der zu jedem der Brüche

$$\frac{m}{n} \quad (n = 2, 3, \dots, 10; 1 < m \text{ ganz} < n)$$

sowohl der Zähler des gleichwertigen Bruches mit dem Nenner 60 wie auch eine Darstellung der Summe von Zahlen angegeben ist, die nur Häupter oder $\frac{1}{60}$ oder Produkte zweier Brüche dieser Arten („angehängte Brüche“) sind. Von dieser Tafel, deren erste Spalte geordnet in der Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ fortschreitet, gebe ich hierneben einen Aus-

¹⁰⁶ F. Woepeke, Sur l'introduction⁵⁶ S. 53.

$\frac{2}{3}$	40	$\frac{2}{3}$	schnitt. Die mittlere Spalte gibt nicht in allen
$\frac{3}{4}$	45	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	Fällen die volle Sexagesimalentwicklung des vor-
$\frac{2}{5}$	24	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$	gelegten Bruches, wie das auch die untere Zeile der
..	...	...	zweiten der obigen Tafeln für die Häupter nicht
$\frac{2}{7}$	17 $\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}$	tat; aber der Benutzer kann diese Entwicklung mit
..	...	...	Hilfe der vorhandenen Tafeln herstellen. Z. B.
$\frac{4}{9}$	26 $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	findet er für $\frac{4}{9}$ zunächst 26 $\frac{2}{3}$. Die erste Sechziger-
..	...	...	stelle der Entwicklung von $\frac{4}{9}$ ist also 26. Zu $\frac{4}{9}$
			liefert ihm dieselbe Tafel die Zahl 40 als zweite
			Sechzigerstelle von $\frac{4}{9}$. Bei den Brüchen mit dem
			Nenner 7 wird sich die Entwicklung als unendlich
			und periodisch erweisen.

Auf die weiter dargebotenen Verwandlungen, z. B. die Verwandlungen von Summen von Häuption und Produkten von Häuption in Brüche mit dem Nenner 60 und die umgekehrten Verwandlungen gehe ich nicht ein. Der Gegenstand erfordert eine ausführliche Darstellung, wobei der Text zu übersetzen ist und die entsprechenden Ausführungen im Rechenbuch von al-Karağī⁵² heranzuziehen sind. Hier hebe ich aber aus den sich daran anschließenden Ausführungen eins heraus:

Es sei eine Zahl m zu einer Zahl n ins Verhältnis zu setzen, d. h. es sei das Ergebnis der Division $m : n$ genau oder annähernd als Summe von Häuption (einschließlich $\frac{1}{2}$) und Häuptionprodukten auszudrücken.

Wir beschränken uns hier auf ganzzahliges m , obwohl Abul-Wafā' auch für eine gemischte Zahl m die Aufgabe lösen kann. Der ebenfalls ganzzahlige Divisor n habe zunächst keine anderen Primfaktoren als diejenigen der Nenner 2, 3, ..., 10 der Häuption, also höchstens die Primfaktoren 2, 3, 5, 7. Abul-Wafā' verwandelt nun

(n)	$\left(\frac{60}{n}\right)$	zunächst den darzustellenden Quotienten $\frac{m}{n}$ in
2	30	einen Bruch mit dem Nenner 60. Um den Zähler
3	20	dieses gesuchten Bruches zu finden, soll man ent-
4	15	weder $60 \cdot m$ ausrechnen und durch n dividieren,
..	...	oder man soll $\frac{60}{n}$ mit m multiplizieren. Nur auf
7	8 $\frac{4}{7}$	dieses zweite Verfahren gehen wir hier ein. Zu
8	7 $\frac{1}{2}$	seiner bequemen Ausführung bringt Abul-Wafā' die
..	...	hierneben teilweise wiedergegebene Tafel, die
42	1 $\frac{3}{7}$	er dem Gedächtnis einzuprägen empfiehlt. In ihr
45	1 $\frac{1}{3}$	durchläuft die Zahl n der ersten Spalte alle Zahlen
48	1 $\frac{1}{4}$	von 2 bis 120, die nur die genannten Primfaktoren
49	1 $\frac{1}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7}$	2, 3, 5, 7 besitzen. Neben dieser Zahl n der ersten
..	...	Spalte steht in der zweiten Spalte die Zahl $\frac{60}{n}$
120	1 $\frac{1}{2}$	als gemischte Zahl. Um z. B. $\frac{9}{7}$ auf den Nenner 60
		zu bringen, entnimmt man der Tafel zu $n = 7$ die

60-fache Reziproke $\frac{60}{n} = 8\frac{1}{2}$ und multipliziert diesen Wert $8\frac{1}{2}$ mit 6. Man erhält $51\frac{1}{2}$ und der gesuchte Bruch mit dem Nenner 60 ist also $\frac{51\frac{1}{2}}{60}$.

Hier haben wir eine Tafel, die demselben Zweck dient, wie die alt-babylonischen Reziprokontafeln, nämlich dem Zweck, eine Division als Multiplikation auszuführen. Es erscheint mir reizvoll und auch für das Verständnis der babylonischen Rechenweise fruchtbar, zwischen Anlage und Gebrauch der babylonischen Reziprokontafeln und dieser islamischen Reziprokontafel Vergleiche anzustellen.

Der Bruch mit dem Nenner 60 ist hier für Abul-Wafā' nicht Ziel, sondern Durchgangsstation. Aus einer vorhergehenden ausführlichen Anleitung, die alle auftretenden Brüche von der Art $\frac{51\frac{1}{2}}{60}$ durch Häupter

und $\frac{1}{2}$ darzustellen lehrt, ergibt sich $\frac{51\frac{1}{2}}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, und so ist an die Stelle der von den Schreibern und Rechnern gemiedenen Form $\frac{1}{2}$ die „schöne“ Darstellung durch Häupter gesetzt.

Für den Fall, daß die ganze Zahl n „unaussprechbar (*aṣamm*) nach der Weise der Schreiber“ ist, d. h. daß n auch andere Primteiler als 2, 3, 5, 7 hat, zeigt Abul-Wafā' verschiedene Verfahren, $\frac{m}{n}$ näherungsweise als Summe von Häuptern und Häupterprodukte darzustellen. Der von ihm bevorzugte Weg geht durch die sexagesimale Entwicklung von $\frac{m}{n}$ hindurch. Er bricht diese Entwicklung je nach der gewünschten Genauigkeit der Annäherung hinter den ersten Sechzigsteln oder bei einer höheren Stelle ab, wobei er nötigenfalls die letzte benutzte Stelle um eine Einheit aufrundet.

Über Abul-Wafā' hinaus kann ich zur Zeit die reine Sechzigerrechnung in der islamischen Welt nicht zurückverfolgen. Das hier gegebene Bild ist naturgemäß lückenhaft. Aus den zahlreichen uns erhaltenen und noch nicht untersuchten arabischen und persischen Rechenbüchern wird man es ohne Frage ergänzen können. Leider hat sich aus der Zeit vor Abul-Wafā' kaum ein Rechenbuch erhalten. Es gab deren eine Anzahl, so die im *Fihrist*¹⁰⁷ nach Verfasser und Titel angeführten und diejenigen, welche an-Nasawī in der Einleitung seines eigenen Rechenbuches kritisiert. Von uns erhaltenen älteren Werken, die Aufschlüsse versprechen, nenne ich das „Buch der Vollendung im Rechnen“ von 'Abdalqāhir b. Tāhir al-Baġdādī¹⁰⁷ († 1037). Der dritte der 7 Teile dieses Werkes enthält in 8 Kapiteln die „Darlegung der Kenntnis der Vorschriften des Verfahrens bei der Rechnung der Grade, Minuten und dergleichen“.

¹⁰⁷ Istanbul, *Laleli* 2708, 1. Vgl. Krause S. 474.

Besondere Beachtung verdient ferner eine Abhandlung, die Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq (lebte um 1000) als Lehrbrief an seinen Schüler al-Bīrūnī richtete. Diese Schrift, die nach einem von al-Bīrūnī selbst angelegten Verzeichnis¹⁰⁸ den Titel „Lehrbrief über die Minutentafel“ trug, hat sich in Oxford¹⁰⁹ und in Bankipur¹¹⁰ erhalten. Der Katalog von Bankipur bezeichnet sie als *the best work on sexagenary methods of calculation*, und wenn mit der „Minutentafel“ die Sechzigertafel gemeint ist, so ist dies ein weiteres Zeichen dafür, daß um das Jahr 1000 die reine Sechzigerrechnung vorhanden war. Daß, wie wir sahen, al-Bīrūnī in seinem 1025 abgeschlossenen *Tahḍīd* von der reinen Sechzigerrechnung keinen Gebrauch macht, spricht nicht gegen diese Vermutung. Er macht in demselben Werke auch keinen Gebrauch vom sphärischen Sinussatz, über den ihn Abū Naṣr in einem Lehrbrief unterrichtete¹¹¹. Dort wie hier könnte Abul-Wafā' Anregung oder Anstoß zur Abfassung des Lehrbriefes gegeben haben.

Neben den Rechenbüchern wird man aber zusehen, ob man in den Werkstätten der angewandten Rechnungen selbst Anzeichen vom Gebrauch der reinen Sechzigerrechnung findet. Hier kommt natürlich in erster Linie die Astronomie mit ihrer Hilfswissenschaft, der Trigonometrie, in Betracht, vor allem die Berechnung der trigonometrischen Tafeln. Bisher sind mir neben dem erwähnten Anzeichen bei aṭ-Ṭūsī nur K.'s Berechnungen von 2π und $\sin 1^\circ$ als Anwendungen der reinen Sechzigerrechnung, und zwar großartig geglückte, bekannt.

Es mögen noch Hinweise auf einige späte, die Sechzigerrechnung betreffende islamische Schriften folgen, die zeigen, wie lange diese Methoden im Osten ihr Dasein weitergefristet haben. Zu den „Feinheiten“ des Sibṭ al-Māridīnī gibt es neben verschiedenen Auszügen einen mir nicht zugänglichen Kommentar des 1774 gestorbenen Ḥasan al-Ġabartī¹¹². Das Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften in Berlin besitzt drei auf die reine Sechzigerrechnung bezügliche Handschriften¹¹³. Eine von ihnen (II. 49), 1823 geschrieben, die die „Feinheiten“ von Sibṭ al-Māridīnī enthält, wurde von uns (S. 39, S. 65 bis 73) schon herangezogen.

Von den beiden anderen hat die eine (II. 1) zum Verfasser einen sonst unbekannten Muḥammad b. Muḥammad as-Šarnaqāšī (?). Die Fassung des Titels deutet auf die Spätzeit islamischer Mathematik. Er lautet: „Die köstlichen Perlen und das rechnerische Ergebnis in der Ermittlung

¹⁰⁸ Al-Bīrūnī, *Chronologia orientalischer Völker*, hrsgg. von E. Sachau, Leipzig 1878 und 1923, S. XXXXVII.

¹⁰⁹ Jo. Uri, *Bibliothecae Bodleianae codd. mss. or. catalogus I*, Oxford 1787, S. 203 Nr. 940, 6.

¹¹⁰ Katalog Bankipore 22⁹²) S. 70 Nr. 2468, 14 (86^a—93^b).

¹¹¹ P. Luckey, *Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung*. Deutsche Mathematik 5 (1940), S. 405—446. S. S. 415—446.

¹¹² Vgl. Brockelmann II S. 108, Suppl. II S. 216—217.

¹¹³ Handschriftenkatalog¹⁰ S. 171—174, S. 208.

der Anteile (*hişas*) und den Rechnungen aus den sexagesimalen Tafeln“. Der Verfasser sagt in den Einleitungsworten, das Bedürfnis der Berechnung der Gebetszeiten habe ihn zur Abfassung dieser Schrift bewogen. Die Prüfung des Werkchens ergibt, daß „Die köstlichen Perlen“ gestohlen sind. Die Anleitungen zum sexagesimalen Rechnen hat der Verfasser oder ein Vorgänger mit einigen Umstellungen samt den Beispielen überwiegend wörtlich aus den „Feinheiten“ des Sibṭ al-Māridīnī, den er nicht nennt, abgeschrieben. Obwohl dabei das Verfahren der Wurzelausziehung weggelassen ist, wird bei der Behandlung der Probe, dem Wortlaut der „Feinheiten“ entsprechend, auch die Probe der Wurzelausziehung behandelt, wobei auf die Beispiele der Wurzelausziehung zurückgegriffen und zurückverwiesen wird, die dieses Kompilat gar nicht gebracht hat. Die Schrift leitet ferner dazu an, unter Verwendung von Tabellen Aufgaben der sphärischen Astronomie zu lösen, die mit der Auffindung der Gebetszeiten zusammenhängen. Vermutlich sind diese Anleitungen anderswo abgeschrieben, vielleicht aus einer anderen Schrift des Sibṭ.

Auf S. 16 b befindet sich eine Tafel zur Bestimmung der „Art“, d. h. des Stellenwertes des Produktes und eine solche zur Bestimmung des Stellenwertes des Quotienten. Diese Tafeln sind wie bei Kūşyār und K. angelegt. Die „Erhöhten“ sind hier durch die Ziffern $\backslash$, γ , γ , ... bezeichnet, die Grade, Minuten, usw. durch die Endbuchstaben der betreffenden arabischen Wörter.

Auf diese Schrift folgt in demselben Handschriftenband eine zweite Handschrift (II. 2), die auf Seite 19 a als „Lehrbrief über das Sechzigerverhältnis bei der Rechnung der Zeitwissenschaft“ bezeichnet wird und nach einer Angabe an derselben Stelle im Jahre 1239 d. H., d. i. 1823—24 geschrieben wurde. Die „Zeitwissenschaft“ befaßt sich vorwiegend mit der Festlegung der Gebetszeiten.

Der hauptsächliche Inhalt der Handschrift ist eine Sechzigertafel (S. 19 b—24 a). Die Teiltafeln gehen in der „Länge“ von 1 bis 30 und von 31 bis 60, in der „Breite“ von 1 bis 6, 7 bis 12, ..., 55 bis 60. Bemerkenswert ist, daß über den Breitenzahlen 1, 2, 3, ..., 59, 60 deren sechzigste Teile $\frac{1}{60}$, $\frac{2}{60}$, $\frac{3}{60}$, ..., $\frac{59}{60}$, 1 in arabischen Bruchausdrücken angegeben sind. Z. B. steht über 3: „einhalb des Zehntels“, d. i. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. Ebenso steht über 7 der Wortausdruck für $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$, und über 59

derjenige für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{59}{60}$. So kann die Tafel dazu dienen, $\frac{n}{60}$ einer Sechzigerzahl für $n = 1, 2, \dots, 59$ zu bilden, wenn $\frac{n}{60}$ in der angedeuteten

Weise durch die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, ... ausgedrückt ist. Ferner ist über den Kopfszahlen 1, 2, ..., 60 ihre Quadratwurzel angegeben, und zwar meist auf drei gültige Sexagesimalstellen.

Die reine Sechzigerrechnung hat im Mittelalter in das Abendland Eingang gefunden, doch scheinen hierüber keine eingehenden Forschungen vorzuliegen. Eine sexagesimale Produktentafel bis 49 mal 49 findet sich nach Eneström¹¹⁴ bei Petrus de Dacia (um 1300). „Gewiß war das wichtig“, sagt hierzu E. Zinner¹¹⁵, „denn bald nach 1300 entstehen in Paris die sogenannten Alfonsischen Tafeln, die im Gegensatz zu den vorhergehenden Tafeln die Sechzigerteilung vollständig durchführen, so daß man nicht nur die Bruchteile der Stunden und Grade durch Sechzigerbrüche darstellte, sondern auch je 60 Tage und Grade zu neuen Einheiten zusammenfaßte“. Johann von Gmunden (um 1380 bis 1442) übernahm die 60-gradigen Zeichen ausdrücklich aus den Alfonsischen Tafeln¹¹⁶. In dem Brief, den Bianchini¹¹⁷ am 5. 2. 1464 am Regiomontan schrieb, ist von der Herstellung einer Sechzigertafel die Rede.

Später begegnet uns diese Tafel in gedruckten Büchern. Orontius Finæus (1494—1555) brachte sie in Buch I seiner 1532 erschienenen „Promathesis“ unter der Bezeichnung *Canon Sexagenarius*, die eine wörtliche Übersetzung des schon von Abul-Wafā' gebrauchten Ausdrucks *al-ğadwal as-sittīnī* sein mag. Ich sah die 1542 erschienene dritte Auflage seiner „Arithmetica practica“ ein, deren drittes Buch die gebrochenen Zahlen *iuxta mentem astronomorum, per sexagenariam partium successionem distributis* behandelt. Auf Blatt 45^a—46^b befindet sich die in vier Teiltafeln zerlegte Sechzigertafel, hier *Tabula proportionalis* genannt. Die Faktoren am linken Rand laufen von 1 bis 60, die am oberen Rande laufen bei den einzelnen Tafeln von 1 bis 15, von 16 bis 30, von 31 bis 45 und von 46 bis 60. Quadrat- und Kubikzahlen sind durch Fettdruck des linken und rechten Randes des betreffenden Häuschens hervorgehoben. Der Bestimmung des Stellenwertes von Produkt und Quotient dient wie bei Kūšyār und anderen islamischen Schriftstellern je eine Tafel mit zwei Eingängen, die sich über ganze und gebrochene Stellenwerte erstreckt.

Auch der Wittenberger Mathematiker und Astronom Caspar Peucer bringt in seiner 1556 erschienenen „Logistica astronomica“ sowohl die höheren ganzen Sechzigerzahlen (die „Erhöhten“): *sexagena prima, secunda* usw. wie die Sechzigerbrüche: *scrupulum primum, secundum* usw. Ausführlich behandelt er die Einrichtung und Herstellung der Sechzigertafel.

Ebenso besitzt John Chambers, der Herausgeber und Erläuterer der (S. 64 unten) erwähnten, 1600 erschienenen Druckausgabe der Logistik Barlaams⁹⁰, die reine Sechzigerrechnung. Der sexagesimalen Rechen-

¹¹⁴ *Tabula magistri Petri Philomeni de Dacia ad inveniendum propositionem cuiusvis numeri*. Biblioteca Vaticana Cod. Reg. Suec. n. 1452. Vgl. G. Eneström, *Bibl. Math.* (2) 4 (1890), S. 32.

¹¹⁵ E. Zinner, *Petrus de Dacia*. *Archeion* 18 (1936), S. 318—329. S. 321.

¹¹⁶ Cantor¹⁰³ II³ (1913), S. 177.

¹¹⁷ *Abh. z. Gesch. d. math. Wiss.* 12 (1902), S. 239.

weise Theons von Alexandrien und Barlaams stellt er das Rechnen mit der Sechzigertafel mit folgenden Worten gegenüber:

In unserer Zeit ist ein bedeutend bequemerer Verfahren zur Geltung gelangt, das sich auf eine gewisse Art von Zahlenabakus stützt, der gewöhnlich „Tafel der Tafeln“ oder „Tafel der Proportionen“ oder „der Sechziger“ genannt wird¹¹⁸.

Bei diesen Bezeichnungen denken wir wieder an die entsprechenden arabischen Namen und insbesondere daran, daß auch in arabischen Texten für die Spalten der Sechzigertafel dasselbe Wort „Tafel“ (*jadwal*) gebraucht ist, wie für die Gesamtheit dieser eindimensionalen Tafeln.

Chambers bietet ebenfalls einen „Abakus der Sexagenen und Skrupeln“ zur Bestimmung der „Spezies“ des Produktes dar. Diese Tafel entspricht unserer auf S. 63 wiedergegebenen Tafel K.'s. Die „Spezies“, d. h. hier die Stellenwerte, sind an den Rändern und in allen Feldern als Zahlen wiedergegeben. Diejenigen an den Rändern sind $\bar{6} \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$, d. h. sie laufen von den sechsten Sexagenen (60^6) über die Einer (60^0) bis zu den Oktaven (60^{-8}).

Chamber prangert bei der Multiplikation die Sechzigerrechnung des Orontius Finaeus an, ferner bei der Division die Verfahren des Orontius und des Gemma Frisius (1508—1555), die, bis sie alle Sexagesimalstellen auf die niedrigste Spezies bringen und sie dann wieder zurückbringen, einen durch die überaus verdrießlichen Umwege geradezu umbringen¹¹⁹. In der soeben genannten Ausgabe der *Arithmetica practica* bringt Orontius aber neben diesen umständlichen Verfahren auch das rein sexagesimale.

Die sexagesimale Produktentafel bei J. Wallis wurde oben (S. 47) schon erwähnt. Mit der Einführung der Dezimalbrüche und der Logarithmen verlor die reine Sechzigerrechnung ihre praktische Bedeutung.

Der Deutsche Franz Woepcke (1826—64), der in seinem kurzen Leben so viel zur Erforschung der islamischen Mathematik beigetragen hat, ist fast der einzige, der in neuerer Zeit die reine Sechzigerrechnung in arabischen Schriften bemerkt hat¹²⁰. Er beobachtete sie in den „Feinheiten“ des Sibṭ al-Māridīnī, vielleicht auch im „Schlüssel“ K.'s. Aber er macht nur im Vorbeigehen, bei Behandlung anderer Fragen, darauf aufmerksam. Die Sechzigertafel erläutert er zur Überschrift von Kap. 3 der „Feinheiten“ durch die Worte: *C'est la table de multiplication sexagesimale*¹²¹. Die ganzen Sechzigerzahlen erwähnt er bei Erörterung

¹¹⁸ Barlaam⁹⁰ S. 81: *hodie invaluit via quaedam aliquantò expeditior, quae numerorum quasi abaco nititur quodam, qui tabula tabularum vulgò seu tabula proportionum ἐξαρωντάδων dicitur.*

¹¹⁹ Barlaam⁹⁰ S. 97: *qui dum omnes minutias ad minimam speciem ducunt, ab eadem rursus reducant, taediosissimis ambagibus te planè pessumdabunt.*

¹²⁰ Durch ihn wurde Carra de Vaux⁵⁵ auf die „Feinheiten“⁸⁷ des Sibṭ al-Māridīnī aufmerksam.

¹²¹ F. Woepcke, *Sur l'introduction*⁶⁵ S. 70.

des Gebrauchs der indischen Ziffern und der Gummalziffern: ... *le calcul sexagésimal, de même qu'il avait subdivisé le degré en minutes, secondes, tierces etc. avait conçu des ordres ascendants, supérieurs au degré, de sorte que, si on voulait, on n'était jamais obligé de dépasser, dans la notation, le nombre 59*¹²². Dazu kommt Woepckes oben (S. 83) wieder-gegebener Hinweis auf die *quantités sexagènes* bei Abul-Wafā'.

Da die Mathematikhistoriker früher der mittelalterlichen Sechzigerrechnung kein großes Interesse entgegenbrachten, fanden Woepckes Bemerkungen kaum Beachtung. Weder M. Cantor noch Tropfke sagen etwas über die islamische reine Sechzigerrechnung. So konnte es kommen, daß F. Thureau-Dangin, den eine verständliche Teilnahme trieb, sich über das Schicksal der Sechzigerrechnung im Laufe der nach-babylonischen Zeit zu unterrichten, erklärt¹²³: *Save for some rare and late exceptions, this system has, beginning with the Greeks, always been employed to express fractions only*. Was er mit den „seltenen und späten Ausnahmen“ meint, zeigt sein Hinweis auf Wallis⁷⁵ und Tropfke (I³, S. 61 ff.). O. Neugebauer gar findet bei einer kurzen Erörterung des „allmählichen Rückschritts“ der Sexagesimalrechnung seit den alt-babylonischen Texten für das Mittelalter nur die Worte: „Das Mittelalter kehrt dann zum Fingerrechnen zurück, wie es nur noch an vor-geschichtlichen Spuren in Mesopotamien und Ägypten erkennbar ist“¹²⁴.

Die Tatsache, daß reine Sechzigerrechnung schon vor dem Jahre 1000 bei islamischen Mathematikern nachweisbar ist, läßt uns bei dem tieferen Einblick, den insbesondere die Forschungen von Thureau-Dangin und von O. Neugebauer in die babylonische Sechzigerrechnung gaben, die Frage aufwerfen: Welches ist der Ursprung der islamischen reinen Sechzigerrechnung?

8. Die Frage nach dem Ursprung der islamischen Sexagesimalrechnung

Die Herkunft der uneigentlichen islamischen Sechzigerrechnung scheint mir vor allem durch die Schrift *Algoritmi de numero Indorum*⁴⁴ und den *Liber Algorismi* des Johannes von Sevilla⁴⁴ aufgeklärt zu sein. Diese Schriften lehren, wie auch der Titel der ersten anzeigt, das Rechnen mit den indischen Zahlen. Woepckes Gründe¹²⁴ dafür, daß die erste eine Übersetzung des Rechenbuches von al-Ĥwārizmī ist, erscheinen

¹²² F. Woepcke, *Mém. sur la propagation*⁶⁵ S. 465.

¹²³ F. Thureau-Dangin, *Sketch of a history of the sexagesimal system*. *Osiris* 7 (1939), S. 95—141. S. S. 95 und Fußnote 101 auf S. 138. — O. Neugebauer in *Quell. Stud. Math.* B 4 S. 356.

¹²⁴ F. Woepcke, *Sur l'introduction*⁶⁵ S. 17—19.

stichhaltig. Die noch von Nallino¹²⁵ ausgesprochene Meinung, dieses Rechenbuch al-Ḥwārizmī's sei eine erweiterte Wiederherstellung eines indischen Traktats, scheint mir aber der Unterlagen zu entbehren. Sie geht, soweit ich sehe, darauf zurück, daß nach Casiri Ibn al-Qiftī in seiner Gelehrten-geschichte von den Indern sagt: *Zu dem, was von ihren Wissenschaften zu uns gelangte, gehört das Buch der Zahlrechnung, welches ... al-Ḥwārizmī verbreitete (oder: erweiterte) (... kitāb ḥisāb al-ʿadad alladī basāḥahu ... al-Ḥwārizmī)*¹²⁶. Nach der auf 13 Handschriften gegründeten Textausgabe von Lippert⁶⁰ (S. 266, 22—267, 1) ist aber hier das Wort *kitāb* zu streichen und die Stelle daher zu übersetzen: ... *gehört die Zahlrechnung, welche ... al-Ḥw. ...*

Die dargebotene Sechzigerrechnung wird in beiden Schriften ausdrücklich auf die Inder zurückgeführt (S. 17, Z. 8 v. u. ff., S. 49, Z. 4 v. u. ff.). Ebenso wie in Kūšyār's und an-Nasawī's Traktaten und in byzantinischen Scholien zu Euklid sind die Sexagesimalzahlen vertikal in indischen Ziffern geschrieben (vgl. S. 78—79). Besonders auf S. 74 wird deutlich, daß der Verfasser wie die Griechen die Ganzen dekadisch und die Brüche sexagesimal ansetzt.

Nach Behandlung der Multiplikation zweier Sechzigerzahlen durch dekadische Multiplikation der beiden Faktoren, deren jeder vorher in seine niedrigsten Sexagesimaleinheiten verwandelt wurde, und anschließende „Erhöhung“, d. h. Verwandlung des Produkts in eine Sexagesimalzahl, sagt al-Ḥwārizmī (S. 19, Z. 1 v. u.):

et est ei alius modus brevior: sed hic ordo est, quo usi sunt indi, super quem figurare numerum suum.

Die Frage, was mit dem anderen, kürzeren Multiplikationsmodus, den al-Ḥwārizmī hiernach kennt, aber nicht mitteilt, gemeint sein mag, soll uns bald beschäftigen. Hier halten wir fest, daß er die von ihm eingehaltene Ordnung der uneigentlichen sexagesimalen Multiplikation ausdrücklich als diejenige bezeichnet, deren sich die Inder bedienten. Aṭ-Ṭūsī unterscheidet eine Sexagesimalbruchrechnung vermittle der Rechnung der Inder von einer solchen vermittle der Gummalbuchstaben (oben S. 73). Die Untersuchung muß zeigen, ob die erste Art dieselbe ist, die al-Ḥwārizmī auf die Inder zurückführt. Es wäre zu wünschen, daß aus den indischen Quellen Genaueres über die indische Sexagesimalrechnung bekannt würde.

Welches war die andere, kürzere Multiplikationsmethode, die al-Ḥwārizmī kennt, aber nicht darlegt? Man kann hierbei an die Methode der alexandrinischen Rechner denken, die Theon von Alexandrien lehrt (vgl. S. 41—42). Theon kennt zwar keine nach Potenzen von 60 entwickelte Ganze, sondern nur Sechzigerbrüche, aber im übrigen deckt sich

¹²⁵ G. A. Nallino, *Al-Ḥwārizmī e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo*. Reale Acc. d. Lincei, Serie 5^a, Mem. della Cl. di scienze mor., stor. e fil. Vol. II, Parte 1^a, Rom 1894, S. 7.

¹²⁶ F. Woepcke, *Mém. sur la propagation*⁶⁵ S. 479—480.

seine Methode nicht mit der uneigentlichen Sechzigerrechnung eines al-Hwārizmī oder an-Nasawī. Man könnte seine Sechzigerrechnung hinsichtlich der Brüche schon eine eigentliche, wenn auch nicht eine reine, nennen.

Um zwei Sexagesimalzahlen miteinander zu multiplizieren, verwandelt Theon sie nicht in Einheiten ihrer niedrigsten Stellen, sondern multipliziert, wie es die S. 41 erwähnte Ausrechnung des Quadrats von $37 \frac{1}{2}$ zeigt, jede Sexagesimalstelle des einen Faktors mit jeder Sexagesimalstelle des andern Faktors unter Beachtung der Stellenwertregel, nach der z. B. Primen (= Minuten) mal Sekunden Terzen ergeben. Die Addition der $3 \cdot 3 = 9$ Teilprodukte ergibt das gesuchte Produkt. Auch al-Karaḡi kennt dieses Verfahren (s. S. 64). Da aber Theon keine Sechzigertafel besitzt, wird jedes Teilprodukt in der dekadischen Form niedergeschrieben, z. B. das Teilprodukt von 4 Minuten mit 55 Sekunden in der Form 220 Terzen, und erst beim Addieren dieser Teilprodukte, das bei der niedrigsten Stelle beginnt, werden bei jeder Bruchstelle die Vielfachen von 60 als Einheiten zu der nächst höheren Stelle hinzugefügt. Dies geschieht nicht mehr bei den Graden, über denen Theon ja keine erhöhten Einheiten hat.

Entsprechend sehen wir bei Theons Division¹²⁷ und Quadratwurzel-ausziehung¹²⁷ zwar die Bruchstellen des Ergebnisses nacheinander sofort als die endgültigen Sexagesimalstellen auftreten, aber im Gang der Rechnung erscheinen bei den Resten, Teilprodukten und Teilquadraten dekadische Zahlen, die größer als 59 sind, und dies liegt wieder daran, daß die Sechzigertafel fehlt. So kommen in Theons Beispiel für die sexagesimale Division 920 erste Sechzigstel und 831 zweite Sechzigstel vor, und bei seiner sexagesimalen Berechnung von $\sqrt{4500}$ ist von 660 ersten Sechzigsteln, 7440 zweiten Sechzigsteln usw. die Rede. K. hätte statt dessen eine straffe, rein sexagesimale Berechnung von $\sqrt{1150 \text{ Grad}}$ darbieten können, ohne irgend eine der bei Theon fortwährend erforderlichen Verwandlung von Graden in Minuten, Minuten in Sekunden usw. zu benötigen, da bei ihm dank der Verwendung der sexagesimalen Multiplikationstafel nur Stellen mit den Zahlen 0 bis 59 aufgetreten wären.

Theon hat also zwar in beschränktem Sinne eine eigentliche Sexagesimalrechnung, aber sie ist nicht rein, da er weder mit ganzen Sechzigerzahlen, noch mit der Sechzigertafel arbeitet¹²⁸. Fr. Hultsch rechnet den Griechen ihr mangelhaftes Sechzigersystem sozusagen als Verdienst an.

¹²⁷ Ausgabe von Rome⁷¹ S. 471—472, Ausgabe von Halma⁷¹ S. 185 bis 186.

¹²⁸ Ebensowenig wie bei Theon findet sich reine Sexagesimalrechnung in dem Texte: *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum* ed. C. Henry Parisiensis. Halle 1879. Vgl. hierzu F. Hultsch, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* 24 (1879), Hist.-lit. Abt. S. 199—203.

Nun haben die Griechen, sagt dieser hervorragende Forscher¹²⁹, mit feinem Takte den sexagesimalen Aufbau der Zahlenreihe nach oben vermieden. Das Bewußtsein, daß ihre eigenen Zahlwörter das dekadische System darstellten, blieb bei ihnen lebendig, und deshalb haben sie die höchsten Zahlen, welche zu bilden sie veranlaßt wurden, nie anders als nach Myriaden gruppiert.

Weder vom Standpunkt der theoretischen noch dem der praktischen Mathematik vermag ich einen feinen Takt darin zu erkennen, ein praktisches Rechnen mit gemischten Zahlen $a + \alpha$ zu betreiben, in denen der ganzzahlige Bestandteil a dekadisch und der Bruchbestandteil α als Trümmerstück konsequenter babylonischer Sexagesimalrechnung ein Sexagesimalbruch ist. Nur weil bei den meisten praktischen Rechnungen a klein und α wenig umfangreich war, und weil sich zudem wohl ihre Erfindungskraft erschöpft hatte, konnten die hellenistischen Griechen bei dieser umständlichen Rechenweise stehen bleiben. Sonst hätten sie ein konsequentes System bilden, also entweder das rein sexagesimale babylonische Gefüge in vollkommenerer Form wiederherstellen oder zu einem vollständigen Zehnergefüge mit Positionsschreibung und Dezimalbrüchen fortschreiten müssen.

Hultsch sagt ferner⁷⁹ (S. 230) *Das Wurzelausziehen nach der sexagesimalen Methode bietet ungewöhnliche Schwierigkeiten. Wollte man z. B. $\sqrt[3]{3}$ zunächst auf 1 Ganzes bestimmen und es versuchen, aus dem Reste 2 die ersten und zweiten Sechzigstel zu ermitteln, so würde man nicht weiterkommen.* Aus diesem seinem Gesichtspunkte rühmt Hultsch den Ptolemäus, der statt dessen die Quadratwurzel aus $3 \cdot 60^2$ zweiten Sechzigsteln (Sekunden) ausziehe und als erste Stelle des Ergebnisses $\sqrt{10800} \approx 103$ erste Sechzigstel erhalte.

Hierzu wäre zunächst zu sagen, daß Ptolemäus an der betreffenden Stelle (Synt. I 35, 15ff. Heiberg) nicht aus 3 Einheiten, sondern aus $3 \cdot 60^2$ Einheiten die Quadratwurzel zu ziehen hat, da bei ihm der Halbmesser des Kreises nicht 1 sondern 60 ist. Doch in der Sache kommt das auf denselben Ausweg hinaus.

Die Schwierigkeit der sexagesimalen Quadratwurzelziehung aus 3 besteht aber nur für den, der, wie Hultsch es als selbstverständlich voraussetzt, nach Bestimmung der Einerstelle 1 die nächste Sexagesimalziffer x nach Theons Vorbild mit Hilfe von Newtons Näherungsmethode bestimmt. Das gäbe freilich auf Grund von $2x \approx 20$ den Wert $x = 10$, d. h. den unbrauchbaren, weil viel zu großen Wert $x = 60$ als erste sexagesimale Bruchstelle. Aber man kann — und so macht es K. — die präzise Forderung aufstellen: x ist möglichst groß so zu bestimmen, daß $2x + x^2 \leq 20$ werde. Mit der Sechzigertafel ist diese Forderung überaus leicht durch Probieren zu erfüllen. In einer Diagonale dieser Tafel, die zweckmäßigerweise irgendwie, etwa so wie bei Orontius (S. 88),

¹²⁹ F. Hultsch, Arithmetica. Pauly-Wissowa, Realenc. d. class. Altert. II (1896), Sp. 1066—1116. S. Sp. 1075.

kenntlich gemacht ist, stehen die Quadrate x^2 und in der zweiten Zeile die Zweifachen $2x$ der Kopffzahlen x . Man braucht also nur zu versuchen, in welcher Spalte die Summe von zweiter Zahl und der um eine Sechzigerstelle verschobenen Diagonalzah möglichst nahe an 20 kommt. Dann ist die Kopffzahl der Spalte das gesuchte x . Im vorliegenden Falle kann man in der Spalte mit der Kopffzahl 43 die Addition

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 43 = 1\ 26 \\ 43^2 = \quad 30\ 49 \\ \hline 1\ 56\ 49 \end{array}$$

vornehmen. Also ist die Zahl der Minuten $x = 43$. Bei der nächsten Stelle wird der geschickte Rechner schon ganz von selbst wegen der Kleinheit des Quadrats auf die Newtonsche Methode verfallen, befolgt an Hand der Sechzigertafel.

Im vierten Buche seines Kommentars¹³⁰ sieht sich Theon von Alexandrien vor die Aufgabe gestellt, die Division $98840 : 7412\ 10\ 44\ 51\ 40$ sexagesimal auszuführen. Hier hilft er sich damit, daß er Dividend und Divisor durch 60^2 dividiert und dadurch beide Zahlen zu reinen Sechzigern macht (*καταβιβασάμεν τὸ τῶν προκειμένων ἡμερῶν πλῆθος εἰς τὸν της ἑξηκοντάδος λόγον*). Nun lautet die Aufgabe:

$$26.54 : 2.3\ 32\ 10\ 44\ 51\ 40$$

Zur Bildung der Teilprodukte bei der Division benutzt er eine eigens zu diesem Zwecke hergestellte Tafel der Produkte des Divisors mit den Multiplikatoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60. Nur noch die vier letzten dieser Produkte sind in ihrer höchsten Stelle größer als 50. Die Multiplikatoren erinnern an diejenigen der später zu erwähnenden babylonischen Produktentabellen. Im neunten Buch¹³¹ führt Theon die Division $20520 : 21551.18$ genau ebenso aus und bezieht sich hierbei auf die eben beschriebene Rechnung im vierten Buch und eine andere im dritten.

Obwohl Theon bei diesen Rechnungen der reinen Sexagesimalrechnung schon näher kommt, treten die Mängel zu Tage: In Ermangelung der ganzen Sechzigerzahlen wird der Stellenwert künstlich herabgesetzt. Vor allem fehlt das „Kleine Einmaleins“ der Sexagesimalrechnung, die Sechzigertafel, und deshalb wird eine Produktentafel, aber in nicht überall rein sexagesimaler Form, für die Vielfachen des jeweilig vorliegenden Divisors behelfsmäßig hergestellt.

Erst durch die dem Theon fehlenden Hilfsmittel, ganze Sechzigerzahlen und Sechzigertafel, wird die Sechzigerrechnung zu einem einheitlichen und fruchtbaren Verfahren erhoben, das sich im Prinzip von dem modernen Rechnen mit dekadischen Multiplikationstafeln nur dadurch

¹³⁰ Theonis Alexandrini in Cl. Ptolemaei Magnam Compositionem libri 11, Basel 1538, S. 217.

¹³¹ Baseler Ausgabe¹³⁰ S. 377—378.

unterscheidet, daß 60 die Grundzahl ist. Dies hat freilich den Nachteil, daß das Zahlengefüge nicht mit dem Zehnergefüge der Zahlwörter in den Sprachen der Kulturvölker übereinstimmt, hat aber für die Genauigkeitsforderungen der Wissenschaft vor dem Rechnen mit dem dekadischen Einmaleins den erheblichen Vorteil, daß mit einem Sechzigerschritt mehr geschafft wird, als mit einem Zehnerschritt, und weiter den Vorteil, den die große Zahl der Teiler von 60 für viele Rechnungen mit sich bringt.

Ist die reine islamische Sechzigerrechnung aus der unvollkommenen, von Theon dargestellten hellenistischen Sechzigerrechnung hervorgegangen? Woepeke scheint es anzunehmen, und spricht das hinsichtlich der Erfindung der ganzen Sechzigerzahlen in folgenden Worten¹³² aus: *L'extension des ordres sexagésimaux dans la direction ascendante, la création des sexagènes, n'est qu'un perfectionnement postérieur dont les commencements se trouvent chez Théon.* Er verweist dabei auf das von uns mitgeteilte Divisionsbeispiel aus dem vierten Buch von Theons Kommentar.

Von Theon von Alexandrien war an-Nadīm, dem Verfasser des 988 erschienenen *Fihrist*¹³³ (I, S. 268), unter anderm die Schrift „Einleitung in den Almagest“ bekannt, und zwar, wie er hinzufügt, „in einer alten Übersetzung“. Mit Suter können wir annehmen, daß Theons Kommentar zum Almagest gemeint ist. Die Übersetzung hat sich nicht erhalten. Für die Annahme, daß sich Theons Rechnungsweise zur islamischen reinen Sechzigerrechnung weiterentwickelt habe, wurden aber bisher keine Unterlagen beigebracht. Ich kenne auch bisher keinen islamischen Rechner, der Theons Verfahren nennt oder es bei der Division und Wurzelausziehung befolgt, während der Byzantiner Maximus Planudes in seinem „Rechnen nach indischem Verfahren“ (Ἰνδικὰ ὑπολόγημα κατὰ τὸν Ἰνδόν) ausdrücklich neben der „indischen“ Methode der Quadratwurzelausziehung die des Theon nennt (Übersetzung¹³⁴ S. 54).

Da Levi ben Gerson (vgl. oben S. 65) in seiner „Praxis des Rechners“¹³⁵ Multiplikation, Division und Wurzelausziehung in einer Weise ausführt, die derjenigen Theons von Alexandrien nahe steht, so bleibt zu erforschen, ob in arabischen Schriften auch eine Überlieferung Theonischer Rechenweise vorhanden ist, und wenn ja, wie alt sie ist. Bei Levi beobachten wir die amphibischen Operationen dieses Rechnens in besonders ausgeprägter Form. Indem er trotz der Linksläufigkeit der hebräischen Schrift die Sechzigerbrüche mit von links nach rechts fallenden Potenzen schreibt — in arabischen Schriften fallen sie von rechts nach links — operiert er wie Theon mit amphibischen Zahlen in einer für den ganzzahligen und gebrochenen Teil gleichsinnig fallenden Schreibung. Diese Schreibung ist aber eine reinere Positionsschreibung als bei Theon, da Levi die Ganzen unter Verwendung von neun hebräischen Buchstaben und eines Nullzeichens im reinen indischen Stellungssystem schreibt. Z. B. schreibt er (Text S. 54, Übersetzung S. 63):

¹³² F. Woepeke, *Mém. sur la propagation*⁶⁵ S. 466.

$$\text{כסו}|\text{לסז} = 206|50\ 0\ 37$$

$$\text{für } 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6 + 50 \cdot 60^{-1} + 0 \cdot 60^{-2} + 37 \cdot 60^{-3}.$$

Bemerkenswert ist hier auch der senkrechte Strich, der den dekadischen ganzzahligen Teil vom sexagesimalen Bruchteil scheidet. Der Rechner geht, wenn er addiert oder subtrahiert, beim Überschreiten des Striches von der sexagesimalen zur dekadischen und wenn er Wurzel auszieht, beim Überschreiten des Striches von der dekadischen zur sexagesimalen Rechnung über.

Fertig, wie aus dem Haupt des Zeus entsprungen, steht in der Zeit um 1000 die reine Sechzigerrechnung vor uns. Zwischenstufen, die von Theons Rechenweise zu der des Kūšyār b. Labbān führen könnten, sind bisher nicht bekannt. Nun dürfen wir die Erfindungsgabe der islamischen Perser nicht zu gering einschätzen. Sie versuchten in mannigfacher Weise über die Griechen hinauszugelangen. So durchbrach al-Karaǧī, ein Zeitgenosse des Kūšyār, bewußt die engen Schranken der griechischen Lehre von den irrationalen Größen. Er verwarf die geometrische Form dieser Lehre zugunsten einer rein arithmetischen und nahm Wurzeln mit beliebigem positivem ganzzahligem Wurzelexponenten unter die Irrationalzahlen auf. Islamische Astronomen schufen eine Berechnungskunst des sphärischen Dreiecks, indem sie Formeln zwischen den Sinus- und Tangensfunktionen der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks aufstellten. Wäre es so unerhört, daß sie, wie die Beobachtungsgeräte, so auch das rechnerische Gerät der Astronomie, die von Indern und Griechen übernommene Sechzigerrechnung verbesserten? Hierbei hätte das Vorbild der indischen Positionsrechnung mit ganzen Zehnerzahlen als Anregung dienen können, auch die sexagesimalen Rechnungen zu solchen in einem reinen sexagesimalen Positionssystem auszugestalten, wie denn schon bei Kūšyār, und noch bei K. die sexagesimalen Ausführungsweisen und Beispiele den dekadischen entsprechen.

Aber wer könnte der islamische Erfinder der reinen Sechzigerrechnung gewesen sein? Im neunten Jahrhundert war man noch so mit Aufnahme und Verarbeitung der zuströmenden indischen und griechischen Wissenschaft beschäftigt, daß die Erfindungsgabe sich noch nicht voll entfaltete. Über Erfindungen des zehnten Jahrhunderts, wie z. B. über die des sphärischen Sinussatzes haben sich im Schrifttum jener Zeit Diskussionen und eine Streitschrift gefunden. Über die Einführung der reinen Sechzigerrechnung sind bisher keine Erörterungen bekannt. Wenn wir uns fragen, wem wir eine solche Erfindung im zehnten Jahrhundert vor allen anderen zutrauen könnten, müßten wir Abul-Wafā' nennen. Er war es in erster Linie, der die neue Trigonometrie schuf, und daß er hierbei den Halbmesser nicht mehr wie seine Vorgänger nach griechischem Muster gleich 60, sondern gleich 1 setzte, ist eine Neuerung, die eng mit einer Verbesserung und Vertiefung einer überkommenen Sechzigerrechnung nach Theons Muster oder dem der Inder zusammenhängen könnte. Seine trigonometrischen Tafeln, weit genauer als die seiner Vor-

gänger, erforderten zur Berechnung ein flüssiges Rechenverfahren. Nur die gründliche Erforschung seiner uns erhaltenen Werke wie derjenigen seiner Zeitgenossen und Nachfolger vermag bei diesen Fragen weiterzuhelfen. Vielleicht wirft der Lehrbrief des Abū Naṣr (oben S. 86) ein Schlaglicht auf die Lage, so wie dessen Lehrbrief über die Erfindung des sphärischen Sinussatzes die Entstehung der neuen Trigonometrie beleuchtet.

Gegen die Annahme eines Einzelerfinders in jener Zeit scheint mir vor allem eins zu sprechen. Die ganze von Kūšyār dargebotene Technik der reinen Sechzigerrechnung mit Sechzigertafel und zugehörigen Hilfstafeln für den Stellenwert macht den Eindruck von etwas so Fertigem und Erprobtem, an dem nichts mehr zu verbessern ist — noch K. benutzte 400 Jahre später diese Hilfsmittel in derselben Form —, daß man eine vorhergehende längere Entwicklung vermuten möchte. Hierzu kommt, daß Abul-Wafā' in der ersten Station seines Rechenbuches eine Tabellensammlung darbietet, die inhaltlich dem alten Gut ägyptischer und babylonischer Rechenkunst nahe steht. Sie enthält, wie wir (S. 84—85) sahen, unter anderem Tafeln für die Verwandlung gewisser Stammbrüche und Stammbruchsummen in Brüche mit dem Nenner 60, ferner eine Art sexagesimaler Reziprozentafel, die ausdrücklich zu demselben Zweck bestimmt ist, dem die babylonische Reziprozentafeln dienten, nämlich dazu, Divisionen durch Multiplikationen zu ersetzen. Sollte das alles ohne Zusammenhang mit jener altbabylonischen Rechenkunst neu erfunden sein?

Es genügt nicht, mit Woepeke den Weg zur islamischen reinen Sechzigerrechnung nur von Theons Rechnungen her zu suchen. Was mag der Hellenismus sonst noch besessen haben, das uns nicht erhalten blieb? Was gelangte davon zu den islamischen Persern? Bei den Kenntnissen, die unsere Zeit von der babylonischen Mathematik und Astronomie und ihren Auswirkungen gewonnen hat¹³³, wird man sich wie bei der Algebra, so auch bei der Sechzigerrechnung fragen, ob nicht Fäden von der Wissenschaft des alten Zweistromlandes zur islamischen Mathematik laufen, die nicht den Umweg über Alexandrien oder Indien nahmen.

Die Sechzigerrechnung der babylonischen Mathematik und Astronomie war im wesentlichen schon eine reine in dem von uns festgelegten Sinne. Die Sechzigerzahlen waren im Positionssystem, wenn auch, besonders in der vorseleukidischen Zeit in unvollkommener Weise, und alle „Sexagesimalziffern“ waren kleiner als 60. Daß es ein relatives, kein absolutes Positionssystem war, d. h. daß bei den geschriebenen

¹³³ S. hierzu besonders O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934; O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte* = *Quell. Stud. Math. A 3*, I, II, III (1935—37); F. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens*, Leiden 1938; ferner die Arbeiten von O. Neugebauer in den *Quell. Stud. Math.* und von F. Thureau-Dangin in der *Revue d'Assyriologie*.

7 Luckey, *Rechenkunst*.

Zahlen der Stellenwert nicht gekennzeichnet war, bedeutet keine andere Rechentechnik. Auch der logarithmische Rechenstab und die Logarithmentafel überlassen es dem Rechner, den Stellenwert wahrzunehmen, der in vielen Fällen überhaupt keiner schriftlichen Festlegung bedarf. In gewissem Grade war das nicht anders bei der islamischen Sechzigerrechnung. Wir sahen, daß Küšyār zwar in der Beschreibung der Rechnungen durch Worte, nicht aber in der Säulenschreibung der Sechzigerzahlen durch Ziffern, den Stellenwert kennzeichnet. K.'s Angabe des Stellenwertes über den Spalten von Rechnungen mag zum Teil mehr der lehrhaften Darstellung als der Praxis angehören, und erst bei Sibṭ al-Māridinī sahen wir eine Kennzeichnung der Einerstelle durch ein Zeichen verlangt.

Die babylonische Sechzigerrechnung besaß ferner das, was der „Sechzigertafel“ der islamischen Rechner entspricht. Dies war allerdings noch keine zweidimensionale Tafel („Tafel mit zwei Eingängen“), wie die islamische, sondern es waren eindimensionale Einzeltabellen, die den Spalten der Sechzigertafel entsprechen. Wir sahen auch bei islamischen Rechnern jede solche Spalte noch als selbständiges Gebilde betrachtet und bezeichnet; die Spalte mit den Vielfachen von 17 hieß „Tafel der 17“. Den „Längenzahlen“ y , die bei der islamischen Tafel von 1 bis 60 laufen, entsprechen bei der Mehrzahl der babylonischen Multiplikationstabellen die in der linken Spalte stehenden Multiplikatoren $y = 1, 2, \dots, 18, 19, 20, 30, 40, 50$. Sie sind für die Multiplikation mehr als ausreichend, wenn man z. B. $23 \cdot x$ in der Form $20 \cdot x + 3 \cdot x$ oder in der Form $10 \cdot x + 13 \cdot x$ zusammensetzt. Den islamischen „Breitenzahlen“ x entsprechen die „Kopfzahlen“ (Neugebauer) der babylonischen Einzeltabellen. Da Tabellen mit den Kopfzahlen $x = 1, 2, \dots, 9, 10, 20, 30, 40, 50$ vorkommen, so kann z. B. der Multiplikand $x = 38$ in der Form $30 + 8$ zusammengesetzt werden. Allerdings erfordert dann z. B. die Bildung des Produkts $23 \cdot 38$ die Ablesung und Addition von vier Teilprodukten, z. B.

$$\begin{aligned} 23 \cdot 38 &= (20 + 3) \cdot (30 + 8) = 20 \cdot 30 + 20 \cdot 8 + 3 \cdot 30 + 3 \cdot 8 = \\ &= 100 + 240 + 90 + 24 = 1434. \end{aligned}$$

Die Division erscheint nach den bisherigen Unterlagen in der babylonischen Mathematik auf einer noch unvollkommenen Stufe. Nicht nachgewiesen scheint nämlich bisher ein Divisionsverfahren zu sein, das in sukzessiver Annäherung die Stellen des Quotienten, von der höchsten beginnend, eine nach der anderen bestimmt, so wie wir es heute ausüben und wie es uns bei Theon von Alexandrien in sexagesimaler, bei den Indern auch in dekadischer Ausführung begegnet. Ebenso sind mir keine babylonischen Wurzelausziehungen mit sukzessiver Stellenbestimmung bekannt, die ja jenen Divisionsverfahren in der Ausführung entsprechen. Die babylonische Mathematik vollzog die Division $y : x$ als Multiplikation von y mit der Reziproken $\bar{x}$ von x , wobei aber, soweit bisher bekannt, nur „reguläre Zahlen“ (Neugebauer) als Divisoren vorkamen, d. h. solche, die keine anderen Primfaktoren als 2, 3 und 5 enthalten, so daß die Reziproke

eine endliche Sechzigerbruchentwicklung hat. Daher begegnen uns außer den eben genannten Zahlen 1, 2, ..., 9, 10, 20, 30, 40, 50 als Kopffzahlen der babylonischen Multiplikationstabellen die wichtigsten sonstigen Reziproken, wie 48, 45, 44 26 40 usw. bis 1 30, 1 20, 1 15. Es stellt also z. B. die Tabelle mit der Kopffzahl 6 40 die Vielfachen von $\frac{1}{6}$ dar. Nach Neugebauer ist diese Darstellung der Vielfachen von Stammbrüchen sogar der ursprüngliche Zweck aller Multiplikationstabellen mit Ausnahme der Tabelle der Vielfachen von 7, die hinzugenommen wurde, um auch alle Multiplikationsaufgaben lösbar zu machen¹³⁴.

Die einzelnen Multiplikationstabellen erscheinen des öfteren in „Serien“ nach fallenden Kopffzahlen geordnet. Um den Anschluß zu sichern, ist in diesem Falle am Fuße einer Tabelle die erste Zeile der nächsten, und damit deren Kopffzahl angegeben, wie wir in Handschriften und älteren Büchern am Fuße einer Seite das erste Wort der nächsten Seite gesondert hingesetzt finden. Damit erscheinen die eindimensionalen Tafeln zu einer sozusagen in derselben Dimension verlaufenden eindimensionalen Folge wie zu einem langen Band aneinandergereiht.

Nun gibt es aber neben diesen „Einzeltabellen“ auch „kombinierte Tabellen“, d. h. Vereinigungen solcher Einzeltabellen auf derselben Tontafel, und es erhebt sich die Frage, ob eine solche kombinierte Tabelle nicht nur, wie die islamische Sechzigertafel als „Tafel der Tafeln“, eine handliche Vereinigung der einzelnen Multiplikationstabellen darstellt, sondern auch als eine echte zweidimensionale Tafel („Tafel mit zwei Eingängen“) aufgefaßt werden kann, was für die islamische Sechzigertafel zutrifft. Daß dies für die babylonischen kombinierten Tabellen, die bisher bekannt sind, zu verneinen ist, ersieht man aus der Art, wie bei ihnen die einzelnen Tabellen wirklich oder wahrscheinlich auf die Vorder- und Rückseite der Tontafel verteilt sind¹³⁵. Jenes gedachte lange Band aneinandergereihter Einzeltabellen erscheint hier meist in Stücke quer zerschnitten, deren Längen gleich der Höhe des Schriftspiegels der Tontafeln ist, und diese Stücke sind nebeneinander gestellt, ohne daß eine Tafel mit zwei Eingängen entstanden ist. Denn abgesehen davon, daß vielfach noch andere Tabellen, wie die längere Tabelle der Reziproken und eine solche der Quadrate aufgenommen ist, zerlegen die Schnitte durch das gedachte Band öfters die einzelnen Tabellen in solche Stücke, daß in den nebeneinander entstehenden Spalten entsprechende Vielfache

¹³⁴ Von den noch wenig aufgeklärten 8 außerhalb des Sechsecks in Neugebauers Gitter (Vorgriech. Math.¹³³ S. 29) fallenden Kopffzahlen ist

$(3, 0, 3) = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^3 = 1000$, $(2, 0, 3) = \frac{1}{2} \cdot 1000$,
 $(1, 1, 3) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot 1000$, $(4, 3, 0) = \text{Reziproke von } \frac{1}{2} \cdot 1000$,
 $(8, 0, 4) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$, $(1, 3, 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \text{Reziproke von } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$,
 $(1, 3, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \text{Reziproke von } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, $(0, 3, 1) = \text{Reziproke von } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.
 Mir ist nicht bekannt, ob in der babylonischen Sprache und Mathematik „angehängte Brüche“ (vgl. oben S. 32—35) nachgewiesen sind.

¹³⁵ Vgl. O. Neugebauer, Math. Keilschrifttexte¹³³ II, Tafeln 61—69.

der verschiedenen Kopfzahlen nicht auf gleicher Höhe stehen. Und selbst da, wo dies mehr oder weniger der Fall zu sein scheint, wie bei der kombinierten Tabelle *Ist. A 20 + VAT 9734* (Neugebauer¹³⁵ Tafel 65), ist die Vereinigung nicht als Tafel mit zwei Eingängen gedacht, da die Argumente, islamisch gesprochen die „Längenzahlen“ $y = 1, 2, \dots, 10, 20, 30, 40, 50$ nicht am linken oder rechten Rande der Gesamttafel ein für allemal stehen, sondern in jeder Einzeltabelle wiederholt sind. Auch kommen bei dieser Tafel, weil immer drei aufeinander folgende einzelne Tabellen untereinander stehen, nie zwei aufeinander folgende Tabellen nebeneinander zu stehen. Deshalb folgen die „Breitenzahlen“ x beim Durchlaufen des oberen Randes der Gesamttafel und der beiden folgenden Streifen in Sprüngen aufeinander.

Mögen derartig kombinierte Tabellen für die Multiplikation noch in erträglicher Weise verwendbar erscheinen, so würden sich die Unbequemlichkeiten häufen, wenn man mit ihrer Hilfe die erwähnte, bei den Babyloniern nicht nachgewiesene Division (oder gar Wurzelausziehung) mit sukzessiver Stellenbestimmung vornehmen wollte. Die Behinderung würde einmal daher kommen, daß nicht alle „Längen-“ und „Breitenzahlen“ von 1 bis 60 vertreten sind. Denn etwa nur mit den Längen- und Breitenzahlen 1, 2, ..., 9, 10, 20, 30, 40, 50 zu arbeiten, indem man vom Quotienten sukzessive immer nur eine Dezimalstelle jeder Sexagesimalstelle bestimmt und jedesmal das Teilprodukt abzieht, wäre mühsam¹³⁶. Ferner aber ist gerade für die Division mit sukzessiver Stellenbestimmung sehr erwünscht, daß aufeinander folgende Teiltabellen in gleicher Höhe nebeneinander stehen, wie man aus dem Vorgehen K.'s (s. S. 49–50) ersieht.

Wenn man also eine geschichtliche Entwicklung der babylonischen Produktentafeln zu der islamischen Sechzigertafel in Erwägung zieht, so wird man damit die Frage nach dem Übergang zum Divisionsverfahren der sukzessiven Stellenbestimmung in Verbindung bringen. Reichte für die in den astronomischen Rechnungen der Seleukidenzeit erforderlichen Divisionen die Division durch Multiplikation mit den als Kopfzahlen von Tabellen auftretenden Reziproken noch aus? Konnten sich die kombinierten Tabellen leicht zu echten zweidimensionalen Produktentafeln entwickeln? Man mag denken, daß von einer kombinierten Tabelle wie der Tafel *Ist. A 20 + VAT 9734*, auf der die Teiltabellen schon gleich hoch sind und gruppenweise in gleicher Höhe stehen, die Entwicklung ganz von selbst zur echten Tabelle mit zwei Eingängen führen mußte. Das bisher bekannte Material scheint aber dafür zu sprechen, daß der geistige Sprung aus der Enge der eindimensionalen Tabellen in die Weite der zweidimensionalen nicht so leicht zu machen war.

¹³⁶ Man kann das an der von O. Neugebauer, *Math. Keilschrifttexte*¹³³ I, S. 84 beigebrachten Multiplikationstafel erproben, die auch die oben (S. 47) erwähnte Eigenschaft aufweist, daß $x \cdot y$ nur für $x \geq y$ ablesbar ist.

Die große Mondrechnungstafel¹²⁷ *SH 272 = BM 34580* ist eine echte Tafel mit zwei Eingängen. Aber die 17 Kolonnen dieses Erzeugnisses der Seleukidenzeit stellen die verschiedenartigsten Größen dar, so daß wir also nicht die zweidimensionale Vertafelung eines geschlossenen Funktionsausdrucks vor uns haben, wie die islamische Sechzigertafel die Darstellung einer Funktion zweier Veränderlichen $z = x \cdot y$ ist, und auch nicht die Darstellung des Ergebnisses der Auflösung eines Systems von Gleichungen, wie im *Almagest* die „Tafel der Aufgänge“ (Buch II Kap. 8) die schiefe Aufsteigung als Funktion der Länge und der Dauer des längsten Tages darstellt.

Man wird F. Thureau-Dangin¹²⁸ (S. 140) darin zustimmen, daß die Griechen nicht die ganze Tragweite der von den Babyloniern übernommenen Sexagesimalrechnung ermessen und diese verstümmelt haben. Ob und wie ein vermuteter abgekürzter Weg von der babylonischen zur islamischen Sechzigerrechnung verlaufen sein könnte, ist wie bei der Algebra problematisch. In keinem Falle ist ein solcher Übergang ohne Einwirkung des Hellenismus denkbar. Die Šābier von Harrān, deren Muttersprache syrisch war, haben sich bekanntlich bis in die islamische Zeit eine Astralreligion erhalten, die mit chaldäischem Stern glauben zusammenhängt. Da liegt die Frage nahe, ob sie etwa auch babylonische Wissenschaft unmittelbar überliefert haben. Aber von den größten der aus ihnen hervorgegangenen Astronomen und Mathematiker, Tābit b. Qurra und al-Battānī, ist bisher nichts bekannt, was unmittelbar auf babylonische Wissenschaft wiese. Tābit, der sich in seinen Werken neben der arabischen auch der syrischen Sprache bediente, war im Gegenteil in der griechischen Wissenschaft hervorragend bewandert. Abgesehen von den Indern kommen die Perser als Überlieferer und Weiterbildner babylonischer Wissenschaft in Frage. Die vorislamische Wissenschaft dieses mathematisch und philosophisch begabten Volkes liegt noch sehr im Dunkeln. Was mag neben der Medizin auf der von dem Sassaniden Chosrau I im 6. Jahrhundert gegründeten Hochschule von Gundai-Sābūr¹²⁹ gelehrt worden sein? Die Unterrichtssprache an dieser Akademie, die bis in die Zeit der Abbasiden blühte, war das Aramäische. In Gundai-Sābūr, das Sitz eines nestorianischen Bischofs war, wurde natürlich hellenistische Wissenschaft gepflegt. Aber ist es nicht möglich, daß in dieser im dritten Jahrhundert vom Perserkönig Šāpūr I (241—272) nach orientalischen Schriftstellern gegründeten Stadt in der Nähe des Zweistromlandes auch babylonisch-assyrische Wissenschaft in irgend einer Weise weiterlebte?

¹²⁷ Vgl. J. Schaumberger in F. X. Kugler, *Sternkunde und Sterndienst in Babel III* (1935), S. 375—394 und Tafeln XV—XVII.

¹²⁸ Nachrichten über die Hochschule von Gundai-Sābūr gibt die allerdings veraltete Arbeit: J. H. Schulz, *De Gandisapora Persarum quondam academia medica observatio historica. Commentarii Acad. Scient. Imper. Petropol. Tomus 13 ad annum 1741—43. Petropoli 1751.* (Bei Brockelmann I¹, S. 202 und I², S. 220 unrichtig angegeben.)

Wer in al-Ḥwārizmī auf Grund seiner Algebra einen Vertreter nicht-griechischer mathematischer Überlieferung sieht, wird geneigt sein, auch seine (S. 41 wiedergegebene) Bemerkung, es gebe noch ein anderes sexagesimales Multiplikationsverfahren, dahin zu deuten, daß nicht Theons Verfahren, sondern eine reine Sechzigerrechnung unter Verwendung einer Produktentafel gemeint sei.

9. Die Dezimalbrüche

Als K. bei der Erläuterung der Sechzigerzahlen (III, 1, vgl. S. 42) dargelegt, daß von den Graden die unbegrenzte absteigende Kette: Minuten, Sekunden usw. und die unbegrenzte aufsteigende Kette: einmal Erhöhtes, zweimal Erhöhtes usw. ausgeht, zieht er zum Vergleich die dekadischen Zahlen heran:

Denn wie bei der Rechnung mit den indischen Ziffern bei je 10 nach links erhöht wird, so wird hier bei je 60 nach rechts erhöht, und wie dort die erste Stelle der Ganzen „Einer“ heißt, so heißt sie hier „Grade“ nach dem Ortsnamen (? , ism al-makān), und wie dort die Kette der Stellen eine einzige ist, so sind hier zwei Ketten, die eine auf der Seite des Aufsteigens und die andere auf der Seite des Absteigens, wobei die Grade mitten zwischen beiden Ketten sind.^{ca)}

Hieraus geht hervor, daß K., während er von seinen Vorgängern die Sechzigerbrüche und die ganzen Sechzigerzahlen übernommen hat, auf dem dekadischen Gebiet nur die Kette „auf der Seite des Aufsteigens“, d. h. nur die ganzen dekadischen Zahlen vorfand. An der angeführten Stelle fährt er fort:

Und wir machten aus ihr (der einen Kette) dort (d. h. bei den indischen Zahlen) ebenfalls zwei Ketten.^{da)}

Im Anfang der Behandlung der Bruchrechnung lesen wir:

Die Astronomen nahmen „durch und verbundene“ Brüche (vgl. oben S. 27) in der Weise in Benutzung, daß ihre aufeinander folgenden Nenner 60 und die aufeinander folgenden Potenzen dieser Zahl sind, soweit sie wollten, wobei sie das, was darauf folgte (d. h. die höheren, von ihnen nicht mehr gewünschten Stellen) wegließen. Sie nennen sie der Reihe nach Minuten, Sekunden, Terzen, Quarten und dementsprechend weiter. Wir aber führten nach dem Muster der Astronomen Brüche ein, deren aufeinander folgende Nenner 10 und die aufeinander folgenden Potenzen dieser Zahl sind, soweit wir wollen, und wir nennen sie der Reihe nach Zehntel, Dezimalsekunden, Dezimalterzen usw.^{ea)}

Hieran schließt K. die Kennzeichnung der im Geschäftsleben gebräuchlichen Brüche *dānag*, *ṣassūg* und *šaʿir*, mit denen er, wie wir (S. 35 bis 37) sahen, ebenfalls im Positionssystem Rechnungen ausführt.

Die Wörter, die ich hier mit „Dezimalsekunden“, „Dezimalterzen“ usw. übersetze, bedeuten wörtlich: *zweites der Zehntel* (*tānī al-a'šār*), *drittes der Zehntel* (*tālīt al-a'šār*) usw. Übersetzt man freier: „zweites Zehntel“, „drittes Zehntel“ usw., so hat man das genaue sprachliche Gegenstück zu *zweites Sechzigstel* (*δεύτερον ἑξηκοστόν*), *drittes Sechzigstel* (*τρίτον ἑξηκοστόν*) usw. der griechischen Sexagesimalbruchbezeichnung bei Geminus und Theon von Alexandrien. 7 Sekunden heißt arabisch 7 *Zweite*, 0.07 heißt aber bei K. 7 *Zweites der Zehntel* (*Zweites Einzahl!*).

Während also K. die ganzen wie die gebrochenen Sechzigerzahlen von Vorgängern übernahm, schreibt er sich wiederholt ausdrücklich die Einführung der Dezimalbrüche zu. Meines Wissens fand man bisher zwar in keinem älteren arabischen Texte, wohl aber in Schriften, die arabisches Gut wiedergeben oder auf solchem fußen, den Gedanken ausgesprochen, daß an die Stelle der Grundzahl 60 der Sexagesimalbrüche eine andere Grundzahl treten könne, als welche im „*Algorismus de minutis*“ von Seitenstetten aus dem 14. Jahrhundert neben 12 auch 10 genannt sein soll¹³⁹. Auf das, was Immanuel Bonfils aus Tarascon über Dezimalbrüche sagt, soll später eingegangen werden. Der Gedanke der Dezimalbrüche mag also im Mittelalter in der Luft gelegen haben. Wie andere vor und nach ihm, so kann auch K. sehr wohl selbständig den Einfall gehabt haben, nach dem Vorbild der Sechzigerbrüche Dezimalbrüche einzuführen. Jedenfalls aber hat man bisher in keiner vor seine Zeit fallenden Schrift eine ausführliche praktische Durchführung der Methode der Dezimalbrüche im Positionssystem, wie er eine solche bringt, nachgewiesen.

Für die Originalität dieser Leistung K.'s scheint mir auch die Beobachtung zu sprechen, daß er den Dezimalbrüchen weder im Anschluß an das dekadische Rechnen mit ganzen Zahlen noch in der Bruchrechnung oder im Anschluß an das Rechnen im Sechzigergefüge einen geschlossenen Abschnitt widmet. Die Dezimalbrüche tauchen vielmehr an mehreren Stellen des „*Schlüssel*“ in passenden Zusammenhängen auf. Am ausführlichsten ist dies der Fall im sechsten Kapitel des von den ganzen und gebrochenen Sechzigerzahlen handelnden dritten Buches. Dieses Kapitel beginnt folgendermaßen:

Über die Verwandlung der Sexagesimalzahlen in die indischen und umgekehrt, der Ganzen und der Brüche, und die Verwandlung ihrer Brüche in (solche mit) einem anderen Nenner und die Kenntnis der Brüche, die wir nach dem Muster der Sexagesimalbrüche setzen.

Folgendes sei vorausgeschickt: Nachdem wir in unserem Lehrbrief, der „Über den Kreisumfang“ (al-muḥīṭiya) betitelt ist, das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser bestimmt und die Brüche (d. h. die Sexagesimalstellen) bis zur None (d. h. bis zu $\alpha_{-9} \cdot 60^{-9}$) erreicht hatten, wollten wir diese in die indischen Ziffern verwandeln, damit auch der Rechner, der das Rechnen der Astronomen (d. i. die Sexagesimalrechnung) nicht kennt, mit

¹³⁹ Vgl. Tropfke I³ S. 172—173, der sich auf Cantor¹⁰³ II², S. 127 beruft.

der Sache zurechtkomme. Wir setzten den den Umfang darstellenden Bruch (d. h. die Zahl 2π) mit einem Nenner an, der zehn Tausend-fünfmalwiederholt (d. h. $10 \cdot 1000^5 = 10^{16}$) beträgt. Das ist eine nackte Zahl (so nennt er Zahlen von der Form 10^n), und zwar ist es so, als ob wir die ganze Zahl 1 in 10 Teile teilen und jedes Zehntel in 10 Teile, dann jeden dieser Teile in 10 Teile und so fort. Dann nannten wir die ersten Teile „Zehntel“, weil sie solche sind, die zweiten „Dezimalsekunden“, die dritten „Dezimalterzen“ und so fort, damit die Stellen der Brüche und der Ganzen in ein und demselben Verhältnis ständen, nach dem Muster des Rechnens der Astronomen, und wir nannten sie „Dezimalbrüche“ (al-kusūr al-a‘šāriya). Man muß die Zehntel rechts von den Einern schreiben, die Dezimalsekunden rechts von den Zehnteln, die Dezimalterzen rechts von den Dezimalsekunden, und so, soweit es kommt, so daß die Ganzen und die Brüche in einer Reihe sind. Die Rechnung damit beim Multiplizieren, Dividieren, Wurzelausziehen und bei anderen (Operationen) geschieht nach dem Muster des Rechnens der Astronomen, wie wir einiges hiervon im Vorhergehenden behandelt haben. Ebenso geschieht die Bestimmung der Art der Stellen (d. h. des Stellenwertes) nach dem Muster der Bestimmung der Stellen ihres Rechnens (d. h. der Sexagesimalrechnung der Astronomen), d. h. die (Kenn)zahl der Stelle der Einer ist 0, die der Zehner und der Zehntel ist 1, die der Hunderter und der Dezimalsekunden ist 2, die der Tausender und der Dezimalterzen ist 3, die der Zehntausender und der Dezimalquarten 4, und so weiter. Es ist also, falls die Stellen zweier einzelner⁸⁰ Faktoren auf derselben Seite der Einer liegen, die Summe der (Kenn)zahlen dieser Stellen, oder, falls sie auf verschiedenen Seiten liegen, der Überschuß (der absolute Wert der Differenz) zwischen beiden (Kennzahlen) gleich der (Kenn)zahl der Stelle des Produkts (, und zwar liegt dieses) auf der Seite der Summe oder auf der Seite der überschießenden (Kennzahl). Und es ist, falls die Stellen eines Dividenden und Divisors, die einzelne Zahlen sind⁸⁰, auf derselben Seite der Einer liegen, der Überschuß der (Kenn)zahlen von Dividend und Divisor, oder, falls auf verschiedenen Seiten, ihre Summe gleich der (Kenn)zahl der Stelle des Quotienten (, und zwar liegt dieser) auf der Kette des Aufsteigens, wenn die Stelle des Dividenden über der Stelle des Divisors liegt, und andernfalls auf der Kette des Absteigens.¹¹⁾

Nicht ausgesprochen ist hier die Regel für die Bestimmung des Stellenwertes des Ergebnisses für den Fall, daß die Kennzahlen der beiden Faktoren oder von Dividend und Divisor absolut gleich sind.

In diesen Ausführungen ist die Positionsschreibung der Dezimalbrüche, der Begriff der Kennzahl der Stelle und die Rolle, die die Kennzahl beim Multiplizieren und Dividieren spielt, für das Rechnen im Zehnergefüge ebenso durchgeführt, wie wir das früher für die Sechzigerrechnung vollzogen sahen. Wie wir (S. 70—71) ausführten, gaben al-Ḥaṣṣār und Ibn al-Bannā’ den Einern den ass 1, den Zehnern den ass 2 usw., d. h. sie numerierten die Stellen von den Einern aufwärts mit den natürlichen Zahlen 1, 2, . . . Vermindert man jede dieser Nummern um 1, so erhält man K.’s Kennzahlen der Stellen der ganzen Zahlen. Selbst

al-Qalaṣādī, der 1486 starb, also bedeutend später als K. lebte, gebraucht, wie wir ebenfalls schon bemerkten, das Wort *ass* für die Ordnungszahlen der dekadischen Stellen ebenso wie al-Ḥaṣṣār und Ibn al-Bannā', obwohl er doch für die echten Exponenten von $x^1, x^2, x^3, \dots$ denselben Ausdruck *ass* verwendet.

Höher als die Ausführungen dieser Rechenmeister steht das, was Sibṭ al-Māridinī um 1500 schrieb. Bei der Behandlung der Sexagesimalstellen führt er die Parallele zwischen Sexagesimalstellen und dekadischen Zahlen für die aufsteigenden Ordnungen der Ganzen und die absteigenden der Brüche durch und dürfte sich damit als von K. abhängig erweisen.

Er sagt¹⁴⁰:

Denn jede Stelle der Erniedrigten hat eine entsprechende unter den Erhöhten, wobei die Grade als das Mittlere zwischen ihnen liegen. Die Stelle der Grade ist also wie die Einer, das einmal Erhöhte wie die Zehner, das zweimal Erhöhte wie die Hunderter und so beliebig weiter. Die Minuten sind wie die Zehntel, die Sekunden wie die Zehntel der Zehntel und so weiter. Es ist aber bei der Zahlenrechnung (d. h. der Rechnung im Zehnersystem) das Verhältnis eines beliebigen Knotens einer beliebigen Stelle zu dem ihm entsprechenden (Knoten) der folgenden Stelle (d. h. z. B. 700 : 7000) ein Zehntel, hier aber (d. h. im Sechzigersystem) das Sechstel eines Zehntels (d. h. $\frac{1}{60}$), weil die Grenze der Knoten jeder Stelle dort neun und hier neunundfünfzig ist.¹⁴¹

Vermutlich würde Sibṭ al-Māridinī auch seinen Begriff der Kennziffer (*ass*) auf den Bereich der dekadischen Zahlen übertragen. Wir sahen (oben S. 70—71), daß dieser Begriff bei ihm hinsichtlich der Kennziffer Null noch unvollkommen ist.

Zurück zu K.! Wir bringen jetzt einzelnes aus dem „Lehrbrief über den Kreisumfang“ und dem „Schlüssel“, um näher zu beleuchten, wie K. zur Einführung der Dezimalbrüche kam; wie er mit ihnen rechnete und insbesondere, wie er in den Rechnungen den Stellenwert der Ziffern kenntlich machte.

Nach seiner oben (S. 103—104) wiedergegebenen Äußerung ging K. von den Sexagesimalbrüchen zu den Dezimalbrüchen über, um auch dem der Sexagesimalbruchrechnung Unkundigen das Ergebnis seiner Kreisberechnung zugänglich und nutzbar zu machen. In der Tat finden wir in dem vor dem „Schlüssel“ abgefaßten „Lehrbrief über den Kreisumfang“ K.'s anscheinend erste Fassung und Verwirklichung des Gedankens der Dezimalbrüche.

In dieser Schrift ermittelt er im sechsten Abschnitt durch lange, richtige sexagesimale Rechnungen, daß der Umfang eines Kreises vom Halbmesser 60 sich mit einem Fehler von weniger als $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle durch die Sechzigerzahl 6 16.59 28 1 34 51 46 14 50 ausdrückt, die er in folgender Form schreibt:

¹⁴⁰ Vgl. die französische Übersetzung dieser Stelle: F. Woepcke, Sur l'introduction⁴⁵ S. 69.

Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

Er gibt dann die Form an, die diese Zahl für den Radius 1 annimmt, also die Form, die wir heute *6.16 59 28 1 34 51 46 14 50* schreiben und als Näherungswert von 2π bezeichnen. Nur mit Rücksicht auf das Übliche und in den Tafelwerken Gebräuchliche behalte er den Halbmesser 60 bei. Um dem Sexagesimalrechner die Berechnung des Umfangs zu beliebig gegebenem Halbmesser und des Halbmessers zu beliebig gegebenem Umfang zu erleichtern, bringt er die Tafel der Produkte seines obigen, auf den Halbmesser 1 bezogenen Näherungswert von 2π mit den Multiplikatoren 1 bis 60.

Den Übergang zu den Dezimalstellen vollzieht der achte Abschnitt, der folgendermaßen beginnt:

Über die Veruandlung des Betrages des Umfangs in die indischen Ziffern unter der Annahme, daß die Hälfte des Durchmessers 1 ist.

Nachdem der Umfang (gleich) sechs mal der Hälfte des Durchmessers plus einem Bruche (gefunden worden) ist, den wir bis zur None (d. h. bis zu dem Glied mit 60^{-9}) erreichten, nehmen wir diesen Bruch (als Bruch) mit einem Nenner an, der zehn Tausend-fünfmal-wiederholt (d. h. $10 \cdot 1000^5 = 10^{10}$) beträgt, weil ein Teil von ihm zu einer einzigen None nicht eine halbe Dezime hinzufügt¹⁴¹. Zur Erleichterung der Rechnung mit ihm (dem dezimalen Näherungswert von 2π) bringen wir auch sein Produkt mit jeder der neun Ziffern in der folgenden Tafel¹⁴²: (s. S. 107).

Wisse, daß die Zwei, die an der letzten¹⁴³ Stelle der (Zähler der) Brüche steht, in der Stelle der Minuten der (links von ihr stehenden) sechs Ganzen steht, wenn man annimmt, daß zehn Minuten ein Ganzes sind. Wenn wir wollen, nennen wir diese Stelle die „Zehntel“. (Wisse ferner, daß) die Acht, die rechts von ihr (der Zwei) steht, (unter derselben Annahme) in der Stelle der Sekunden steht — wir nennen sie „Dezimalsekunden“ —, und daß die

¹⁴¹ D. h. $60^{-9} < 10^{-10} < 60^{-9} + \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}$, denn $0 < 10^{-10} - 60^{-9} < 0.0^{18}77 < 0.0^{18}82 < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}$.

¹⁴² In dieser und den drei folgenden Tafeln habe ich alle Spalten so angeordnet, wie sie im arabischen Text stehen. Ich habe also nicht mit Rücksicht auf die umgekehrte Schreibrichtung die Spalte mit den Multiplikatoren und die in den drei folgenden Tafeln außerdem vorhandene Spalte mit der Beschriftung an den linken Rand gebracht. Für den Leser des Urtextes stehen diese Spalten vorn. In dieser und den drei folgenden Tafeln fett gedruckte Zahlen und Wörter sind in der Handschrift anscheinend rot geschrieben. Statt der in der letzten Zeile der vorliegenden Tafel zwischen 5 und 6 stehenden 8 hat die Handschrift fälschlich 7.

¹⁴³ Die Stellen werden von rechts nach links gezählt. Die „letzte“ Stelle ist also diejenige vom höchsten Stellenwert.

Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser																		
Ganze		Brüche																
deren Zehner Vielfache der Hälfte des Durchmessers	Einer der fünfmal wiederholten Tausender	viermal wiederholt			dreimal wiederholt			Tausender der Tausender			Tausender			Hunderter	Zehner	Einer		Zahlen
		Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer					
null	sechs	zwei	acht	drei	eins	acht	fünf	drei	null	sieben	eins	sieben	neun	fünf	acht	sechs	fünf	
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	1
1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	2
1	8	8	4	9	5	5	5	9	2	1	5	3	8	7	5	9	5	3
2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0	4
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5	5
3	7	6	9	9	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0	6	
4	3	9	8	2	2	9	7	1	5	0	2	5	7	1	0	5	5	7
5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0	8
5	6	5	4	8	6	6	7	7	6	4	6	1	6	2	7	8	5	9
6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	0	10

(Hilfstafel für die Berechnung von $2\pi r$ aus r)

dahinter stehende Drei in der Stelle der Terzen steht — wir nennen sie „Dezimalterzen“ —, und so geht es weiter nach dem Muster der Sternrechnung (d. i. der Sexagesimalbrüche). Deswegen begannen wir mit einem einzigen (muḥrad) Nenner, nämlich eins. Dieses Verfahren im indischen Rechnen gehört zu dem, was wir erfanden, desgleichen seine Anordnung in der Tafel.^{hh})

Für den sexagesimalen Näherungswert von 2π hatte K. im sechsten Abschnitt folgenden Merkwerts gedichtet:

wa	ya	naḥ	kaḥ	a	laḥ	nā	mū	ja-	yad	nū
mu-	hī-	ṭun	hai-	ṭu	niṣ-	ful-	quḥ-	ri	sī-	nū
6	16	59	28	1	34	51	46	und	14	50

ist ein Umfang, sofern die Hälfte des Durchmessers 60 ist.ⁱⁱ)

Ebenso gibt er am Schluß des achten Abschnitts für seinen dezimalen Näherungswert von 2π einen arabischen und einen persischen Merkwert. Der arabische lautet:

wa- baḥ- ġā haḥ-	ġi şaz a za ṭah	ḥa- wā' hū
mu- ḥi- ṭun li	qu -ṭrim huwa 'ṭnā-	ni min- hū
6 2 8 31 8 5	3 0 7 1 7 9 5	8 6 5

ist ein Umfang zu einem Durchmesser, der 2 davon ist.^{kk)}

Die Ziffern sind in diesen arabischen Versen durch die Gummalbuchstaben wiedergegeben, 0 durch ş, den Anfangsbuchstaben von *sifr* = null. Wie beim Abgād wurden die Konsonanten durch eingefügte Vokale aussprechbar gemacht.

Der persische Merkvers lautet:

Şaş ū du haşt ū siḥ yak haşt ū panč ū siḥ şifrī bahaft ū yagrā (bahaft?)
 ū nūḥ panč ū haşt ū şaş panč ast

6 und 2 8 und 3 1 8 und 5 und 3 eine Null mit 7 und 1 (7) und 9 5 und 8 und 6 5 ist (es).^{ll)}

Die Dichter, die später Reime für die Zahl π schmiedeten, haben also einen Vorläufer in unserm K., der 2 π auf 9 Sexagesimalstellen in einen arabischen und auf 16 Dezimalstellen in einen arabischen und einen persischen Vers brachte.

In der Hilfstafel von S. 107 sind die Vielfachen von 2 π zwar schon im dezimalen Stellungsgefüge geschrieben, aber in der Kopfbeschriftung sind die Dezimalbruchstellen noch als Zähler der Brüche mit dem Nenner 10¹⁶ ausgedrückt. Die die Trennung vollziehenden Überschriften „Ganze“, „Brüche“ werden uns auch später begegnen¹⁴⁴. In den dieser Tafel folgenden Zeilen erscheinen für die Dezimalbruchstellen wieder die besonderen Namen „Zehntel“, „Dezimalsekunden“ usw. Einen Fortschritt in der tabellarischen Bezeichnungsweise der Dezimalbrüche bringen dann die Erläuterungen und Beispiele für die Anwendung der sexagesimalen und der dezimalen Hilfstafel zur Berechnung des Umfangs aus gegebenem Halbmesser und umgekehrt. Das Allgemeine dieser Erläuterungen gibt K. in einer Form, die gleichzeitig für sexagesimale und dezimale Ausführung der Rechnung gilt. Die als Beispiel mitgeteilte Berechnung des Umfangs des Kreises vom Halbmesser 650844 $\frac{1}{2}$ Ellen oder ebensoviel Farsangen¹⁴⁵ führt er dezimal auf zwei Arten tabellarisch aus. Die eine Ausführung ist folgende:

¹⁴⁴ „Ganze“ heißt auf Arabisch *ṣiḥāḥ*. Hiernach ist die auf D. E. Smith⁶ II, S. 240 zurückgehende Angabe bei Tropfke I⁷, S. 175, zu berichtigen, wo das Wort fälschlich *sah-hah* geschrieben und fälschlich mit „Länge“ übersetzt ist.

¹⁴⁵ Im dritten Abschnitt des Lehrbriefs über den Kreisumfang setzt K. 1 Farsang = 12000 Ellen, 1 Elle = 24 Finger. Nach Cl. Huart (E. I. II, S. 73) war der arabische Farsang 5762,8 m lang.

Die Rechnung mit den indischen Ziffern																				
3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0	6	Hunderttausender	
	3	1	4	1	5	9		2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	5	Zehntausender	
		0	0															0	Tausender	
			5	0	2	6		5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	7	8	Hunderter
				2	5	1		3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	4	Zehner
					2	5		1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	2	4	Einer
						0		6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	2	1	Zehntel
								1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	2	Dezimalsekunden
									3	1	4	1	5	9	2	6	5	4	5	Dezimalterzen
4	0	8	9	3	7	4		2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9	Ergebnis, d. i. d. Umfang	
Millionen	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Dezimalsekunden	Dezimalterzen	Dezimalquarten	(Dezimalquinten)	(Dezimalsexten)	(Dezimalseptimen)	(Dezimaloktaven)	(Dezimalnonen)	(Dezimaldezimen)	(Dezimalundezimen)			
Ganze							Brüche													

Berechnung von $\sim 2\pi r$ aus $r = 650844\frac{1}{2}$

Hier hat er die von ihm eingeführten Namen der Dezimalstellen bei den Unterschriften der Spalten und den Anschriften der Dezimalstellen des anderen Faktors verwandt. In der anderen Ausführungsweise, bei der er mit der niedrigsten Stelle des Halbmessers zu multiplizieren beginnt, also nach links ausrückt, bringt er neben den neuen auch die alten Stellenbezeichnungen der Hilfstafel (oben S. 107) an, bemerkt aber, daß die neuen Bezeichnungen zeitsparend sind. Man beachte, wie K. hier und in Beispielen, die wir noch kennen lernen werden, Bruchteile von Farsangen, Ellen und Quadratellen durch Dezimalstellen angibt, obwohl diese Maße¹⁴⁵ eine nichtdezimale Unterteilung hatten.

In der oben wiedergegebenen Tabellenrechnung multipliziert K. abgekürzt, d. h. er läßt in den Teilprodukten und im Ergebnis die Stellen unterhalb der Dezimalundezimen ($a_{-11} \cdot 10^{-11}$) weg. Man beachte, wie er die letzte hingeschriebene Stelle richtig um 1 erhöht, wenn die folgende Stelle mindestens 5 beträgt. Beim zweiten Teilprodukt hat er die 2 nicht erhöht, weil er weiß, daß die in seiner Hilfstafel (S. 107) auf 2 folgende 5 selbst erhöht ist. Über die Gesichtspunkte, aus denen die abgekürzte Multiplikation zu handhaben ist, äußert sich K. recht vernünftig so:

Am einfachsten ist es, einen Teil der letzten Stellen wegzulassen, wobei das übrigbleibt, was einen Wert, den wir nicht vernachlässigt zu sehen

wünschen, nicht schädigt. Ist z. B. das Maß der Farsang, und wünschen wir im Ergebnis einen Finger nicht zu vernachlässigen, der dreiviertel Perzen, d. h. angenähert das Drittel einer Dezimalquinte eines Farsang ist ($1 \text{ Finger} = \frac{3}{4} \cdot 60^{-3} \text{ Farsang} \approx 0.347 \cdot 10^{-5} \text{ Farsang}$), so (gilt folgendes): Wenn wir die Quarten oder die Dezimalsexten noch in Rechnung ziehen und das weglassen, was nach ihnen kommt, so ergibt sich das Gesuchte. Ist der Kreis klein, ist z. B. die Hälfte seines Durchmessers $127(\frac{1}{2})$ Ellen, so reicht es aus, wenn wir dabei folgendermaßen rechnen:

0	6	2	8	3	2	1	Ganze
	1	2	5	6	6	2	
		4	3	9	8	7	
			3	1	4	5	Brüche
0	8	0	1	1	0		
Ganze				Brüche			

Also kommt heraus $801\frac{1}{2}$ Ellen, und das ist die Größe des Umfangs.^{mm)}

In dieser letzten Tabellenrechnung ist der Stellenwert nur noch dadurch gekennzeichnet, daß der Spaltenstrich zwischen Einern und Zehnteln nach unten und der Zeilenstrich zwischen Einern und Zehnteln des Multiplikators nach rechts durchgezogen und auf die Seite der Ganzen das Wort „Ganze“, auf die Seite der Dezimalbruchstellen das Wort „Brüche“ („Bruch“) geschrieben ist.

Noch einen Schritt weiter geht die Vereinfachung in folgender Rechnung aus dem zehnten Abschnitt:

4	3	9	8	2	2	9	7	7	das mit den drei Zahlenziffern und der Bruchziffer Genommene (d. h. Multiplizierte)
			4	3	9	8	2	7	
				1	8	8	5	3	
					3	1	4	5	
4	4	0	2	8	4	7	8		das Ergebnis
4	4	0	4	6	2				Was in der „Gabe“ steht
			1	7	7				Unterschied zwischen beiden

Berechnung von $\sim 2\pi \cdot 70073\frac{1}{2}$ durch abgekürzte Multiplikation

Der 1311 gestorbene Astronom Qutbaddīn Maḥmūd b. Maṣ'ūd b. Muṣliḥ aṣ-Šīrāzī (vgl. S. 14) hatte in seinem Werk „Die königliche Gabe“ (*al-tuhfa aṣ-šāhiya*) den Halbmesser der Fixsternsphäre zu $70073\frac{1}{2}$ Erddurchmessern und hieraus den Umfang eines Großkreises der Fixsternsphäre durch Multiplikation mit $2 \text{ mal } 3\frac{1}{2}$ zu 440462 Erddurchmessern berechnet. Dieser Umfangsberechnung stellt K. hier diejenige mit einem Näherungswert von 2π gegenüber, der so genau ist, daß das Ergebnis bis zu den (von 4 auf 5 zu erhöhenden) Einern richtig wird.

In dieser Tafel sind in der von mir benutzten Stambuler Handschrift nur noch die Einer von den Zehnteln durch einen Strich getrennt. (In der Handschrift ist der waagerechte Trennungsstrich fälschlich bis zum rechten Rand der Tafel durchgezogen, und es fehlt der folgende waagerechte Additionsstrich.) Die Beschriftung „Ganze“, „Brüche“ ist weggefallen. Hier sehen wir also die in den vorhergehenden Tafeln schwerfälliger Kennzeichnung des Stellenwertes in der Richtung auf unsere moderne Bezeichnungsweise hin vereinfacht. Der Strich zwischen Einern und Zehnteln ist als Symbol unserem Dezimalkomma oder Dezimalpunkt gleichwertig. Man darf wohl annehmen, daß K. bei den vorhergehenden Tabellen die umständlichere Beschriftung nur gewählt hat, um dem Leser alles ganz deutlich darzubieten.

Auch in Tabellenrechnungen des „Schlüssel“ begegnet es uns oft, daß nur zwischen Ganzen und Minuten bei Sexagesimalrechnungen, zwischen Ganzen und Zehnteln bei Dezimalrechnungen ein Strich gezogen ist, der also die Ganzen von den Bruchstellen trennt, wobei wieder die Überschrift „Ganze“ über der einen und „Brüche“ über der anderen Seite des Striches auftaucht¹⁴⁸.

Den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks mit der Seite $20\frac{1}{2}$ Ellen rechnet K. (IV, 3) mit indischen Ziffern folgendermaßen aus:

Wir nehmen die halbe Elle, die mit zwanzig Ellen zusammen eine Seite (des Sechsecks) ist, (als Bruch) mit dem Nenner zehn; das ist dann fünf. Diese

setzen wir folgendermaßen rechts von der Zwanzig:

Ganze	Brüche
20	5

quadrieren es, ergibt:

Ganze	Brüche
420	25

, multiplizieren es mit folgender

Zahl:

Ganze	Brüche
2	598076

(das ist K.'s Wert für $\frac{3}{2}\sqrt{3}$), kommt folgen-

des heraus:

Ganze	Brüche
1091	841439

.nn) (Im Urtext falsch: 841079)

Hier hat K. die kürzeste Schreibweise seiner Tabellenrechnungen auch in den laufenden Text übernommen. Hätte er noch die offenbar zur Verdeutlichung für den Leser beigefügten Überschriften „Ganze“, „Brüche“

¹⁴⁸ Statt der Tafeln der Vielfachen von 2π bringt der „Schlüssel“ (IV, 4b) solche der Vielfachen von

$$\pi = \frac{\text{Kreisumfang}}{\text{Durchmesser}} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\text{Kreisfläche}}{\text{Quadrat des Durchmessers}}.$$

Hierbei ist für die beiden sexagesimalen Tafeln der Näherungswert $\pi \approx 3.8\ 29\ 44$ und für die dezimalen $\pi \approx 3.141593$ zugrundegelegt. K. betont, daß $3.8\ 29\ 44$ viel genauer als der Archimedische Wert ist.

weggelassen, wie er dies in der zuletzt von uns mitgeteilten Tabellenrechnung der Kreisabhandlung und sicher auch in seinen Rechnungen für eigenen Gebrauch tat, und unterdrückt man den überflüssigen rechteckigen Rahmen, so wären also hier auch einzelne Dezimalzahlen im laufenden Text in einer Weise geschrieben, die sich von der modernen nicht mehr wesentlich unterscheidet. Der Strich zwischen dem ganzzahligen und dem gebrochenen Teil erinnert uns an den senkrechten Strich bei Levi ben Gerson's amphibischen Zahlen (S. 96), ferner an Sibṭ al-Māridīnī's Rat, bei reinen Sechzigerzahlen mit ganzzahligem und gebrochenem Teil die Einerstelle (Grade) durch ein Zeichen kenntlich zu machen (s. oben S. 68).

Natürlich bedürfen meine Angaben über diese Schreibweise K.'s wie diejenigen über alle sonstigen von mir nur in einer oder zwei Handschriften festgestellten Schreibweisen der Nachprüfung durch die Untersuchung anderer, zur Zeit unzugänglicher Handschriften.

Sonst kennzeichnet K. den Stellenwert bei Dezimalbrüchen im laufenden Text auch anders. Er sagt (III, 6) in einem Erläuterungsbeispiel, das nacheinander die Dezimalstellen der Zahl 0.141593 geliefert hat:

Wir schreiben die Ziffern . . . aufeinanderfolgend so: 141593, und das ist das Gesuchte, und die Stelle am weitesten rechts ist Dezimalsexten.^{oo}

Diese Ausdrucksweise entspricht seiner Gewohnheit, auch bei Sexagesimalzahlen den Stellenwert der niedrigsten Stelle anzugeben. So sagt er z. B. auch (IV, 9) *14214 Dezimalsexten* für 0.414214 und (V, 4c Beisp. 5) *elf und 332 Dezimalterzen* für 11.832. Ziffernweise lesen mußte er solche Dezimalstellen auf jeden Fall natürlich dann, wenn ihre Anzahl groß war, wie seine Merkverse für die 18 Dezimalstellen von 2π das auch erweisen.

Es ist ganz natürlich, daß bei der Erläuterung einer Methode, die erst im Entstehen war und seinen Lesern noch fremd vorkommen mußte, sich noch keine einheitliche Bezeichnungsweise festgesetzt hat. In der Bruchrechnung knüpft K. (II, 8) an die Behandlung der Multiplikation zweier gemischter Zahlen folgende Bemerkung:

Ist bei jedem der beiden Faktoren der Nenner eine nackte Zahl wie 10 oder 100 oder 1000, so ist es am einfachsten, wenn wir bei beiden die Ganzen links von dem Bruch in dieselbe Zeile setzen, damit der Bruch zu einem Dezimalbruch und alles zusammen wie eine ganze Zahl werde. Wir multiplizieren dann den Multiplikanden mit dem Multiplikator nach dem Verfahren für die Multiplikation der ganzen Zahlen. Beim Ergebnis sondern wir, wenn wir wollen, (d. h. sondern wir entweder) von rechts her soviel Ziffern ab, wie die Nullen in den beiden Nennern zusammen ausmachen. Das ist dann der (Zähler des) Bruch(es) des Produkts zu einem Nenner, der eine nackte Zahl mit soviel Nullen ist, wie die genannten Nullen zusammen betragen. Die übrigen Ziffern des Ergebnisses sind die Ganzen des Ergebnisses. Und wenn wir wollen, so legen wir (d. h. Oder wir legen) jenen Bruch dahin aus, daß es so und soviel Zehntel, oder so und soviel Dezimalsekunden und -terzen sind, nach dem Muster des Rechnens der Astronomen.

Beispiel: Wir wollen $14\frac{3}{10}$ mit $25\frac{7}{100}$ multiplizieren. Wir ordnen sie im Gitter an, wobei wir die ganzen Zahlen und die Brüche durch die Farbe voneinander folgendermaßen scheiden¹⁴⁷:

		2	5	0	7	
1		2	5		7	
4		8	0	0	8	
3		6	5	0	1	
	3	5	8	5	0	1

Und da die Nullen in den Nennern (zusammen) drei sind, nehmen wir von der rechten Seite des Ergebnisses drei Ziffern für den Bruch, und die übrigen Ziffern sind die Ganzen. Wenn wir dann wollen, setzen wir (d. h. Entweder setzen wir dann) beide (d. h. die Zahlen 358 und 501) mit einem

358

nackten Nenner, der drei Nullen hat, hin, folgendermaßen: 501. Und wenn

1000

wir wollen, setzen wir es (d. h. Oder wir setzen es) so, wie es unter dem Gitter steht, in eine einzige Zeile und deuten es dahin, daß es 358 Ganze und 501 Dezimalsekunden sind.¹⁴⁸)

Schon früh, so bei an-Nasawī und Johannes von Sevilla begegnet uns die verfeinerte Berechnung irrationaler Quadratwurzeln, die darin besteht, daß man dem ganzzahligen Radikanden 2 k Nullen anhängt, um dann zuletzt das ganzzahlige Ergebnis durch 10 k zu dividieren. Diese Division wurde aber in der oben (S. 58) erwähnten Weise so ausgeführt, daß ein Sexagesimalbruch entstand. Auch für Kubikwurzeln hat an-Nasawī das entsprechende Verfahren, während die analoge Verfeinerung einer ganzzahligen nicht aufgehenden Division nach Tropfke (I, 3, S. 173) erst in den abendländischen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts festgestellt wurde¹⁴⁹. Das ist noch kein Dezimalbruchverfahren, aber „es ist kein Zweifel“, sagt Tropfke, „daß aus dieser Methode . . . das Dezimalbruchsystem seinen Anfang genommen hat“. Dahin gehört auch, daß Āryabhaṭa (geb. 476 n. Chr.) für den auf den Durchmesser $2 \cdot 10^4$ bezogenen Kreisumfang den Wert 62832, also für π den Wert 31416 : 10000 angab (Tropfke IV, 3, S. 274).

Auch K. behandelt im „Schlüssel“ (II, 10) dieses Verfahren für die Wurzeln, und zwar in der Verallgemeinerung auf die n -te Wurzel. Er aber vollzieht den entscheidenden Schritt zu den Dezimalbrüchen, indem

¹⁴⁷ In der von mir benutzten Schwarz-auf-Weiß-Kopie der Handschrift¹⁴¹ sind keine Farbunterschiede erkennbar. Wo sinngemäß eine andere Farbe vermutet werden kann, ist sie hier durch einen Druckunterschied angedeutet.

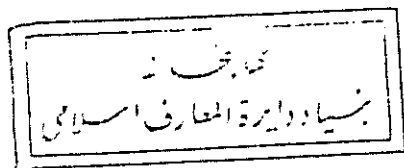
¹⁴⁸ Für die Division wäre dieses Verfahren nämlich ein Umweg gewesen, solange als Schlussergebnis eine ganze Zahl mit Sexagesimalbruch gewünscht war. Ein solches Schlussergebnis lieferte auf kürzerem Wege die oben (S. 49) erwähnte Ausführung der Division.

8 Luckey, Rechenkunst.

er z. B. der Rechnung $\sqrt[4]{145} = \frac{\sqrt[4]{1450000}}{100} \approx \frac{1204}{100} = 12\frac{4}{100}$ die Bemerkung beifügt: *Und wenn wir wollen, so legen wir es dahin aus, daß es vier Dezimalsekunden sind, nach dem Muster der Rechnung der Astronomen.⁹⁹⁾*

In Sexagesimalstellen verwandelt er diese Dezimalstellen nicht mehr.

Zusammenfassend sagen wir: K., der von Vorgängern die gebrochenen und ganzen Sexagesimalzahlen übernahm, fand auf dem dekadischen Gebiet nur die Kette auf der Seite des Aufsteigens, d. h. nur die ganzen dekadischen Zahlen vor. Er führt die Dezimalbrüche mit dem Bewußtsein ein, dies als erster zu tun. Daß es sich um eine vollgültige Einführung handelt, zeigt seine klare theoretische Grundlegung des Begriffs der Dezimalbrüche und des Rechnens mit ihnen nach dem Vorbild des Rechnens mit den Sexagesimalzahlen und in natürlicher Erweiterung des Rechnens mit ganzen dekadischen Zahlen. In der praktischen Durchführung erweisen es folgende Kennzeichen: Er führt Namen („Zehntel“, „Dezimalsekunden“ usw.) für die einzelnen Stellenwerte und den Gesamtnamen „Dezimalbrüche“ ein. Er gebraucht das Positionssystem und kennzeichnet in schriftlichen Rechnungen und bei der schriftlichen Angabe einzelner Dezimalbrüche den Stellenwert dadurch, daß er entweder allen Stellen oder der niedrigsten Stelle ihren Namen, z. B. „Dezimalsekunden“, beifügt, oder dadurch, daß er die Zehntel von den Ganzen durch einen Strich trennt, oder endlich dadurch, daß er die Ganzen mit schwarzer, die Bruchstellen mit roter Tinte schreibt. Er ordnet den Einern die Kennzahl 0, den Zehnern und Zehnteln die Kennzahl 1 zu, usw., wobei er die Kennzahlen der Ganzen und der Bruchstellen durch die Angaben „auf der Seite des Aufsteigens“, „auf der Seite des Absteigens“ unterscheidet. Er stellt die Regeln auf, nach denen unter Beachtung der „Seite“ die Kennzahl eines Produkts aus denjenigen der Faktoren, die Kennzahl eines Quotienten aus denjenigen von Dividend und Divisor und die Kennzahl einer Wurzel aus derjenigen des Radikanden bestimmt wird. Er führt Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Potenzierungen und Wurzelausziehungen mit Dezimalzahlen aus.



10. Verwandlungen von sexagesimalen Zahlen und Brüchen in dezimale und umgekehrt

Für die Verwandlung einer ganzen Sexagesimalzahl in eine „indische“, d. h. dekadische Zahl schreibt K. (III, 6) vor:

Wir multiplizieren das, was in der höchsten Stelle steht, unter Verwendung der indischen Ziffern mit 60 und fügen zum Ergebnis das hinzu, was in der nächst (niederen) Stelle steht. Dann multiplizieren wir die Summe mit 60 und addieren dazu (d. h. zu dem Produkt) das, was in der nächsten Stelle steht, und so (fort), bis wir zur Stelle der Grade kommen.^{rr)}

Am Rande steht als Beispiel die Verwandlung von 2 46 40. Das ist z. B. für eine vierstellige Zahl die Ausrechnung von

$$a_3 \cdot 60^3 + a_2 \cdot 60^2 + a_1 \cdot 60 + a_0 = [(a_3 \cdot 60 + a_2) \cdot 60 + a_1] \cdot 60 + a_0$$

durch diejenige Folge von Rechnungen, die wir in der Anordnung des sogenannten Ruffini-Hornerschen Schemas auszuführen pflegen.

Die umgekehrte Verwandlung vollzieht K. durch die inversen Operationen: Er dividiert die vorgelegte dekadische Zahl durch 60 und erhält als Rest a_0 „die Grade“ der gesuchten Sechzigerzahl, d. h. den Koeffizienten von 60^0 . Der Quotient wird wiederum durch 60 dividiert. Als Rest a_1 bleibt das „einmal Erhöhte“, d. h. der Koeffizient von 60 in der gesuchten Sexagesimalentwicklung, und so fort.

Abgesehen vom absoluten Stellenwert liegen dieselben Umformungen vor, wenn Kūšyār in seinem ersten Buch, ferner z. B. an-Nasawī (vgl. oben S. 44—45) und Johannes von Sevilla zwecks uneigentlicher Sexagesimalrechnung eine aus Graden, Minuten usw. bestehende Sechzigerzahl in Einheiten der letzten Sechzigerstelle überführen und nach ausgeführter dekadischer Rechnung mit dem Ergebnis die umgekehrte Verwandlung vornehmen. Kūšyār lehrt aber auch, wie wir (S. 80—81) sahen, an der Spitze seines zweiten Buches die Verwandlung einer ganzen dekadischen in eine ganze Sexagesimalzahl.

K. beherrscht aber die sexagesimale Rechnungsweise mit Gummalziffern mindestens ebenso sicher, wie die dekadische mit indischen Ziffern, und so kann er für jede dieser Verwandlungen auch die sexagesimale Durchführung lehren. Das gibt für die Verwandlung einer ganzen Sechzigerzahl in eine Zehnerzahl eine Folge von Divisionen (zur Erläuterung gebe ich in Klammern die Zahlen des Beispiels der Verwandlung von 2 46 40 an):

Wir nehmen die Einer (0) dessen, was in der Stelle der Grade steht (40). Das sind dann die Einer des Gesuchten. Sind in jener Stelle keine Einer vorhanden, so setzen wir eine Null an den Ort der Einer. Dann dividieren wir das übrige (2 46 40) durch 10 in der Sechzigertafel. Von dem Quotienten (16 40) nehmen wir die Einer (0) der Grade und setzen sie an den Ort der Zehner. Dann dividieren

$$\begin{array}{r} 2\ 46\ 40 \\ 120 \\ 46 \\ 166 \\ 9960 \\ 40 \\ 10000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 46\ 40 \\ 16\ 40 \\ 1\ 40 \\ 10 \\ 1 \end{array}$$

wir das übrige (16 40) durch 10 in der Sechzigertafel. Von dem Quotienten (1 40) nehmen wir die Einer (0) der Grade und setzen sie an den Ort der Hunderter. So verfähre man (weiter).¹³⁾

Das am Rande stehende frühere Beispiel der Verwandlung von 2 46 40 ist für den Anfänger insofern unglücklich gewählt, als jedesmal, mit K. zu reden, in der Einerstelle der Grade keine Einer stehen, so daß das dekadische Ergebnis vier Nullen erhält.

Umgekehrt vollzieht K. die Verwandlung einer ganzen Zehnerzahl in eine Sechzigerzahl durch sexagesimal ausgeführte Ruffini-Hornersche Operationen:

Wir multiplizieren das, was in der höchsten Stelle (der dekadischen Zahl) steht (1) nach der Sechzigertafel mit 10, so daß das Ergebnis (10) in Sexagesimalziffern herauskommt. Zu diesem Ergebnis addieren wir das, was in der nächst (niederen) Stelle (der dekadischen Zahl) steht (0), und multiplizieren die Summe (10) nach der Sechzigertafel mit 10. Zu dem Ergebnis (1 40) addieren wir das, was in der nächst niederen Stelle steht (0), und so (fort), bis zu den Einern. Dann kommt das Gesuchte heraus.¹⁴⁾

10000	
10 0	
1 40 0	
16 40 0	
2 46 40	

Die sexagesimalen Divisionen durch 10 und Multiplikationen mit 10 braucht man nicht, wie K. es angibt, mit der Sechzigertafel auszuführen (vgl. oben S. 53 und weiter unten S. 118—120).

Zur bequemen Verwandlung der „indischen“, d. h. dekadischen ganzen Zahlen in sexagesimale bringt K. eine fertige Tafel, aus der man für jede der Zahlen $a \cdot 10^n$, $a = 1, 2, \dots, 9$, $n = 1, 2, \dots, 10$ die sexagesimale Form entnehmen kann. In die Tafel geht man von oben mit n und von rechts mit a ein. Sie soll auch der umgekehrten Verwandlung von Sechzigerzahlen in Zehnerzahlen dienen.

Dann bespricht K. die Verwandlung eines Bruches einer Art in einen solchen einer anderen Art. Da er die vier Arten: gewöhnliche, sexagesimale, dezimale Brüche und die Dānaq mit den zugehörigen Unterbrüchen unterscheidet, so sind, wie er richtig angibt, 12 Verwandlungen zu behandeln. Die Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dānaq, Ṭassūğ und Ša'ir und die umgekehrte Verwandlung brachte schon das zweite Buch. Von den übrigen Verwandlungen sei hier nur diejenige der Sexagesimalbrüche in Dezimalbrüche und umgekehrt erwähnt. Für die erste dieser beiden Verwandlungen bringt K. nur die sexagesimale, für die zweite nur die dezimale Ausführungsform.

Es seien 8 29 44 Terzen in einen Dezimalbruch zu verwandeln. K. hat hier als Beispiel die Bruchstellen eines sexagesimalen Näherungswertes von π gewählt, den er im Lehrbrief über den Kreisumfang mit Recht als sehr genau bezeichnet¹⁵⁾. (Die nächste Sechzigerstelle wäre, wie man aus dem S. 106 angegebenen Werte von 2π ersieht, eine aufgerundete 1.) Er multipliziert 8 29 44 sexagesimal mit 10 und sondert die dabei erhaltenen Grade (Ganzen), in diesem Falle 1, ab. Mit dem gebrochenen Teil 24 57 20 des Produkts verfährt er dann ebenso wie vorher mit 8 29 44,

und so fort nach nebenstehendem Schema, dessen nicht eingeklammerter Teil sich in der Handschrift befindet. Ergebnis: $1;41593$, und die am weitesten rechts stehende Stelle ist Dezimalsexten, d. h. es ergibt sich $0.1;41593$. Daß er die letzte 2 auf 3 erhöht hat, begründet K. zutreffend damit, daß die Minuten von $2.35\ 33\ 20$ größer als $\frac{1}{2}$ sind. Warum er gerade bis zur sechsten Dezimalstelle rechnet, verschweigt er. Setzt man als bekannt voraus, daß die gegebene Zahl $0.8\ 29\ 44$ um weniger als eine Quarte $= 60^{-4} < 0.078$ unter $\pi - 3$ liegt, so ergibt sich $0.1;41592$ (Periode) $< \pi - 3 < 0.1;4159268$, und das reicht nicht aus, um zu entscheiden, ob für π der Näherungswert $3.1;415926$ oder $3.1;415927$ anzusetzen wäre.

Der Beweis des Verfahrens, der bei K. wie gewöhnlich fehlt, kann so geführt werden: Soll die gegebene Sexagesimalzahl A in einen Dezimalbruch verwandelt werden, dessen aufeinanderfolgende Bruchstellen $x, y, z, \dots$ seien, so ist

$$A = \frac{1}{10} \left\{ x + \frac{1}{10} \left[y + \frac{1}{10} \left(z + \frac{1}{10} < \dots \right) \right] \right\}$$

Die (auf der linken Seite sexagesimal auszuführende) Multiplikation dieser Gleichung mit 10 liefert x als ganzzahligen Bestandteil von $10A$. Dann wird mit der Gleichung

$$10A - x = \frac{1}{10} \left[y + \frac{1}{10} \left(z + \frac{1}{10} < \dots \right) \right]$$

ebenso verfahren, usf.

Um z. B. 0.376 in eine Sexagesimalzahl zu verwandeln, vollführt K. eine der vorigen ganz entsprechende Rechnung, indem er die ursprüngliche Zahl und dann jedesmal den gebrochenen Bestandteil des Ergebnisses dekadisch mit 60 multipliziert:

$$\begin{array}{r} (0|376) \\ \underline{22|560} \\ 33|6 \\ \underline{36|0} \end{array}$$

Ergebnis: $0.22\ 33\ 36$.

Dies ist die dekadisch ausgeführte Auflösung der Gleichung

$$0.376 = \frac{1}{60} \left[\xi + \frac{1}{60} \left(\eta + \frac{1}{60} \zeta \right) \right],$$

wo ξ, η, ζ die Sexagesimalstellen der gesuchten sexagesimalen Form sind.

Ohne daß von Dezimalbrüchen die Rede ist, finden wir der Sache nach die letztere Verwandlung schon z. B. bei an-Nasawī¹⁴⁷ (78b 31—79a 12) und Johannes von Sevilla (S. 87), ferner in der von Curtze mitgeteilten Algorismusschrift des 12. Jahrhunderts¹⁴⁸ (S. 27) und anscheinend auch im *Tractatus minutiarum* des Jordanus Nemorarius¹⁴⁹. Nachdem man nämlich beim dekadischen Quadratwurzelnziehen in der oben (S. 113) erwähnten Weise 2 k Nullen an den Radikanden angehängt und die Wurzel

¹⁴⁹ G. Eneström, Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius. Bibl. Math. (3) 14 (1913—14), S. 41—54. S. S. 53.

ausgezogen hat, multipliziert man die hierdurch gewonnenen k Stellen der Wurzel mit 60 und zählt vom Ergebnis von rechts her k Stellen ab. Das links davon Stehende sind dann die Minuten. Das übrige wird wieder mit 60 multipliziert, und so fort. Dies ist nichts anderes, als die Ausführung der Division einer ganzen Zahl durch 10 oder 100 oder 1000 usw. nach dem Divisionsverfahren, das Johannes von Sevilla für beliebigen Divisor angibt (s. oben S. 49). Hiernach würde z. B. 0.376 dadurch in einen Sechzigerbruch verwandelt, daß 376 nach diesem sofort Sexagesimalstellen liefernden Verfahren durch 1000 dividiert wird.

Zur Verwandlung von Dezimalbrüchen in Sexagesimalbrüche bietet K. eine fertige Tafel mit zwei Eingängen dar, aus der man für jeden der Dezimalbrüche $a \cdot 10^{-n}$, $a = 1, 2, \dots, 9$, $n = 1, 2, \dots, 10$ den gleichwertigen Sexagesimalbruch entnehmen kann. Auch die umgekehrte Verwandlung soll mit Hilfe derselben Tafel vorgenommen werden.

Da für die Untersuchung von Sexagesimalrechnungen handliche Ausführungsformen der Verwandlung von sexagesimalen Zahlen in dekadische und umgekehrt nützlich sind, teile ich im folgenden in Form von Beispielen die Schemata mit, die ich mir zu diesem Zweck ausgebildet habe¹⁵⁰. Sie beruhen auf den Verfahren, die uns soeben bei K. und seinen Vorläufern begegneten, nämlich dem Multiplikationsverfahren nach der ersten Zeile des Ruffini-Hornerschen Schemas und dem hierzu inversen Divisionsverfahren.

Jede Verwandlung ist auf zwei Arten möglich, durch dekadische oder durch sexagesimale Rechnung. Bei der dekadischen Ausführung handelt es sich für das Divisionsverfahren um Divisionen durch 60, für das Multiplikationsverfahren um Multiplikationen mit 60. Bei der sexagesimalen Ausführung treten die entsprechenden Rechnungen mit 10 auf. Eine Verwandlung, die dekadisch nach dem Divisionsverfahren ausführbar ist, läßt sich sexagesimal nach dem Multiplikationsverfahren vornehmen, und entsprechend gelten alle drei Umkehrungen dieses Satzes.

Vom Stellenwert abgesehen, wird im Zehnersystem die Multiplikation mit 60 als Multiplikation mit 6 von rechts nach links und die Division durch 60 als Division durch 6 von links nach rechts ausgeführt. Aber auch im Sechzigersystem ist die Multiplikation mit 10 und die Division durch 10 leicht ausführbar. Da hier, vom Stellenwert abgesehen, die Multiplikation mit 10 der Division durch 6 gleichkommt, so multipliziert man z. B. die Zahl 45 19 56 mit 10, indem man sie folgendermaßen von links nach rechts durch 6 dividiert:

Multiplikation mit 10: $\begin{array}{r} 45\ 19\ 56 \\ 7\ 33\ 19\ 20 \end{array}$

¹⁵⁰ Die Ausführung solcher Verwandlungen mit der Rechenmaschine behandelt: L. Schrutka, Über einige Verwendungsarten der Rechenmaschine. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 1 (1921), S. 195—199.

D. h. man dividiert 45 durch 6, schreibt das Ergebnis 7 unter die 5 von 45, setzt den Rest 3 in die Zehnerstelle der nächsten Sechzigerstelle und fährt so fort.

Will man die Zahl 45 19 56 durch 10 dividieren, so multipliziert man sie folgendermaßen von links nach rechts mit 6:

$$\begin{array}{r} \text{Division durch } 10: \quad 45 \ 19 \ 56 \\ \underline{4 \ 31 \ 59 \ 36} \end{array}$$

D. h. man schreibt die Zehnerstelle 4 von 45 als Einerstelle hin, multipliziert die Einerstelle 5 von 45 mit 6 und fügt zum Produkt 30 die 1 von 19. Die so erhaltene 31 ist die nächste Sechzigerstelle. So fährt man fort, bis man die letzten Stellen 36 als Rest hinschreibt.

Je nachdem man bei den Verwandlungen jede nächste Zeile nach rechts oder links um eine Stelle verrückt oder nicht, entsteht das Ergebnis entweder in schräger Linie oder als erste oder letzte Spalte oder als letzte Zeile. In den folgenden Beispielen ist die Anordnung so getroffen, daß das Ergebnis entweder in schräger Linie oder in der letzten Zeile erscheint. Die Stellen des Ergebnisses sind unterstrichen und sind stets von links nach rechts zu lesen.

I. Verwandlung der ganzen dekadischen Zahl 921468 in eine sexagesimale.

a) durch dekadisches Divisionsverfahren

$$\begin{array}{r} 9 \ 2 \ 1 \ 4 \ 6 \ 8 \\ 1 \ 5 \ 3 \ 5 \ 7 \ \underline{48} \\ \quad 2 \ 5 \ 5 \ \underline{57} \\ \quad \quad \underline{4 \ 15} \end{array}$$

b) durch sexagesimales Multiplikationsverfahren

$$\begin{array}{r} 9 \ 2 \ 1 \ 4 \ 6 \ 8 \\ 1 \ 32 \\ \quad 15 \ 21 \\ \quad \quad 2 \ 33 \ 34 \\ \quad \quad \quad 25 \ 35 \ 46 \\ \quad \quad \quad \underline{4 \ 15 \ 57 \ 48} \end{array}$$

II. Verwandlung der ganzen Sexagesimalzahl 4 15 57 48 in eine dekadische.

a) durch dekadisches Multiplikationsverfahren

$$\begin{array}{r} 4 \ 15 \ 57 \ 48 \\ 255 \swarrow \\ 15357 \swarrow \\ \underline{921468} \\ \text{-----} \end{array}$$

b) durch sexagesimales Divisionsverfahren

$$\begin{array}{r} 4 \ 15 \ 57 \ 48 \\ \quad 25 \ 35 \ 46 \ 8 \\ \quad \quad 2 \ 33 \ 34 \ 6 \ - \\ \quad \quad \quad 15 \ 21 \ 4 \ - \\ \quad \quad \quad \quad 1 \ 32 \ 1 \ - \\ \quad \quad \quad \quad \quad 9 \ 2 \ - \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad} \end{array}$$

III. Verwandlung des Dezimalbruches 0.35267 in einen Sexagesimalbruch.

a) durch dekadisches
Multiplikationsverfahren

$$\begin{array}{r}
 0.35267 \\
 -21.1602 \\
 \hline
 9.612 \\
 -36.72 \\
 \hline
 43.2 \\
 -12. \\
 \hline
 \end{array}$$

b) durch sexagesimales
Divisionsverfahren

$$\begin{array}{r}
 0.35267 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 642 \\
 24012 \\
 516112 \\
 33136712 \\
 \hline
 0.219364312
 \end{array}$$

IV. Verwandlung des Sexagesimalbruches 0.219364312 in einen Dezimalbruch.

a) durch dekadisches
Divisionsverfahren

$$\begin{array}{r}
 0.219364312 \\
 432 \\
 \hline
 3672 \\
 9612 \\
 \hline
 211602 \\
 \hline
 0.35267
 \end{array}$$

b) durch sexagesimales
Multiplikationsverfahren

$$\begin{array}{r}
 0.219364312 \\
 -33136712 \\
 \hline
 516112 \\
 -24012 \\
 \hline
 642 \\
 -7 \\
 \hline
 \end{array}$$

Durch Spiegelung jedes Schemas an einer waagerechten Geraden geht die betreffende Verwandlung in die Rückverwandlung über. Im allgemeinen werden wir die uns geläufigen dekadischen Rechnungen den sexagesimalen vorziehen, die man sich aber auch rasch einüben kann.

11. Die Dezimalbrüche bei Immanuel Bonfils

Es wurde schon (oben S. 102—103 u. S. 113) darauf hingewiesen, daß dem Mittelalter der Gedanke der Dezimalbrüche nahe lag. Einander gegenüber standen sich das nur für die Ganzen ausgebildete Rechnen im dekadischen Positionssystem der indischen Zahlen und die Sechzigerrechnung der Astronomen, die mindestens schon im zehnten Jahrhundert als reine Sechzigerrechnung, d. h. als systematisches Rechnen mit Ganzen und Bruchstellen im sexagesimalen Positionssystem unter Verwendung der Sechzigertafel ausgebildet war. Schon bei Kūšyār sehen wir dekadische und sexagesimale Ausführung der Rechenoperationen bis zur Quadratwurzelausziehung einander gegenübergestellt.

Zur Verfeinerung der Quadratwurzelausziehung aus einem Radikanden q , der keine Quadratzahl ist, kennt Johannes von Sevilla zwei Verfahren, die wir durch die beiden Formeln

$$\sqrt{q} = \sqrt{60^{2k} \cdot q} \cdot \frac{1}{60^k} \quad \text{und} \quad \sqrt{q} = \sqrt{10^{2k} \cdot q} \cdot \frac{1}{10^k}$$

darstellen können. Wenn auch, wie wir sahen, im zweiten wie im ersten Fall schließlich ein Sechzigerbruch hergestellt wurde, so mußte doch der Rechner, der sich der grundsätzlichen Gleichwertigkeit der Grundzahlen 60 und 10 bewußt war, daran denken können, bei der zweiten Formel entsprechend wie bei der ersten zu verfahren. Man betrachte unter diesem Gesichtspunkte die Schlußworte, die Kūšyār in seiner kurzen Art der von ihm nur dekadisch behandelten Ausziehung der Kubikwurzel beigtibt:

Zur Verfeinerung der Kubikwurzel (dient), daß wir das Vermögen (d. h. den Radikanden) in die Brüche verwandeln, die eine Kubikwurzel besitzen, nämlich die Terzen und die Sexten und die Nonen usw. und dann seine Kubikwurzel ausziehen.¹⁵¹

Da Kūšyār die Kubikwurzel ausziehung nur im Zehnersystem vornahm, liegt für den Leser der Gedanke nahe, daß zur Verfeinerung 3 oder 6 oder 9 Nullen an den Radikanden angehängt werden sollen, wie bei der Quadratwurzel 2 oder 4 oder 6 Nullen. Dann würden die Terzen, Sexten und Nonen, von denen Kūšyār spricht, „Dezimalterzen“, „Dezimalsexten“ und „Dezimalnonen“ im Sinne K.'s bedeuten. Kūšyār's Wortlaut läßt offen, was für Brüche es sein sollen; bei seinem Sprachgebrauch muß man aber annehmen, daß er Sechzigerbrüche meint.

Bisher ist aus der Zeit vor K. ein einziger Text bekannt, der die Dezimalbrüche einführt. G. Sarton und S. Gandz¹⁵¹ wiesen nämlich in zwei hebräischen Handschriften (*Paris ms. hebr. 1081*, 13a Zeile 5—14b und *ms. hebr. 1054.6*, 31a) eine kurze Stelle nach, die von Dezimalbrüchen handelt. Verfasser dieses Textes ist Immanuel Bonfils (*Tob-Elm*) von Tarascon, der in der Mitte des 14. Jahrhunderts lebte.

Er teilt die Einheit in 10 (gleiche) Teile, die „Erste“ („Primen“) heißen jede Prime ist in 10 (gleiche) Teile geteilt, die „Zweite“ („Sekunden“) genannt werden, usw. Ferner spricht er bei den Ganzen von „Einern“, „Ersten“ = Zehnern, „Zweiten“ = Hundertern usw. Von den „Dritten“ („Terzen“) z. B. sagt er, sie seien von einem höheren „Namen“ (*šem*) als die „Zweiten“. Dies gelte von den Ganzen ebenso wie von den Brüchen. Mit dem „Namen“ dürfte er die in den Bezeichnungen „Erste“ oder „Primen“, „Zweite“ oder „Sekunden“ usw. steckenden Grundzahlen 1, 2, ... meinen.

Bonfils bringt dann die Regel zur Bestimmung des „Namens des Grades“ eines Produkts aus den „Namen der Grade“ der Faktoren und des „Namens des Grades“ eines Quotienten aus den „Namen der Grade“ des Dividenden und Divisors. Diese Regeln für die Bestimmung des Stellenwertes bei der Multiplikation und der Division von Dezimalzahlen sind inhaltlich dieselben, wie wir sie bei K. sowohl für die Sexagesimal- wie für die Dezimalrechnung ausgesprochen fanden.

Den „Namen“ der Einer führt Bonfils nicht als die Zahl Null ein, doch sagt er z. B. über die Division einer Zahl durch eine solche von gleichem

¹⁵¹ S. Gandz, The invention of the decimal fractions and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon (c. 1350). *Isis* 25 (1936), S. 16—45.

„Namen“, falls entweder beide Zahlen Ganze oder beide Brüche sind: *Der Quotient wird in den Grad der Einer fallen. Denn wenn man den einen Namen vom anderen Namen abzieht, so bleibt nichts übrig; also fällt er in den Grad der Einer.*

Wir sahen, daß K. die Regeln für die Dezimalrechnung ausdrücklich von der auf die Ganzen erweiterten Sexagesimalrechnung übertrug, und daß schon seine Vorgänger für die Sexagesimalrechnung sowohl diese Regeln wie auch dieselben Bezeichnungen wie er für die Sexagesimalstellen unter und über den Graden besaßen, ebenso wie sie die entsprechenden Begriffe und Regeln der Potenzrechnung besessen haben müssen. Deshalb ist bei K. die Einführung der Dezimalbrüche eine durchaus verständliche Sache, die überdies dadurch Fleisch und Blut hat, daß sie aus seinen praktischen Rechnungen besonders in der angewandten Geometrie hervorgegangen ist und von ihm bei solchen Rechnungen immer wieder in geschickter äußerer Form benutzt wird. Auch hat sich K. in der Astronomie, der Trigonometrie, der Kreisberechnung und der Auflösung algebraischer Gleichungen als fähiger Mathematiker erwiesen, und alles ist bei ihm aus einem Guß.

Im Gegensatz dazu stellt die Einführung der Dezimalbrüche durch den etwa 80 Jahre älteren Immanuel Bonfils dem Forscher Fragen. Es fehlen uns noch die Zusammenhänge. Mehr als die genannten Bezeichnungen der Stellen und Regeln für die Bestimmung des „Namens“ der Produkte und Quotienten bringt Bonfils für die Dezimalzahlen in dem ans Licht gebrachten Text nicht. Insbesondere findet sich da nichts über die Schreibung der Dezimalzahlen im Positionssystem, also auch nichts über die Kennzeichnung des Stellenwertes bei der Niederschrift dieser Zahlen und über die praktische Ausführung der elementaren Rechnungen mit Dezimalzahlen. Das wenige, rein theoretisch Grundlegende, das Bonfils über die ganzen und gebrochenen Dezimalzahlen sagt, hängt also in der Luft. Es steht überdies in den nachgewiesenen Textstellen so unorganisch neben einer Behandlung der Division und der Wurzelrechnung nach älterer Art, bei der z. B. den Zehnern der Grad 2 zugewiesen wird, daß Gandz schon zu der Vermutung greifen mußte, die Ausführungen über Dezimalbrüche seien ein zu Papier gebrachter genialer späterer Einfall des Bonfils, und erst ein Abschreiber habe diese kurzen Aufzeichnungen mit den Ausführungen älterer Art vereinigt. Um Stellung nehmen zu können, möchte man den Mann gern aus seinen sonstigen Werken näher kennen lernen. Sarton, der (S. 16) glaubt, er und Gandz hätten den Bonfils für alle Zeiten unter die großen Mathematiker des vierzehnten Jahrhunderts gerückt, nennt in der Isisveröffentlichung außer dem „Weg der Division“ (*Derek hillug*), der die fraglichen Ausführungen über Dezimalbrüche enthält, nur die „Adlerflügel“ des Bonfils und sagt: „Es ist nicht nötig, von seinen anderen Werken zu sprechen“. Die „Adlerflügel“, auch „Sechs Flügel“ genannt, weil dieses Werk aus sechs Teilen besteht, sind nach Sarton astronomische Tafeln, die hauptsächlich zur Bestimmung des jüdischen Kalenders dienen sollten. Nach der Ency-

clopaedia Judaica (4, Sp. 944—946) hat Bonfils auch eine Abhandlung über das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie (*Paris ms. hebr. 1250.5*) verfaßt. Diese Schrift kann vielleicht die mathematischen Fähigkeiten ihres Verfassers ausweisen und auch sein Verhältnis zu den Dezimalbrüchen beleuchten, wie das für K. bei dessen Abhandlung über den Kreisumfang der Fall ist.

Man möchte vor allem auch wissen, ob Bonfils etwa, wie K., eine reine Sechzigerrechnung besaß. Nach den von Gandz mit 5 und 6 nummerierten Abschnitten über Division und Wurzelausziehung von Sexagesimalbrüchen scheint dies nicht der Fall zu sein. Auch von ganzen Sechzigerzahlen bemerke ich in dem mitgeteilten Text nichts. Um so überraschender ist es, daß Bonfils zur reinen und vollständigen Dezimalrechnung gelangen konnte. Denn wie dem K., muß auch ihm oder seinen Vorgängern die Sexagesimalrechnung irgendwie zum Vorbild gedient haben.

Daß K. nicht an den kurzen hebräischen Textabschnitt des Immanuel Bonfils in Tarascon anknüpft, bedarf keines Beweises. Wohl aber hat Bonfils mittelbar ebenso wie K. die Begriff- und Wortschöpfer zu Vorläufern, die zuerst in einer aufsteigenden Kette von Sexagesimalzahlen ebenso von „einmal Erhöhtem“, zweimal „Erhöhtem“ oder „Gezweitem“ usw. sprachen, wie man in der absteigenden Kette von „ersten Minuten“, „zweiten Minuten“ usw. sprach. Auch die „Namen“ des Bonfils sind ja nichts anderes, als die in diesen Ordnungszahlen steckenden Grundzahlen, und mit der Erweiterung des Gebrauchs dieser „Namen“ auf die Ganzen vollzog sich bei den Sechzigerzahlen auch die Erweiterung der Kennzahlenregeln für die Multiplikation und Division. Diese Erweiterung, die wir schon bei Kūšyār in Form zweier Tabellen vollzogen sahen, steht in engem Zusammenhang mit der Erweiterung der Regeln für die Potenzrechnung, oder, wenn man das Wort lieber will, der Exponentialrechnung, Regeln, die K. auch in ihrer Ausdehnung auf x^0 , x^{-1} usw. als etwas Bekanntes darstellt. Erkenntnisse hinsichtlich der zweckmäßigen Definition der Ordnungszahl der Stellen dürften auch bei den jüdischen Vorgängern des Bonfils schon wirksam gewesen sein. Gandz selbst weist (S. 29—29) auf Stellen bei Ibn Esra und Levi ben Gerson hin. Ibn Esra sagt hiernach, daß nach der „wahren“ Arithmetik der Grad 1 den Zehnern zugeschrieben werden müsse, und daß die Mathematiker nur, um es den Schülern leichter zu machen, die Einer in den ersten Grad setzten¹⁵². Die folgende Tabelle (S. 124) zeigt, wie des Bonfils Begriff und Bezeichnung „Name“ sich in die bisher festgestellten islamischen Begriffe und Bezeichnungen von Exponent und Stellenwert einreihen.

Bei all dem kann man nicht zustimmen, wenn Gandz für Bonfils den Ruhm in Anspruch nimmt, „die richtige und vereinheitlichte Exponentialrechnung sowohl für Ganze wie für Brüche eingeführt, das Fundamentalgesetz der Logarithmen antizipiert“ und hiermit sozusagen den

¹⁵² Vgl. M. Steinschneider, Abraham Ibn Esra¹⁰³ S. 116.

	al- Ḥaṣṣār, Ibn al- Bannā'	al- Qalaṣādī	Kūṣyār b. Labbān	Imma- nuel Bonfils	al-Kaṣī	Sibṭ al-Māri- dīnī
Potenz- exponent $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$		<i>ass</i> (Grundlage)			' <i>adad al-</i> <i>manzila</i> (Zahl des Grades)	
Ordnungszahl der Stellen der Ganzen im Zehnersystem		<i>ass</i> (<i>ass</i> der Einer = 1 <i>ass</i> der Zehner = 2 usw.)			—	<i>ass</i>
Stellen- exponent im Sechziger- system $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$			<i>laḥz</i> (Wort)		' <i>adad al-</i> <i>martaba</i> ((Kenn- zahl der Stelle)	<i>ass</i> — <i>ass</i>
Stellen- exponent im Zehner- system $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$	— — —	— — —	— — —	<i>ṣem</i> (Name) ? <i>ṣem</i>	' <i>adad</i> <i>al-</i> <i>martaba</i>	

Bezeichnungen für den Potenzexponenten und für die Ordnungszahl und den Exponenten der Stellen bei verschiedenen Schriftstellern

Archimedes mit seinen primitiveren Ordnungszahlen der Stellen über-
troffen zu haben.

Solange nicht mehr über das Zustandekommen der Äußerungen des Bonfils über Dezimalbrüche bekannt ist, scheint mir die Annahme am nächsten zu liegen, daß angesichts der auf die Spitze getriebenen amphibischen Operationen an amphibischen Zahlen, die man bei seinem älteren Zeitgenossen Levi ben Gerson beobachtet (vgl. S. 95), der erlösende Gedanke kommen konnte, die Sechzigerbrüche durch Zehnerbrüche zu ersetzen.

Die Einführung der Dezimalbrüche bei Bonfils und die Dezimalbruchrechnung von K. haben auf die Erfindung der Dezimalbrüche in der Neuzeit nicht unmittelbar eingewirkt. Insbesondere scheint K.'s Er-

rungenschaft auf diesem Gebiet ebenso wenig wie seine sonstigen Leistungen ins Abendland gedrungen zu sein. Im Morgenland hatte er keine ebenbürtigen Nachfolger, die sein Werk hätten weiterführen können. Das wäre nötig gewesen. Denn seine Erfindung der Dezimalbrüche war nur ein Anfang. Er führte sie ein, um den Halblaien, die die Sechzigerrechnung der Astronomen mit Gummalbuchstaben nicht beherrschten, neue Wege der Bruchrechnung, zunächst in der praktischen Ausrechnung von Kreisumfängen, aufzuweisen. Die astronomischen Rechnungen aber, insbesondere die trigonometrischen, führte er sexagesimal aus und schlug nicht vor, die trigonometrischen Tafeln mit dezimalen Funktionswerten anzulegen. Auch eine dezimale Unterteilung der Münzen, Maße und Gewichte hätte ins Auge gefaßt werden müssen, um den Dezimalbrüchen eine fruchtbare Anwendung zu geben.

Solche Umwälzungen vorzuschlagen oder gar in die Wege zu leiten, fehlte al-Kāšī, der späten Nachblüte der verdorrten Wissenschaft des islamischen Ostens, wohl der Weitblick oder Mut und Kraft. Etwa vierzig Jahre nach dem Erscheinen des „Schlüssel“, in den sechziger Jahren des 15. Jahrhunderts, berechnete der 1436 zu Königsberg in Franken geborene Johannes Müller, genannt Regiomontanus, trigonometrische Tafeln im Zehnergefüge, nämlich eine Tafel der Sonnendeklinationen, in der der Höchstbetrag dieser Werte, $\sin 23^{\circ}30'$, gleich 10000000 gesetzt war, und eine Tafel der Tangensfunktion mit $\operatorname{tg} 45^{\circ} = 100000$. Damit waren der Einführung der Dezimalbrüche in die astronomischen Rechnungen die Wege geebnet. Der Flame Simon Stevin war es, der 1585 vor allen anderen die Anpassung der Münzen, Maße und Gewichte an das Zehnergefüge forderte.

12. Anhang

Urtexte der aus Handschriften übersetzten Stellen

Abkürzungen

Kūšyār = Kūšyār b. Labbān, *في اصول حساب الهند*
Istanbul, *Aya Sofya* 4857,7⁴⁶⁾

Miftāḥ = al-Kāšī, *مفتاح الحساب*
J = Berlin, Inst. f. Gesch. d. Med. u. d. Nat. Nr. I. 2¹⁰⁾
L = Leiden Nr. 185 Gol.¹¹⁾
P = Paris Nr. 5020¹²⁾

Muḥiṭiyya = al-Kāšī, *الرسالة المحيطة*
Istanbul, Armeemuseum = Berlin, mss. simul. ar. 60¹³⁾

Nasawī = an-Nasawī, *المقنع في الحساب الهندي*
Leiden Nr. 556,6 Warn.¹⁷⁾

Sibṭ = Sibṭ al-Māridinī, *رقائق الحقائق في حساب الدرج والدقائق*
G = Gotha Nr. 1390¹⁸⁾
J = Berlin, Inst. f. Gesch. d. Med. u. d. Nat. Nr. II. 49¹⁹⁾

a) (S. 6—9) Miftāḥ L 1b 1—2b 7, P 1b 1—2b 18,
von 128,11 مايل ab J 1a 1—1b 7.

بسم الله الرحمن الرحيم
وتوفيقك نعتمد يا كريم
الحمد لله الذي توحد بأبداع الاحاد .: وتفرد بتأليف صنوف الاعداد .: والصلوة
5 على خير خلقه محمد اشفع الشافعين يوم التناد .: وعلى اله واولاده الهادين
سبيل النجاة والرشاد اما بعد فان احوج خلق الله تعالى الى رحمته وغفرانه
جشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي الملقب بغيث احسن الله احواله
يقول لما مارست الاعمال الحسابة والقوانين الهندسية حتى بلغت الى حقايقها
وبالغت في دقايقها وكشفت غوامضها ومعضلاتها وحللت مشكلاتها واستنبطت
10 كثيرا من القوانين والضوابط فيها واستخرجت ما صعب استخراج على كثير

5. fehlt P | 6. رحته و. fehlt L

من مباشريها كما استأنفت استخراج جميع جداول الزيج الإيلخاني بأدق عمل
 ووضعت الزيج المسمى بالخاقاني في تكميل الزيج الإيلخاني وجمعت فيه جميع ما
 استنبطت من أعمال المنجمين مما لا يأتي في زيج آخر مع البراهين الهندسية
 ووضعت أيضا زيج التسهيلات وجداول شتى وصنفت رسائل أخرى مثل الرسالة
 المسماة بسلم السماء في حل أشكال وقع للمتقدمين في الأبعاد والأجرام والرسالة⁵
 التي سميتها المحيطية في نسبة القطر إلى المحيط ورسالة الوتر والجيب في
 استخراجهما لثالث القوس المعلومة الوتر والجيب وذلك أيضا مما صعب على
 المتقدمين كما قال صاحب المجسطي فيه أن ليس إلى تحصيله سبيل واخترت الآلة
 المسماة بطبق المناطق وحررت في كيفية صنعها ومعرفتها كتاب تزهة الحدايق
 وهي آلة يحصل بها تقويم الكواكب وعروضها وأبعادها عن الأرض ورجوعها¹⁰
 والخسوف والكسوف وما يتعلق بها واستخرجت أجوبة مسائل كثيرة سألني
 عنها مهرة الحاسبين امتحانا أو تعلما وإن لم يحصل بعضها بالست الجبرية ظفرت
 في أثناء هذه الأعمال على ضوابط كثيرة يتأتى بها أعمال المقدمات الحسابية
 بأسهل وجه وأيسر طريق وأقل عمل وأكثر نفع وأبين وضع فرايت أن أدونها
 وأردت أن أيسرها ليكون تذكرة للأحباب وتبصرة لاولي الأبواب فحررت هذا¹⁵
 الكتاب وجمعت فيه جميع ما يحتاج إليه المحاسب محترزا عن إشباع ممل واختصار
 مغل ووضعت لأكثر الأعمال دستورا في الجدول ليسهل ضبطها على المهندسين
 وجميع الجداول الموضوعية في هذا الكتاب فخطبى أبو عذرة ومقتضب حلوله
 وممره الأسبعية جداول آ فيه حواصل ضروب ما دون العشرة في الشبكة في الضرب
 ح فيه أصول المنازل ٥ مثال اتحاد الخارج ٥ معرفة مراتب حاصل الضرب وخارج²⁰

بالست. 12. | P المحيط: المحيطية | fehlt L | التي سبقتها. 6. | P fehlt: جميع. 1.
 الجدول. 17. | J الباب: الأبواب | L تكون: يكون. 15. | P تأتي: يتأتى. 13. | P بالة
 fehlt P J: خارج. 20. | P الجداول

القسمه ر جدول الجيب ر معرفة جنسية حاصل الضرب والقسمه وجعلته برسم
خزانة كتب السلطان الاعظم الاعدل الاعلم الأكرم مالك رقاب الامم مولى
سلاطين العرب والعجم سلطان المشرقين خاقان الخاقين ملاذ اعظم السلاطين
ظل الله فى الارضين قهرمان الماء والطين آية الله فى العالمين باسط بساط الامن
5 والامان ناشر العدل والاحسان هادم مباني الجور والطغيان حافظ بلاد الله برا
وبحرنا ناصر عباد الله شرقا وغربا الذى يداره الفلك الدوار على مرامه وتنشق
الارض فى الهيحاء عن سهم حسامه المريد بالتأييدات السبحانية الموفق بالتوفيقات
الربانية الملهم بالالهامات الالهية المظفر على الاعداء بالعنايات الاحدية صاحب
النفس القدسية والكمالات الانسية والاخلاق الملكية والشم المحمدية ذى العدل
10 والشوكة والشهامة والشجاعة والسعادة والعز والتمكين المنصور بنصر خير
الناصرين السلطان بن السلطان بن السلطان مغيت الحق والدنيا والدين والسلطنة
الغ بيك كوركاز خلد الله تعالى فى الربيع المسكون خلافته وسلطانه واوضح
على العالمين بره واحسانه اللهم اجعل عين الكمال عن ساحة رفعته محجوبة
مكفوفة ويد الحوادث عن بساط سلطنته مبعدة مقصورة مامولا من حضرته ان
15 يجعله مقبولا ويصحح ما كان معلولا ويعفو زله ويسد خلله فاذا اتمته سميته
مفتاح الحساب واسأل الله ان يوفقنى للسداد ويهدينى سبيل الرشاد ملتصبا بمن
نظر فيه ان يعذرني ان ضعفت العبارة ولا يعيبنى ان وقعت العثرة فانى مقرر

النفس : 9. | PJ يدار, L يدور | verbessert aus : يداره. 6. | J fehlt : الاعلم. 2.
nur : بن السلطان | J الناظرين : 11. | L P fehlt : والسعادة. 10. | L نفس
| L P الفيك : الغ بيك. 12. | J P fehlt : والسلطنة | P fehlt : الحق و | J einmal
| J P يصح : يصح. 15. | J عن : من | L P مبعودة : مبعدة. 14. | J ملكه وسلطانه : الله
: اسأل vor و. 16. | J فلما : فاذا | L ظل am Rande : خلله | P يعفوا : يعفو
L المشاره am Rande : العثرة | J يعينى : يعينى. 17. | P الله تعالى : الله | J P fehlt

9 Luckey, Rechenkunst.

بالعجز والتقصير ومعترف بالاخلاق في التقرير والتحرير وجعلته مشتملا على
مقدمة وخمس مقالات

b) (S. 11) Miftāḥ J 30a 1—3

واعلم ان الاسطوانة والخروط قد يكونان مضلعين فقاعدتهما ذات اضلاع والسطح
المحيط بالاسطوانة مستطيلات وبالخروط مثلثات

c) (S. 11) Miftāḥ J 30a 12—14

ضلع الكرة هو ما احاط به نصفاً عظيمنتين وسطح كروي يكون نصف قطره
مساوياً لنصف قطر الدائرتين وهو يشبه اضلاع البطح

d) (S. 12) Miftāḥ J 29b 18—21

واذا افرز عن مخروط قائم معين مجسم يكون احد راسيه مركز قاعدة المخروط فاسمى¹⁰
المجسم الباقي بفضل المخروط وهو كمخروط ناقص افرز منه مخروط راسه مركز قاعدة
المخروط الاول وقاعدته السطح الاعلى للمخروط الاول

e) (S. 12) Miftāḥ J 29b 21—30a 1

واذا افرز عن معين مجسم اخر يكون راسا احدهما راسي الاخر فاسمى المجسم الباقي
بفضل المعين وهو كتركيب من مخروطين قائمين احدهما تام والاخر ناقص قاعدتهما¹⁶
واحدة افرز منه مخروط راسه راس المخروط التام وقاعدته السطح الاعلى من المخروط
الناقص

f) (S. 9—13) Miftāḥ L 2b 7—3b 18, P ٢b 18—٤a 11, J 1b 7—2b 23

Es bestehen keine für den Inhalt wesentlichen Abweichungen
20 von der Wiedergabe derselben Stelle durch Ahlwardt³⁾ (S. 342—344)
nach der Berliner arabischen Handschrift Nr. 5992 (Spr. 1824)

عن : Text 16. | مساوية : Text 8. | نظرها : Text 7. | ذوات : Text 4.

g) (S. 18) Miftāḥ L 5a 19—20, J 4a 19—20

ولان ليس للصفر نصف وضعنا تحته صفرا

h) (S. 18) Miftāḥ L 7a 8—9, J 6a 6—7

وضع صفرا لان ضرب الصفر في اى عدد يكون صفرا

i) (S. 42) Miftāḥ L 34a 14—18

5

ويجعل هذا في جانب الصعود يرفعون في محاسباتهم لكل ستين درجة او غيرها من الاعداد الصحاح بواحد يسمى بالمرفوع مرة ويرفعون لكل ستين من المرفوع مرة الى المرفوع مرتين وبعدها على الولاء وبالمرفوع ثلاث مرات ثم اربع مرات وهكذا وبعضهم يسمونها بالمرفوع والثاني والثالث والرابع الى ما لا نهاية له

k) (S. 54—55) Miftāḥ L 12a 7—12b 9

10

في استخراج الضلع الاول من المضلعات

كل عدد يضرب في نفسه ثم يضرب في الحاصل ثم يضرب في الحاصل الثاني ثم يضرب في الحاصل الثالث وهكذا الى ما لا نهاية له فذلك العدد الاول يسمى ضلعا او لا بالقياس الى كل واحد من تلك الحواصل وجذرا بالقياس الى الحاصل الاول اعني 15 حاصل ضرب العدد في نفسه وكعبا بالقياس الى الحاصل الثاني وتلك الحواصل تسمى مضلعات بالاسم العام ولكل مضلع اسم خاص كما ان الحاصل الاول يسمى مجذورا ومالا ومربعا والحاصل الثاني مكعبا وكعبا ايضا باسم الضلع كما قيل والاولى ان نقول ان الكعب اسم المضلع وقد يطلعونته على الضلع مجازا والحاصل الثالث مال مال والرابع مال كعب والخامس كعب كعب ثم مال مال كعب ثم مال كعب كعب ثم كعب 20 كعب كعب وهكذا تبدل لفظ كعب بمالين ثم تبدل احد المالين بكعب ثم تبدل المال الاخر بكعب ايضا وهكذا الى ما لا نهاية له ويكون الواحد وتلك الحواصل متناسبة

J او نضع : ونضع 4. | L ولانه : ولان 2.

على نسبة واحدة أى يكون نسبة الواحد الى الجذر كنسبة الجذر الى المال وكنسبة
المال الى الكعب وكنسبة الكعب الى مال المال وهكذا يكون جميعها متناسبة الى
ما لا نهاية له وهذا من جانب الصعود ومثل ذلك ينبغي ان يتصور من جانب
النزول اعنى جزء الجذر وجزء المال وجزء الكعب وجزء مال المال الى غير النهاية
وهي ايضا متناسبة على الولاء ونسبة كل واحد منها الى الواحد كنسبة الواحد⁵
الى سميهِ من جانب الصعود وظاهر ان الجذر في اول المنازل والمال في ثانيها والكعب
في ثالثها وهكذا الى ما لا نهاية له واذا اردنا معرفة عدد منزلة مضلع نأخذ لكل
مال اثنين ولكل كعب ثلاثة ونجمع جميعها يحصل عدد منزلته وان اردنا اسم المضلع
من عدد منزلته ننظر ان كان له ثلث صحيح نأخذ بعده ثلثه كعبا وتضيف بعضها
الى بعض يكون اسم ذلك المضلع وان لم يكن له ثلث صحيح نأخذ منه اثنين ونجعلهما¹⁰
مالا وبعده ثلث الباقي كما بان ان كان له ثلث صحيح والا نأخذ اثنين آخرين ونجعلهما
مالا اخر وبعده ثلث الباقي نكرر الكعاب وتقدم لفظ المال على الكعب يحصل اسم
المضلع

1) (S. 56) Miftāḥ J 48a 7—18

واما الثانى فقد ذكرنا فى الباب الخامس من المقالة الاولى ان لهذه الاجناس سلسلتان¹⁵
فى طرفى الصعود والنزول وابتداءهما من الواحد وجميعها متناسبة على الولاء وعدد
منزلة الواحد صفر وللشئ وجزء الشئ واحد وللمال وجزءه اثنان وللکعب وجزءه ثلثة
وللمال المال وجزءه اربعة وهكذا بالغنا ما بلغ وهنا يكون العدد فى حكم الواحد ولو
كان اكثر منه او اقل لان العدد كم كان هو كمية جنس الواحد كما ان خمسة اشياء
هى كمية الاشياء فاذا ضربنا جنسا من هذه الاجناس فى جنس اخر يكون الحاصل²⁰
من جنس يكون عدد منزلته بقدر مجموع عددى منزلة المضروبين ان كانا فى طرف

سلسلتين : Text hat : 15 | ضرب : Text hat : تضيف 0

واحد من سلسلتى الصعود والنزول والا بقدر فضل أحدهما على الآخر وهو فى طرف
المجموع أو الفضل وقد أوردنا جدولا فيه جنسية حواصل ضروب هذه الأجناس بعضها
فى بعض ويعرف منه جنسية خارج قسمة بعضها على بعض

m) (S. 57) Miftāḥ J 49a 1 v. n.—49b 4

5 إذا أردنا أن نقسم جنسا واحدا على جنس واحد نقسم كمية جنس المقسوم على كمية
جنس المقسوم عليه فما خرج هو عدد جنس خارج القسمة الذى يكون عدد منزلته
بقدر الفضل بين عددى منزلة المقسومين أن كانا فى طرف واحد أو بقدر مجموعهما أن
اختلفا وهو من طرف الصعود أن كانت مرتبة المقسوم فوق مرتبة المقسوم عليه والا
من طرف النزول

n) (S. 60) Miftāḥ L 40a 18—40b 5, J 8a 6 v. n.—8b 3 10

كل عدد مفرد يضرب فى نفسه ثم فى الحاصل ثم فى الحاصل الثانى وهكذا الى ما لا
نهاية له ويزاد عدد مرتبة ذلك المفرد على نفسه ثم على المجموع ثم على المجموع الثانى
وهكذا الى ما لا نهاية له فهذه الأعداد على التوالى هى أعداد مراتب تلك الحواصل
على التوالى كل لنظيره على ما سبق أن عدد مرتبة حاصل الضرب بقدر مجموع عددى
15 مرتبتى المضروبين أن كانا فى طرف واحد من الدرج ولا محالة يحصل هذه الأعداد
ايضا من ضرب عدد مرتبة ذلك المفرد فى عدد منزلة كل مضلع ومن هذا علم أن كل
مضلع من المضلعات يوجد فى المرتبة التى إذا قسم عددها على عدد منزلته لم يبق شيء
أى يعدّ عدد منزلته عددها أو يساويها أن كان لها عدد

o) (S. 62) Miftāḥ L 36a 6—15

20 وأما معرفة جنسية المراتب فكما أن نسبة الواحد الى أحد المضروبين كنسبة المضروب
الآخر الى حاصل الضرب يكون نسبة مرتبة الدرج الى مرتبة أحد المضروبين كنسبة

J عرفت : سبق | 14. fehlt J : هى | 13. fehlt J : له | 12. fehlt L : مفرد | 11.
الدرجة ; Text hat | 21. الدرج | 16. ضرب : ضرب | 15. محالة | 15.

مرتبة المضروب الاخر الى مرتبة حاصل الضرب لان المراتب كلها متوالية في النسبة فيكون بعد مرتبة احد المضروبين عن مرتبة الدرج كبعد مرتبة الحاصل من الضرب عن مرتبة المضروب الاخر فاذا اخذنا للدرج صفرا وللمرفوع المرة او الدقيقة واحدا وللعشاني والثانية اثنين وللعشالك والثالثة ثلاثة وعلى هذا القياس فهي ابعاد المراتب عن الدرج وسميت اعداد المراتب ثم اذا ضربنا مفردا في مفرد نجمع عددي مرتبتي 5 المضروبين ان كانا في احد طرفي الدرج فالجميع عدد مرتبة الحاصل في ذلك الطرف وناخذ الفضل بينهما ان اختلفا فهو عدد مرتبته في الطرف الذي له الفضل

p) (S. 66) Sibṭ G 1b 3—2a 5, J 27b 6—15

ليس في حساب الاعمال الفلكية احسن من طريق حساب النسبة الستينية وهي المستعملة في عصرنا هذا وتركوا طريقة الاقدمين لصعوبتها وكثرة اعمالها ولم اقف 10 على مقدمة شافية في هذا الفن غير مقدمة شيخنا الامام العلامة شهاب الدين احمد بن المجدي رحمه الله تعالى المسمى بكشف الحقائق في حساب الدرج والدقائق ولا اعرف في هذا الفن مصنفا قبلها وانما يوجد كلام قليل غير كاف في مقاصد هذا العلم لكنه رحمة الله عليه اطال فيها بالاشارة الى طريق الاقدمين من الفتوح والغبار واشباع القول في طريق النسبة مع ارادة الاختصار فحصل في عباراته صعوبة بحيث 15 لا يكاد بعضها يفهم الا بعد تأمل طويل

q) (S. 68) Sibṭ G 4b 10—12, J 29a 7—8

ويجب ان تعلم رتبة الدرج بعلامة ان كان معها مرفوع وان ضبط اسم اخر المراتب كان حسنا

20 r) (S. 70) Sibṭ G 4b 12—5a 2, J 29a 8—12

واما الاس فهو عند الحساب عبارة عن عدد مرتبة العدد وهنا عبارة عن بعد رتبة العدد عن الدرج سواء كان مرفوعا او منحطا فالدرج ليس لها اس والدقائق اسها

J عبارته : عباراته 15. | G رحمة : رحمة 12. | G هي : وهي 9. | fehlt صفرا 3. |
J عبارته : عباراته 22. | hat J eine an den Rand geschriebene Hinzufügung
21. | J عرفا مراتب : عدد مرتبة 21.

واحد وكذا المرفوع مرة والثواني اسها اثنان وكذا المرفوع مرتين وعلى هذا القياس

s) (S. 71) Sibṭ G 10a 10—12, J 31b 2—4

اس حاصل الضرب مجموع اسي المضروبين ان اتفقا جهة وفضليهما ان اختلفا في جهة
5 اكثرهما اس

t) (S. 71) Sibṭ G 15a 12—15b 2, J 33b 23—34a 1

ان اتفقا كما وجهة فلا اس للجواب وان اختلفا جهة فمجموعهما في جهة المقسوم
مطلقا وان اختلفا كما واتفقا جهة فالفضل في جهتهما ان كان للمقسوم والا خلافهما
ويرجع هذا كله الى ان بعد رتبة خارج القسمة عن الدرج كبعد المقسوم عليه عن
10 المقسوم

u) (S. 72) Sibṭ S 31a 2 v.u.—1 v.u., J 42b 5—6

فان تطابقا فالجمع صحيح والا فاعده

v) (S. 74) Kūšyār 263b 3—5

المقالة الاولى في استخراج الاصول بالسيط الظاهر المعروف والمقالة الثانية في
15 استخراجها بالمركب وهو بالجدول الملقب بجدول الستين

w) (S. 76) Kūšyār 266b 11—13

الحاصل من ضرب الدرج في الدرج والدرج في الكسور ذلك الكسور كالدرج
في الثواني ثواني

x) (S. 76) Kūšyār 266b 13—15

20 ومن الكسور في الكسور مجموع اللفظين كالدقائق في الثواني ثوالت لانه واحد
واثنين والثواني في الثواني روابع لانه اثنين واثنين

5. لـ : fehlt J | 12. فالجمع : durchstrichen und am Rand verbessert
in J فالجمع | 21. اثنين : alle drei mal so!

y) (S. 77.) Kūṣyār 268a 4—10

ومن قسمة الدرج على الكسور درج مرفوع بعدد المقسوم عليه كالدرج على
الثواني درج مرفوع مرتين والمرفوع اعنى ان الحاصل ينبغي ان يضرب في
ستين ثم ما بلغ في ستين فيكون حينئذ الحاصل من قسمة الدرج على الثواني او
يضرب في ستين اربع مرات فيكون الحاصل من قسمة الدرج على الروابع 5

z) (S. 77.) Kūṣyār 268b 9—12

ومن قسمة الكسر الاقل لفظا على الاكثر لفظا درج مرفوع بعدد ما بين لفظ
المقسوم والمقسوم عليه كالدقايق على الثوانى درج مرفوع مرتين

aa) (S. 78.) Kūṣyār 270b 3—8

لهذه الاصول الثلاثة التى هى الضرب والقسمة والجذر طريقة اخرى على سبيل 10
التركيب بجدول يعرف بجدول الستين يزيد ان نعملها في هذه المقالة لانها اذا
عملت سهل استعمال الكسور والاستقصاء في التدقيق بالاضافة الى ما تقدمه من
البسيط لا يلزمنا كلفة غير نقل الحروف من الجدول الى التخت

bb) (S. 81.) Nasawī 68b 10—12

وكان صنف بعضهم نوعا يتعلق بنوع واحد من المعاملات كابي حنيفة الدينورى 15
وكوشيار الجيلى فان كوشيار مع الاقتصار صنف للتنجيم دفتر ساير المعاملات واما
حنيفة صنف لسائر المعاملات دفتر التنجيم

cc) (S. 102.) Miftāḥ L 34a 19—34b2

فكما ان في الحساب بالارقام الهندية يرفع بكل عشرة الى اليسار فهنا يرفع بكل
ستين الى اليمين وكما ان هناك يسمى اول مراتب الصحاح بالاحاد فهنا يسمى 20
بالدرج باسم المكان وكما ان سلسلة المراتب هناك كانت واحدة فهنا سلسلتان
احدهما في جانب الصعود والاخرى في جانب النزول والدرج وسط بين السلسلتين

im Text الجيلى: الجيلى 16. | مرفوعة so anstatt : مرفوع 2. 3. 7. 8.

dd) (S. 102.) Miftāḥ L 34b 2—3

ونحن جعلناها هناك أيضا سلسلتين

ee) (S. 102.) Miftāḥ L 21a 3—8

والمنجمون استعملوا كسورا معطوفة على ان مخارجها المتوالية هي ستون ومضاعفاتها
 ٥ المتوالية الى حيث شاءوا وتركوا ما بعدها ويسمونها على التوالي بالدقائق والثواني
 والثالث والاربع وقس عليه ونحن اوردنا على قياس المنجمين كسورا يكون مخارجها
 المتوالية عشرة ومضاعفاتها المتوالية الى حيث شئنا ونسميها على التوالي بالاعشار
 وثاني الاعشار وثالث الاعشار وهلم جرا

ff) (S. 103—104.) Miftāḥ L 43a 1—43b 3, J 10b 1—11a 1* 10

في تحويل الارقام الستينية الى الهندية وبالعكس صحاحا وكسورا وتحويل كسورها
 الى مخرج اخر ومعرفة الكسور التي وضعناها على قياس الكسور الستينية ولنقدم
 هذا لما استخرجنا نسبة المحيط الى القطر في رسالتنا المسماة بالمحيطية وبلغنا
 الكسور الى التاسعة اردنا ان نحولها الى الرقوم الهندية لئلا يعجز المحاسب الذي
 15 لم يعرف حساب المنجمين اخذنا كسر المحيط من مخرج هو عشرة الاف مكررة
 خمس مرات وهذا عدد مجرد فكانا قسمنا الواحد الصحيح عشرة اقسام وقسمنا
 كل عشر عشرة اقسام ثم كل قسم منها عشرة اقسام هكذا بالغنا ما بلغ قسمنا
 الاقسام الاولى اعشارا لكونها كذلك والثانية ثاني الاعشار والثالثة ثالث الاعشار
 وهكذا بالغنا ما بلغ ليكون مراتب الكسور والصحاح على نسبة واحدة على قياس
 20 حساب المنجمين وسميناها بالكسور الاعشارية وينبغي ان تكتب الاعشار في
 بين الاحاد وثاني الاعشار في بين الاعشار وثالث الاعشار في بين ثانيها وهكذا

: الاعشارية 20. J والثاني : والثانية | J اعشار : اعشارا 18. | التوالى : Text ; التوالى 8.
 * Vgl. Textprobe zu J im Anhang J هكذا : وهكذا 21. | J L الاعشارية

الى حيث بلغ فيكون الصراح والكسور في سطر واحد والعمل به في الضرب
والقسمة واستخراج الضلع الاول من المضلعات وغيرها على قياس حساب المنجمين
كما اوردنا بعضها فيما سبق وكذا يكون معرفة جنسية المراتب على قياس معرفة
جنسية مراتب حسابهم اعنى يكون عدد مرتبة الاحاد صفرا وللعشرات والاعشار
واحدا والاسيات وثاني الاعشار اثنين وللآلوف وثالث الاعشار ثلاثة وللعشرات الالف 5
ورابع الاعشار اربعة وهلم جرا فمجموع عددى مرتبتى المضروبين ان كانا في
طرف واحد من الاحاد او التفاضل بينهما ان اختلفا فهو عدد مرتبة الحاصل
من طرف المجموع او من طرف الفاضل ويكون التفاضل بين عددى مرتبتى
المقسومين المفردين ان كانا في طرف واحد من الاحاد ومجموعهما ان اختلفا فهو عدد
مرتبة الخارج من القسمة من سلسلة الصعود ان كانت مرتبة المقسوم فوق مرتبة 10
المقسوم عليه والا من سلسلة النزول

gg) (S. 105.) Sibṭ G 4a 2—10, J 28b 16—22

فلكل مرتبة من المخطوطات نظيرة من المرفوعات والدرج بينهما كالواسطة فرتبة
الدرج كالاحاد والمرفوع مرة كالعشرات والمرفوع مرتين كالمئات وهكذا بالغاما
بلغ والدقائق كالاشار والثواني كاعشار الاعشار وعلى هذا القياس لكن في حساب 15
العدد نسبة كل عقد من كل مرتبة الى نظيره من المرتبة التى بعدها عشر وهنا سادس
عشر لان نهاية عقود كل مرتبة هناك تسعة وهنا تسعة وخمسون

L المضل : الفاضل 8. | J الفردن : المفردين 6. | J للميات : للبيات 5. | J مراتب : المراتب 3.
| J بالغ : بالغاما 14. | G كل عشرات : كالعشرات 14. | J المخطوطات : من المخطوطات 13.
| fehlt J : حساب العدد 10. — 15. | G كل اعشار : كاعشار | G كالاشار : كالاشار 15.
| J كل عقد : عقود كل مرتبة 17. | J من مراتب الاعداد الى الذى بعده : عقد ... بعدها 16.
G وهذا : وهنا 17.

hh) (S. 106—107.) Muḥiṭīya 20a 22—20b 11

في تحويل مقدار المحيط الى الرقوم الهندية على ان نصف القطر واحد ولما كان المحيط ستة امثال نصف القطر وكسر بلغناه الى التاسعة فاخذنا ذلك الكسر من مخرج هو عشرة الاف مكررة خمس مرات لان جزءاً واحداً منه لا يزيد على تاسعة 5 واحدة بنصف عشرة ولسهولة العمل به ايضاً وضعنا مضروبه في كل واحد من الرقوم التسعة في الجدول والجدول هذا

جدول تضاعيف نسبة المحيط والقطر

.....

واعلم ان الاثنين اللذين في اخر مراتب الكسور هما بمنزلة الدقايق للسته 10 الصحاح على ان عشرة دقايق تكون واحداً صحيحاً وان شئنا نسمى هذه المرتبة بالاعشار والثمانية التي عن يمينها بمنزلة الثواني ونسميها بثاني الاعشار والثلاثة بعدها بمنزلة الثوالت ونسميها بثالث الاعشار وعلى هذا بقياس حساب النجوم ولهذا اخذنا من مخرج مفرد وهو واحد وهذا الطريق في الحساب الهندى بما استنبطناه وكذا وضعه في الجدول

ii) (S. 107.) Muḥiṭīya 18b 1

15

وَيَوْ نَطَّ كَحْ أَلْدَنَا مَوْ فَيَدْنُ مَحِيْطُ حَيْثُ نَصْفُ الْقَطْرِ سَيْنُ

kk) (S. 108.) Muḥiṭīya 20b 13—14

وَبَحْجَا حَهْجَ صَزَّ أَرْ طَهْ حَوْهْ ' مَحِيْطُ لِقَطْرِ هُوَ اِثْنَانُ مِنْهُ

ll) (S. 108.) Muḥiṭīya 20b 14—15

شش و دو هشت و سه يك هشت و پنج و سه صفري

20

ب هفت و يك را هفت و نه پنج و هفت و شش پنج است

5. streiche ich. | لسهل العمل به | im Text | واحدة : واحد | im Text | ووضنا : وضعنا .
10. im Text | يكون 21. : fehlt

mm) (S. 109—110.) Muḥīṭiyya 19b 1—4

والاسهل ان يُحذف بعض المراتب من اواخرها ويبقى ما لم يقدح في مقدار زريد
ان لا يهمل مثلاً ان كان المقياس فرسخاً وزيد ان لا يهمل اصبعاً في الحاصل
والاصبع ثلثة ارباع ثالثة من فرسخ وقريب ثلث خامس الاشارة منه فاذا حسبنا
الرابع او سادس الاشارة واسقطنا ما بعدها يحصل المطلوب وان كان الدائرة ٥

١	٣	٣	٨	٢	٦	٥
٢	٦	٦	٨	٢	١	
٧	٨	٩	٣	١٤		
٨	١٤	١	٣			
٥	١	١	١	٥	٨	٥
الكسور			الصحاح			

صغيرة مثلاً كان نصف قطرها مائة
وسبعة وعشرين ذراعاً يكتفى ان
نعمل فيه هكذا فحصل ثمانية
ذراع وذراع واحد وعشر ذراع وهو
مقدار المحيط

nn) (S. 111.) Miftāḥ J 22b 8—11

اخذنا نصف ذراع الذي مع عشرين ذراعاً ضلع واحد من مخرج العشرة فكانت خمسة

كسور	صحاح
٢٨	١٤٢٥

ربعمائة صار

كسور	صحاح
٨	٢٥

وضعناها على عشرين هكذا

كسور	صحاح
٨٣١٥٧٩	١٥٩١

حصل هذا

كسور	صحاح
٨٣١٥٧٩	٢

ضربناه في هذا العدد

oo) (S. 112.) Miftāḥ L 44b 10—13, J 12a 18—21

كتبنا الارقام . . . على الولا صار هكذا ١٢٩٣ ١٢٩٣ وهو المطلوب واين مراتبه
سادس الاشارة

6. In dem Schema sind die Ziffern der ersten Spalte von rechts und die
Worte der untersten Zeile rot geschrieben. 12. ذراعان : عشرين ذراعاً |
13—14. Die Schemata stehen in der Handschrift an falschen Stellen.
Die Überschriften sind mit Ausnahme des vorletzten صحاح rot ge-
schrieben. 14. Vgl. Übersetzung S. 111 | 16. الط : المطلوب

pp) (S. 112—113.) Miftāḥ L 27b 17—28a 12

وان كان كل واحد من مخرجي المضروبين عدداً مجرداً كعشرة او مائة او الف فالاسهل ان نضع في كليهما الصحاح على يسار الكسر في سطر واحد ليكون الكسر كسر الاعشارى ويصير المجموع كعدد صحيح ثم نضرب المضروب في المضروب⁵ فيه بطريق ضرب الصحاح فما حصل فان اردنا نفرد عن يمينه ارقاماً بعدة مجموع الاصفار التى تكون مع المخرجين وذلك هو كسر حاصل الضرب من مخرج هو عدد مجرد يكون اصفاره بعدة مجموع الاصفار المذكورة والارقام الباقية من الحاصل هى صحاح الحاصل وان اردنا نعبر عن ذلك الكسر انه كذا اعشار او كذا ثانى الاعشار وثالثه على قياس حساب المنجمين مثاله اردنا ان نضرب اربعة عشر وثلاثة اعشار¹⁰ فى خمسة وعشرين وسبعة اجزاء من مائة وضعناهما فى الشبكة ونميز ما بين الاعداد الصحاح والكسور باللون هكذا

	٢	٥	٧	
١	٢	٥	٧	
٢	٤	١٠	١٤	
٥	١٠	٢٥	٣٥	
٧	١٤	٣٥	٤٩	
	٢	٥	٧	

ولما كانت الاصفار التى مع المخرجين ثلاثة اخذنا من يمين الحاصل ثلاثة ارقام الكسر والارقام الباقية هى الصحاح فان شئنا وضعناهما مع

مخرج مجرد يكون معه ثلاثة اصفار هكذا $\frac{2}{1000}$ وان اردنا وضعناهما كما وضع تحت الشبكة فى سطر واحد وعبرنا عنه بانه $\frac{2}{1000}$ صحاحاً و $\frac{2}{1000}$ ثالث الاعشار

qq) (S. 114.) Miftāḥ L 30a 4—5

وان اردنا نعبر عنه بانه اربعة من ثانى الاعشار على قياس حساب المنجمين

8. ميز : Text : تميز. 10. ان : nach اردنا am Rande | الصحاح : Text : صحاح.

11. Farben in der Kopie nicht erkennbar.

rr) (S. 115.) Miftāḥ L 43 b 3—8, J 11 a 2—4

ب م م
١ ٢ ٠
٣ ٦
١ ٦ ٦
٩ ٩ ٦
٣ ٠
١ ٠ ٠ ٠ ٠

نضرب ما في اعلی المراتب في ستين بالرقوم الهندية وتزيد على
الحاصل ما في المرتبة التي تليها ونضرب المجموع في ستين وتزيد
عليه ما في المرتبة التي تليها وهكذا الى ان تنتهي الى مرتبة الدرج

ss.) (S. 115—116.) Miftāḥ L 43 b 6—10, J 11 a 5—9

ب م م م م م
١ ٥ ٥ ٥ ٥ ٥
١
٢
١
١

ناخذ احاد ما في مرتبة الدرج فهو احاد المطلوب وان لم
يكن في تلك المرتبة احاد فنضع صفرا مكان الاحاد ثم نقسم
الباقى على عشرة في جدول الستين فما خرج ناخذ من الدرج
احادها ونضع مكان العشرات ثم نقسم الباقى على عشرة
في جدول الستين فما خرج ناخذ منه احاد الدرج ونضع مكان المئات وقس عليه

tt) (S. 116.) Miftāḥ L 43 b 12—13, J 11 a 12—15

١ ٠ ٠ ٠ ٠
٢
٢ ٠ م
١٥ ٢ م
ب م م م

نضرب ما في اعلی المراتب في عشرة بجدول الستين ليحصل
بالرقوم الستينية وتزيد على الحاصل ما في المرتبة التي تليها
ونضرب المجموع في عشرة بجدول الستين وتزيد على الحاصل
ما في المرتبة التي تليها وهكذا الى ان ينتهي الى الاحاد
يحصل المطلوب

uu) (S. 121.) Kūšyār 278 b 9—12

ومن تدقيق الكعب ان تنتقل المال الى الكسور التي لها كعب وهي الثوالت
والسوادس والتواسع وعلى هذا النسق ثم نستخرج كعبه

1. rot : ب م م | 8. الط : المطلوب | 9. عشرة : عشرة | 10. J hat : ١ ٠ ٠ ٠ ٠
11. هذا الحاصل : الحاصل | 12. هذا الحاصل : الحاصل | 13. L من : fehlt J : منه | 14. هذا الحاصل : الحاصل | 15. L : الط : المطلوب | 16. J : fehlt J : [الاحاد الى 15.

ABHANDLUNGEN DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften
Jahrgang 1950 Nr. 6

DER LEHRBRIEF ÜBER DEN KREISUMFANG

(AR-RISĀLA AL-MUHĪTIYA)

VON

ĠAM ŠĪD B. MAS'ŪD AL-KĀŠĪ

ÜBERSETZT UND ERLÄUTERT

VON

P. LUCKEY†

HERAUSGEGEBEN VON A. SIGGEL, MAINZ

1953

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

227

Inhalt

	Seite
Vorwort des Herausgebers	V
Vorwort des Verfassers	VII
Abkürzungen und Bezeichnungen	VIII
I. ÜBERSETZUNG DES LEHRBRIEFS ÜBER DEN KREISUMFANG	
Einleitung	3
1. Abschnitt. Bestimmung der Sehne eines Bogens, der die Summe eines Bogens von bekannter Sehne und der Hälfte seiner Ergänzung zum Halbkreis ist	4
2. Abschnitt. Bestimmung des Umfangs irgendeines dem Kreise einbeschriebenen Vielecks und des Umfangs des diesem ähnlichen umbeschriebenen Vielecks	5
3. Abschnitt. In wieviel Teilen wir den Umfang teilen und bis zu welcher (Sexagesimal)stelle wir bei der Rechnung die Genauigkeit treiben, um den Umfang derart herauszubekommen, daß es bei einem Kreis von der angegebenen Größe nicht ein Haar ausmacht	6
4. Abschnitt. Die Berechnungen	8
5. Abschnitt. Bestimmung einer einzigen Seite des Vielecks, dessen Seiten(zahl) im Kreise 1 2 5 16 12 48 beträgt	16
6. Abschnitt. Bestimmung der Umfänge des dem Kreise einbeschriebenen und des ihm umbeschriebenen Vielecks, die einander ähnlich sind, und deren jedes 800 335 168 Seiten hat	17
7. Abschnitt. Was die Vernachlässigung der überschießenden und mangelhaften Brüche bei der letzten Stelle der vorhergehenden Berechnungen ausmacht	20
8. Abschnitt. Verwandlung des Betrages des Umfangs in die indischen Ziffern unter der Voraussetzung, daß die Hälfte des Durchmessers eins ist	21
9. Abschnitt. Art des Rechnens mit den beiden Tafeln	22
10. Abschnitt. Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem, was bei den Leuten (der Wissenschaft) verbreitet und gebräuchlich ist, und dem, was wir erhalten haben	26
Schluß. Nachweis der Fehler von Abul-Wafā' und Abur-Raiḥān (al-Bīrūnī)	27
II. ERLÄUTERUNGEN	
Bemerkungen über die Handschrift, den Text und die Übersetzung	35
Die vorkommenden Längenmaße und astronomischen Entfernungen	38
Messung von Bögen und Sehnen. Trigonometrische Funktionen	39
Zur Einleitung	40
Zum ersten Abschnitt	47
Zum zweiten Abschnitt	50
Zum dritten Abschnitt	54
Zum vierten und fünften Abschnitt	59
Zum sechsten Abschnitt	64
Zum siebenten Abschnitt	66
Zum achten bis zehnten Abschnitt	67
Zum Schlußabschnitt	68
III. DER ARABISCHE TEXT	

Vorwort des Herausgebers

Die Arbeit Dr. LUCKEYS zum „Lehrbrief über den Kreisumfang“ des Ġiyāṭ ad-Dīn al-Kāšī war schon im Mai 1949 von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin für die Abhandlungen angenommen worden. Die ersten Besprechungen zwischen ihm und mir über die Ausführung der Arbeit im einzelnen hatten stattgefunden, als Ende Juli 1949 die Nachricht von seinem Tode eintraf. So blieb mir wie bei seiner Arbeit über den „Schlüssel des Rechnens“ von al-Kāšī die Aufgabe vorbehalten, die Herausgabe zu besorgen. Unerledigt geblieben war die Frage, ob und wie der arabische Text herausgegeben werden könne. Herr Dr. LUCKEY hatte keine Textausgabe beabsichtigt. Die Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin jedoch legte großen Wert darauf, entweder eine Photokopie der benutzten Handschrift oder eine nach dem vorliegenden Text emendierte Ausgabe beizugeben. Das Istanbuler Original stand nicht mehr zur Verfügung. Die Wiedergabe der in Berlin aufbewahrten Photokopien war so wenig scharf, daß sie sich drucktechnisch nicht verwerten ließ. So blieb mir nichts anderes übrig, als die von Dr. LUCKEY für seine Arbeit angefertigte, sehr sorgfältige Abschrift einer Textausgabe zugrunde zu legen und die Photokopien mit heranzuziehen.

Wie bei der Herausgabe der LUCKEYSchen Arbeit über den „Schlüssel des Rechnens“ des al-Kāšī, die inzwischen seitens der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft veröffentlicht ist, wird in Rücksicht darauf, daß der Verfasser nicht mehr gefragt werden kann, auf Änderungen möglichst verzichtet. Die Anlage, die der Verfasser der Arbeit gegeben hat, weicht von der bei der Herausgabe von orientalischen Handschriften üblichen ab; daher möchte ich einige dieser Besonderheiten beschreiben und die Zusätze angeben, die ich vornehmen mußte.

Der arabische Text folgt hinter dem Abschnitt „Erläuterungen“. Er bietet nicht sämtliche Stücke der Originalhandschrift, sondern nur die Teile, die von Dr. LUCKEY übersetzt sind. Auf die zahlreichen arabischen Tafeln, welche die Zwischenrechnungen enthalten, konnte verzichtet werden aus denselben Gründen, aus denen heraus Dr. LUCKEY auch innerhalb der Übersetzung nur eine Übersicht der Ergebnisse dieser Tafeln gebracht hat. Die Arbeit beginnt also, wie es Dr. LUCKEY vorgesehen hatte, mit der „Übersetzung des Lehrbriefs über den Kreisumfang“, während die „Bemerkungen über die Handschrift, den Text und die Übersetzung“, die der Orientalist meist an erster Stelle sucht, als erster Abschnitt unter II, „Erläuterungen“, zu finden sind. Die Signatur der Originalhandschrift im Armeemuseum zu Istanbul wurde von mir zugesetzt.

Um das Aufsuchen der mathematischen Tafeln und der Figuren zu erleichtern, bin ich von dem Verfahren Dr. LUCKEYS, jedesmal auf die betreffende Seite zu verweisen, abgegangen und habe statt dessen in der Rubrik „Abkürzungen und Bezeichnungen“ besondere Zusammenstellungen über die Unterbringung der Tafeln und der Figuren gegeben.

Bei Verweisungen auf Ziffern in den Tafeln habe ich für die wagerechten Rubriken der Tafeln den Ausdruck „Reihe“ gewählt; die Reihe wird innerhalb der Tafel gezählt.

Aus drucktechnischen Gründen konnten leider die Ziffern 0 und 5 in den dezimalen Tafeln nicht in der Form wiedergegeben werden, wie sie sich bei al-Kāšī vorfinden. Das

Original gibt die 0 ähnlich unserer 0 wieder und die 5 mit dem Zeichen $\oint$. Vorliegende Arbeit wählt dafür die heutzutage im Orient üblichen Zeichen für 0 und 5. Außerordentlich bedauerlich ist es, daß sich nach den vorhandenen Photokopien keine Probeseite anfertigen ließ, die hätte beigegeben werden können.

Die von Dr. LUCKEY gewählten Termini *technici* deutscher Sprache für die arabischen mathematischen Fachausdrücke habe ich nicht geändert, obwohl sie bisweilen nicht schön sind. Dazu gehört in erster Linie die wörtliche Übersetzung von *marfū* mit „Erhöhtes“, da dies Wort sich ohne Bedenken einwandfrei mit „Potenz“ hätte wiedergeben lassen. Klassische Philologen werden sicher auch an einigen Bildungen für die Brüche im Sexagesimalsystem Anstoß nehmen.

Das große Verdienst, das sich Dr. LUCKEY mit der Arbeit erworben hat, läßt sich zum Teil schon aus dem Vorwort erkennen, das gleichzeitig eine Gesamtübersicht über die Stellung al-Kāšī in der Geschichte der islamischen Mathematik gibt. Eindringlicher wird es klar beim näheren Studium seiner Arbeit. Dabei sehen wir, daß die islamische Mathematik des ersten Viertels des XV. Jahrhunderts in der geschickten Behandlung arithmetischer Probleme dem damaligen Abendlande noch weit voraus war, obwohl die Blüte der islamischen Kultur ihren Höhepunkt längst überschritten hatte. Die Berechnung der Transzendenten π durch al-Kāšī ist bezüglich der Zahl der Stellen erst ein Jahrhundert später durch LUDOLF VAN CEULEN übertroffen worden, nicht aber in der Methodik der Berechnung, die bis heute als originell angesprochen werden muß.

Dr. LUCKEYs letzte Arbeiten zeigen, welchen Verlust die Forschung auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik, besonders der des islamischen Mittelalters erlitten hat.

Bei der Herausgabe der Arbeit hatte ich wertvolle Hilfe von Herrn Prof. Dr. R. HARTMANN, Berlin und von Herrn Dr. GIESECKE, Berlin, bei der Korrektur; letzterer hat auch die Tafeln 3b und 4a des arabischen Textes ausgeschrieben. Ihnen spreche ich hiermit meinen besten Dank aus.

A. Siggel, Mainz

Vorwort des Verfassers

Die Muḥīṭīya, d. i. der Lehrbrief über den Kreisumfang von al-Kāšī zeigt uns einen Meister der Sexagesimalrechnung bei der Arbeit. Seine anschaulichen Darlegungen, die an Archimedes, an eine dem Abul-Wafā' (940—998?) zugeschriebene Kreisberechnung und an al-Bīrūnī (973—1048) anknüpfen, münden in disziplinierte und übersichtliche Rechnungen ein, durch die der Verfasser mit Hilfe eines ein- und eines umbeschriebenen regelmäßigen Vielecks von je $3 \cdot 2^a = 800\,335\,168$ Seiten das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser weit genauer als seine Vorgänger bestimmt. Die Ausführungsformen seiner sexagesimalen Rechnungen, seine Rechenkontrollen und seine Fehlerabschätzungen zeigen uns, was auf dem Gebiet des Zahlenrechnens erreicht war, und woran es noch fehlte.

Al-Kāšī findet als Näherungswert von 2π die in allen angegebenen Stellen richtige Sexagesimalzahl 6.16 59 28 1 34 51 46 14 50. Um dieses Ergebnis auch für Leute nutzbar zu machen, die nicht, wie die Astronomen seiner Zeit, mit Sechzigerzahlen umgehen konnten, kommt er auf den für seine Zeit erfinderischen Gedanken, diese Sechzigerzahl in eine Dezimalzahl zu verwandeln. Er gibt Anleitungen, mit dem erhaltenen richtigen Wert $2\pi \approx 6.28318\,53071\,795865$ zu gegebenen Halbmessern die Umfänge und zu gegebenen Umfängen die Halbmesser zu berechnen und erweist sich hierbei nach unseren bisherigen Kenntnissen als der erste unter den Erfindern der Dezimalbrüche, der Vorschriften zu deren Schreibung und zum praktischen Rechnen mit ihnen gab.

Hinsichtlich der Person und der sonstigen Werke von Čamšīd b. Mas'ūd b. Maḥmūd al-Kāšī (oder al-Kāšānī), zubenannt Čiyāṭ(uddīn), der im ersten Drittel des 15. Jahrhunderts in Samarqand wirkte, verweise ich auf meine Schrift „Die Rechenkunst bei Čamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī, mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens“ (Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes XXXI, 1, Wiesbaden 1950). Al-Kāšīs Methoden und Fachausdrücke des Rechnens im Sechziger- und im Zehnersystem, die ich in der genannten Arbeit behandelt habe, setze ich beim Leser als bekannt voraus. Ich zog zu jener Darstellung neben al-Kāšīs Hauptwerk über das Rechnen, dem 1427 erschienenen „Schlüssel des Rechnens“, auch schon die Muḥīṭīya heran, die der Autor vor dem „Schlüssel“ verfaßte und in diesem Lehrbuch wiederholt anführt.

Die im Istanbuler Armeemuseum [Nr. 756] befindliche Handschrift des Lehrbriefs, die ich allein benutzen konnte, ist trotz einiger Mängel so gut, daß über den mathematischen Inhalt kaum an irgendeiner Stelle eine Unklarheit besteht. Auch die umfangreichen Zahlenrechnungen enthalten verhältnismäßig sehr wenige Abschreibefehler. Eine Textausgabe herzustellen wird sich erst empfehlen, wenn die in Teheran und Meschhed befindlichen Handschriften des Werks zugänglich werden.

Die Seiten 3b bis 17a der Handschrift enthalten tafelförmig ausgeführte Sexagesimalrechnungen. Jede dieser 28 Tafeln bringt eine Quadratwurzelausziehung samt der durch Quadrierung des Ergebnisses vollzogenen Probe. Wegen der Gleichartigkeit dieser umfangreichen Tafelrechnungen übersetze ich nur die erste, zweite, fünfzehnte und achtundzwanzigste Tafel. Um aber den Zusammenhang zu wahren, teile ich von allen diesen Tafeln die Überschriften und die Ergebnisse mit.

In dem Bemühen, auch dem Fernerstehenden die islamische Mathematik nahe zu bringen und die Ausführungen al-Kāšīs von verschiedenen Seiten zu beleuchten, gestaltete ich die Erläuterungen ausführlich.

Abkürzungen und Bezeichnungen

K. = al-Kāšī

Hs = Handschrift

3a (am Rande der Übersetzung) = Beginn von Blatt 3a der Hs

18a10 = Blatt 18a, Zeile 10 der Hs

In eckige Klammern [] sind die Übersetzungen von Wörtern eingeschlossen, die in der Hs vermutlich infolge eines Irrtums ausgefallen sind, ferner kleine Ergänzungen zur Verdeutlichung.

Winklige Klammern < > schließen die Übersetzung von Worten ein, die in der Hs vermutlich zu streichen sind.

Runde Klammern () enthalten kurze Erläuterungen des Übersetzers.

Die kursiven Ziffern 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 in der Übersetzung entsprechen den „indischen“ Ziffern ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ der Hs.

Die Buchstaben *a b g d h w z h i k l* der Figuren sind die Übersetzungen der Zeichen ا ب گ د ه و ز ح ط ک ل der Hs. (Die letzteren entsprechen den griechischen Buchstaben $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \kappa \lambda$.)

In einem Kreise mit dem Durchmesser $d = 2r$ ist für einen Bogen a mit dem Zentriwinkel α

der Sinus

$$\sin a = r \sin \alpha,$$

die Sehne

$$\text{Chord } a = 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Tafeln

	Seite		Seite
3a	7	18b	19
3b	12	19a	23/24
4a	13	19b	25/26
10b	14	20a	21
17a	15	20b	22
17b	16	21a	26/27
18a	17/18	21b	29
		22a	30/31

Figuren

	Seite
1a u. 1b	4
2	5
3	27
4	44
5	51

I.
ÜBERSETZUNG
DES
LEHRBRIEFS ÜBER DEN KREISUMFANG

Lob sei Gott, der da weiß das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang, der da kennt ^{1b} die Größe alles Zusammengesetzten und Einfachen, dem Schöpfer der Erde und der Himmel, dem Erschaffer des Lichtes in den Finsternissen! Segen und Heil über Muḥammad, den Ausgewählten, den Mittelpunkt des Kreises der Prophetie und den Umfang der Durchmesser der rechten Leitung und des Rechts, und über seine Familie, die Guten, und seine Genossen, die Reinen!

Zur Sache: Es spricht das Geschöpf Gottes, des Erhabenen, das am meisten seiner Ver- ³ zehnung bedarf, Ġamāsīd b. Mas'ūd b. Maḥmūd, der Arzt, al-Kāšūnī, zubenannt Ġiyāt, — möge Gott ihm sein Schicksal verschönern! —:

Archimedes bewies, daß der Umfang das Dreifache des Durchmessers um weniger ⁴ als ein Siebentel und um mehr als zehn Einundsiebzigstel des Durchmessers übertrifft. Die Spanne zwischen diesen beiden [Brüchen] ist also ein Vierhundertsiebenundneunzigstel. Mit- hin ist bei einem Kreise, dessen Durchmesser vierhundertsiebenundneunzig Ellen oder Ruten oder Farsang beträgt, die Größe seines Umfangs unbekannt und unsicher innerhalb einer Elle oder einer Rute oder eines Farsang, und bei dem größten Kreis, der auf der Erdkugel liegt, ist sie unbekannt innerhalb fünf Farsang, weil sein Durchmesser annähernd das Fünf- fache jenes Betrages in Farsang ist. Beim Gürtel des Tierkreises (der Ekliptik) ist sie un- bekannt innerhalb von weit mehr als hunderttausend Farsang. Diese Beträge sind [schon] bei den Umfängen übermäßig groß, und wie wird es [erst] beim Flächeninhalt sein! Er (Archimedes) bestimmte nämlich den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen Sechsun- neunzigsecks, der kleiner als der Umfang dieses Kreises ist, weil jede seiner Seiten kleiner als der Bogen ist, dessen Sehne sie ist, so daß alle Seiten zusammen kleiner als der ihm umbeschriebene Umfang sind; ferner [bestimmte er] den Umfang eines anderen, dem Kreis umbeschriebenen Vielecks, das dem ersten ähnlich ist, und bewies im ersten Lehrsatz des ersten Buchs seiner Schrift, daß er größer als der Umfang jenes Kreises ist, wobei die Spanne zwischen beiden [Vielecksumfängen] das ist, was [oben] angegeben wurde.

Abul-Wafā' al-Būzāḡānī erhielt durch eine Näherungsrechnung die Sehne eines halben ¹² Dreihundertsechzigstels des Umfangs (Chord $\frac{1}{2}$) in den Teilen, in denen der Durchmesser 120 beträgt, und vervielfachte dies mit siebenhundertzwanzig. [So] erhielt er den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen Vielecks. Er ermittelte ferner den Umfang des ihm (dem Kreise) umbeschriebenen Vielecks, das ihm (dem einbeschriebenen) ähnlich ist, und behauptete: Ist der Durchmesser hundertzwanzig, so ist der Umfang 376 und ein Bruch, der größer ¹⁵ als 59 10 59 Terzen und kleiner als 59 23 54 12 Quarten ist. Die Spanne zwischen beiden Beträgen ist 12 55 12 Quarten. Das ist für den größten auf der Erde liegenden Kreis an- nähernd tausend Ellen. Dabei beging er bei der Größe der Sehne der Hälfte eines Teils (Chord $\frac{1}{2}$) einen Fehler, weil er sie zu 0 31 24 55 54 55 ansetzte. Das ist nicht richtig. Das Richtige ist 0 31 24 56 58 36, wofür wir den Nachweis beibringen werden.

Abur-Raiḡān al-Birūnī berechnete die Sehne von zwei Dreihundertsechzigsteln des Umfangs (Chord 2°). Er erhielt den Umfang des dem Kreise einbeschriebenen Einhundert- achtzigsecks zu 6 16 59 10 48 0 und den Umfang des ihm ähnlichen umbeschriebenen zu 6 17 1 58 19 6, nahm die Hälfte der Summe von beiden [Umfängen] als Umfang des Kreises und verwandelte ihn aus dem Nenner des Bruches der [Sexagesimal]ziffern unter der An- ^{1•}

²⁰ nehme, daß der Durchmesser eins ist, in indische Ziffern. Das macht bei einem Kreise, der gleich dem größten auf der Erde liegenden Kreise ist, annähernd einen Farsang aus. Dabei beging er bei der Sehne von zwei Teilen (Chord 2°) einen Fehler, weil er sie zu 2 5 39 43 36 in Rechnung zog, während es 2 5 39 26 22 sein muß. Dagegen setzte er in der Sinustafel in seinem Mas'ûdî'schen Kanon den Sinus von einem Teil, der die Hälfte der Sehne von zwei Teilen ist ($\sin 1^\circ = \frac{1}{2} \text{ Chord } 2^\circ$), zu 1 2 49 43 an, was richtig ist, während er bei dem Doppelten hiervon einen Fehler beging.

²² Da diese Rechnungen irrig sind, wollen wir den Umfang des Kreises in den Teilen, in denen der Durchmesser bekannt ist, soweit ermitteln, daß wir sicher wissen, daß in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich sechshunderttausend mal dem Durchmesser der Erde ist, die Spanne zwischen ihm (dem ermittelten Umfang) und dem wahren nicht ein einziges Haar ausmacht, das ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns ist, so daß sie ^{2a} (die Spanne) bei einem [Kreise], der kleiner als jener ist, nichts ausmacht.

¹ So faßte ich denn diesen Lehrbrief ab, der die Ermittlung hiervon enthält. Ich nenne ihn den „Lehrbrief über den Umfang“ und biete ihn in zehn Abschnitten und einem Schluß dar, wobei ich Gott den Allmächtigen und Freiebigigen um seine Hilfe bitte. Er ist der, der zum Weg des Richtigen leitet.

2

Erster Abschnitt

Bestimmung der Sehne eines Bogens, der die Summe eines Bogens von bekannter Sehne und der Hälfte seiner Ergänzung zum Halbkreis ist

Ich behaupte: Die Fläche (d. h. das Rechteck, das Produkt) der Summe des Durchmessers und der Sehne jedes Bogens, der kleiner als die Hälfte des Umfangs ist, mit der Hälfte des Durchmessers ist gleich dem Quadrat der Sehne eines Bogens, der gleich der Summe des ersten Bogens und der Hälfte seiner Ergänzung zum Halbkreis ist.

⁵ Zum Beweise zeichnen wir über der Linie ab den Halbkreis agb mit dem Mittelpunkt h , ziehen beliebig die Sehne ag , hielten seine (d. h. des Bogens ag) Ergänzung bg zum Halbkreis im Punkte d und ziehen ad .

⁶ Dann [lautet] die Behauptung: Die Fläche der Hälfte des Durchmessers mit der Summe von ab und ag ist gleich dem Quadrat von ad . (Hierzu vgl. Fig. 1 a und 1 b.)

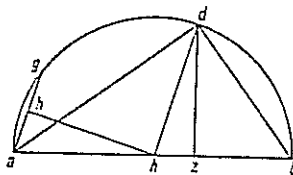


Fig. 1 a

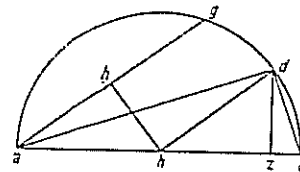


Fig. 1 b

⁷ Beweis: Wir ziehen bd . Dann ist der Winkel adb ein rechter nach dem dreißigsten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente. Hierauf fällen wir vom Punkte d das Lot dz auf die Linie ab . Dann entstehen die beiden Dreiecke dbz und daz , die dem Dreieck adb ähnlich sind nach dem achten Lehrsatz des sechsten [Buchs] der Elemente. Also ist das Verhältnis des Durchmessers ab zu ad gleich dem Verhältnis von ad zu az . Nach dem neunzehnten

Lehrsatz des siebenten [Buchs] der Elemente ist also die Fläche aus dem Durchmesser ab mit az gleich dem Quadrat von ad . Hierauf fällen wir vom Punkte h das Lot hh auf ag . Dann ist der Punkt h die Mitte von ag nach dem dritten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente. Wir ziehen hd . Weil nun der Umfangswinkel bag vom Betrage der Hälfte des Bogens gb ist, die der Betrag des Winkels bhd ist, so sind die beiden Winkel [hah und dhz] einander gleich; also sind die beiden Dreiecke ahh und hzd einander gleich, da die beiden Winkel h und z rechte und die beiden Winkel h und a , sowie die beiden Seiten ah und hd einander gleich sind. Also ist die Seite hz gleich der Seite ah , die die Hälfte von ag ist, und es ist die Fläche von az , d. h. der Summe der Hälfte des Durchmessers und hz , das aber die Hälfte von ag ist, mit dem Durchmesser gleich dem Quadrat von ad ; und weil die Fläche einer von zwei Linien mit der Hälfte der anderen gleich der Fläche der Hälfte der ersteren mit der ganzen anderen ist, so ist die Fläche der Summe des Durchmessers und des Doppelten von hz , d. i. der Summe des Durchmessers und ag , mit der Hälfte des Durchmessers gleich dem Quadrat von ad , und dies ist das, was wir [beweisen] wollten.

Ist also ag in den Teilen bekannt, in denen die Hälfte des Durchmessers sechzig ist, fügen wir dazu den Durchmesser und erhöhen die Summe um eine [Sexagesimal]stelle, so ist das Ergebnis das Quadrat von ad .

Zweiter Abschnitt

19

Bestimmung des Umfangs irgendeines dem Kreise einbeschriebenen Vielecks und des Umfangs des diesem ähnlichen umbeschriebenen Vielecks

Wir zeichnen über dem Durchmesser ab den Halbkreis agb mit dem Mittelpunkt h und nehmen ag als ein Sechstel des Umfangs an (Vgl. Fig. 2). Dann ist die Sehne ag gleich ah ,

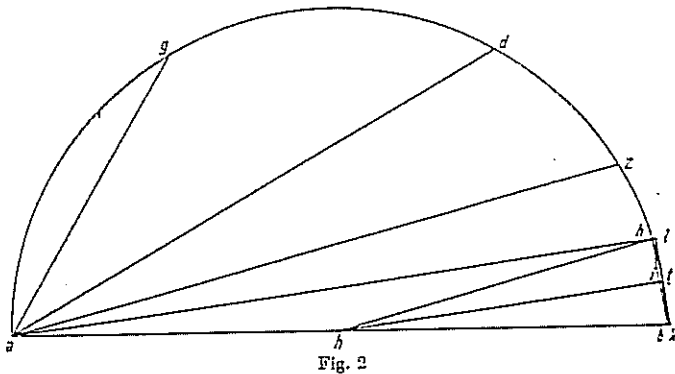


Fig. 2

der Hälfte des Durchmessers, nach dem fünfzehnten Lehrsatz des vierten [Buchs] der Elemente. Dann hielten wir gb , die Ergänzung von ag zum Halbkreis, in d und ab in z und zb in h und so [fort], so weit wir wollen. Nach dem, was wir im vorigen Abschnitt behandelten, wird dann aus ag [die Sehne] ad bekannt, hieraus wird az bekannt, hieraus wird ah bekannt, und so [fort], so weit wir wollen. Haben wir nun zum Beispiel ah erhalten und wollen die $2b$

- Sehne $b\hat{h}$ bestimmen, so ziehen wir das Quadrat von $a\hat{h}$ vom Quadrat des Durchmessers ab. Dann bleibt das Quadrat der Sehne $b\hat{h}$ übrig, weil der Winkel $a\hat{h}b$ ein rechter ist nach dem dreißigsten Lehrsatz des dritten [Buchs] der Elemente, und so nach dem Lehrsatz der Braut das Quadrat von ab gleich den beiden Quadraten von $a\hat{h}$ und $b\hat{h}$ ist. Dann hálften wir den Bogen $b\hat{h}$ in $\hat{t}$ und ziehen $h\hat{t}$. Dieses hálftet dann die Sehne in i . Wir legen im Punkte $\hat{t}$ die Berührende $\hat{t}l$ an den Kreis, indem wir vom Punkte $\hat{t}$ aus auf $\hat{t}h$ nach beiden Seiten die beiden Senkrechten $\hat{t}k$ und $\hat{t}l$ errichten, ziehen $h\hat{h}$ und verlängern [es] bis l und ebenso $h\hat{b}$ bis k . Dann ist kl parallel zu $b\hat{h}$, und so wie $b\hat{h}$ eine Seite des dem Kreis eingeschriebenen Vielecks ist, ist kl eine Seite des ihm umbeschriebenen und jenem ähnlichen Vielecks. Also sind die beiden Dreiecke $h\hat{k}\hat{t}$ und $h\hat{t}i$ einander gleich und den beiden einander gleichen Dreiecken $h\hat{b}i$ und $h\hat{h}i$ ähnlich. Also ist das Verhältnis von hi zu ht , der Hálfte des Durchmessers, gleich dem Verhältnis von bi zu tk , und das Verhältnis von $b\hat{h}$ zu kl ist ebenso groß. Also ist das Verhältnis von hi zu it , dem Überschuß des Hintergliedes über das Vorderglied, gleich dem Verhältnis der Sehne $b\hat{h}$ zu dem Überschuß von kl über $b\hat{h}$, und ebenso groß ist das Verhältnis zwischen allen Seiten (d. h. der Summe aller Seiten) des dem Kreis eingeschriebenen Vielecks, von dem eine Seite $b\hat{h}$ ist, und allen Überschüssen (d. h. der Summe aller Überschüsse) der Seiten des ihm umbeschriebenen Vielecks, von dem eine Seite kl ist, über die ersteren Seiten. hi ist die Hálfte von $a\hat{h}$, weil die beiden Dreiecke $a\hat{h}b$ und $h\hat{b}i$ einander ähnlich sind, da die beiden Winkel h und i rechte und folgende beiden Winkel einander gleich sind: a , der Umfangswinkel, den der Bogen $b\hat{h}$ unterspannt, und h , der Mittelpunktswinkel, den die Hálfte des Bogens $b\hat{h}$ unterspannt, welche $b\hat{t}$ ist; hb ist die Hálfte von ab , also ist hi die Hálfte von $a\hat{h}$. Wird also hi bekannt und $b\hat{h}$ bekannt und werden die genannten Verhältnisse bekannt, so werden also das dem Kreis eingeschriebene und das ihm umbeschriebene Vieleck bekannt, und dies ist das, was wir wollten.

11

Dritter Abschnitt

In wieviel Seiten wir den Umfang teilen und bis zu welcher [Sexagesimal]stelle wir bei der Rechnung die Genauigkeit treiben, um den Umfang derart herauszubekommen, daß es bei einem Kreis von der angegebenen Größe nicht ein Haar ausmacht

12. Wisse, daß bei einem Kreise, dessen Durchmesser sechshunderttausend mal so groß ist wie der Durchmesser der Erde, auch der Umfang sechshunderttausend mal so groß ist wie ihr Umfang. Also beträgt bei diesem Kreise

14-18

ein Grad	eintausendsechshundertsechszundsechzig und zwei drittel Erdumfänge
eine Minute	annähernd siebenundzwanzig und drei viertel ebensolche
eine Sekunde	annähernd dreitausendsiebenhundertvier Farsang, wobei der Umfang der Erde zu achttausend Farsang angenommen ist
eine Terze	annähernd zweiundsechzig Farsang
eine Quarto	annähernd ein Farsang und ein Drittel von einem zehntel [Farsang] ($\approx 1 \frac{1}{30}$ Farsang)
eine Quinte	annähernd zweihundertsechs Ellen
eine Sexte	annähernd drei und eine drittel Elle
eine Septimo	ein und ein drittel Finger, d. i. achtundvierzig Haar
eine Oktave	vier Fünftel der Dicke eines Haares von der Mähne des Pferdes, sogar noch weniger

Das ist so, wenn der Umfang dreihundertsechzig ist. Falls er dreihundertsiebenund-¹² siebzig¹⁾ und ein Bruch ist, so ist eine Oktave von ihm viel kleiner als vier Fünftel von der¹³ Dicke eines Haars. Bestimmen wir also die Umfänge von zwei Vielecken derart, daß die Spanne zwischen den beiden Umfängen nicht eine einzige Oktave erreicht, so erreicht die Spanne zwischen beiden durchaus nicht ein einziges Haar, und auch erst recht nicht [diejenige] zwischen einem von beiden und dem wahren Umfang des Kreises.

Tafel 34

Wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl, beginnend mit dem Dreieck							Wiederholte Hältung des Drittels des Umfangs													
Zahl	fünftal Erhöhtes	viertal Erhöhtes	dreimal Erhöhtes	zweimal Erhöhtes	einmal Erhöhtes	Seiten	Teile	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen
0						3	120													
1						6	60													
2						12	30													
3						24	15													
4						48	7	30												
5					1	36	3	45												
6					3	12	1	52	30											
7					6	24	0	50	15											
8					12	48		28	7	30										
9					25	36		14	3	45										
10					51	12		7	1	52	30									
11				1	42	24		3	30	50	15									
12				3	24	48		1	45	28	7	30								
13				6	49	36		0	52	44	3	45								
14				13	39	12			26	22	1	52	30							
15				27	18	24			13	11	0	50	15							
16				54	36	48			6	35	30	28	7	30						
17		1		49	13	36			3	17	45	14	3	45						
18			3	38	27	12			1	38	52	37	1	52	30					
19			7	10	54	24			0	49	26	18	30	50	15					
20			14	33	48	48				24	43	9	15	28	7	30				
21			29	7	37	36				12	21	34	37	44	3	45				
22			58	15	15	12				6	10	47	18	52	1	52	30			
23		1	56	30	30	24				3	5	23	39	26	0	56	15			
24		3	53	1	0	48				1	32	41	49	43	0	28	7	30		
25		7	46	2	1	36				0	46	20	54	51	30	14	3	45		
26		15	32	4	3	12					23	10	27	25	45	7	1	52	30	
27		31	4	8	6	24					11	35	13	42	52	33	30	50	15	
28	1	2	8	16	12	48					5	47	36	51	26	16	45	25	7	30

Nachdem du nun weißt, daß das Verhältnis des inneren Vielecks zu dem Überschuß¹⁹ des äußeren Vielecks über das innere gleich ist dem Verhältnis des Abstandes des Kreismittelpunktes von der Mitte der Seite zu seiner Ergänzung zur Hälfte des Durchmessers, d. h. zum Abstand der Mitte der Seite von der Mitte des Bogens, dessen Sehne die Seite ist, während er (dieser Abstand) sein Pfeil ist, und daß das Verhältnis der Hälfte des Durchmessers zum Umfang kleiner als ein Sechstel (1 : 6) ist um weniger als ein Drittel von einem

¹⁾ Hs: dreihundertsechundsechzig; vgl. hierzu S. 55, Z. 8.

- Siebel tel davon (d. h. von $\frac{1}{6}$), müssen wir im Kreise ein Vieleck mit so vielen Seiten annehmen, daß das Verhältnis des Pfeils des Bogens jeder Seite zur Ergänzung des Pfeils zur Hälfte des Durchmessers kleiner als das Verhältnis des Sechstels einer Oktave zu eins ist um ein Drittel von einem Siebel tel davon oder um mehr, nämlich acht Nonen oder [noch] kleiner, so daß die Sehne der Ergänzung des Bogens jeder Seite desselben hinter dem Durchmesser um weniger als sechzehn Nonen zurückbleibt, weil die genannte Sehne gleich dem Doppelten des genannten Abstandes ist. Dann ist der Überschuß des Quadrats des Durchmessers über ihr Quadrat kleiner als annähernd ihr (d. h. der 16 Nonen) Vierfaches, erhöht um eine Stelle, d. h. kleiner als eine Septime und vier Oktaven, so daß die Wurzel daraus, d. h. die Sehne jeder seiner Seiten (so!), [den Betrag von] sieben Quarten nicht überschreitet.
- 3a Hälften wir nun ein Drittel des Umfangs achtundzwanzigmal, so kommt ein Bogen heraus, der fünf Quarten und siebenundvierzig Quinten und einen Bruch in den Teilen beträgt, in denen der Umfang dreihundertsechzig Teile ist, wie das aus vorstehender Tafel
- 4 ersichtlich ist, und ohne allen Zweifel ist seine Sehne kleiner als sieben Quarten, weil die
- 5 Sehne jedes Bogens unter der Voraussetzung, daß der Umfang dreihundertsechzig und der Durchmesser hundertzwanzig ist, den Bogen nicht um ein Drittel von einem Siebel tel desselben übertrifft. Stellen wir nun in dem Kreise ein Vieleck her, von dem jene [Sehne]
- 10 eine seiner Seiten ist, so ist die Zahl seiner Seiten achthundertmillionen dreihundertfünf- unddreißigtausend einhundertachtundsechzig, und ihre Erhöhte (d. h. ihre Darstellung als ganze Sechzigerzahl) ist 1 2 8 16 12 48.
- 12 Da die erste (d. h. höchste) Stelle dieser Zahl eine fünfmal Erhöhte ist, müssen wir die
- 15 Größe einer einzigen Seite derart bestimmen, daß die Vernachlässigung der Brüche nicht eine einzige Einheit der dreizehnten Stelle ausmacht; denn wenn wir sie (die Seite) mit jener Zahl vervielfachen, so machen sie (die vernachlässigten Bruchstellen) beim Umfang nicht so viel aus, wie eine einzige Oktave, weil die Vervielfachung einer fünfmal Erhöhten mit einer Tredezime eine Oktave ergibt. Weil ferner die erste (d. h. höchste) Stelle des Betrages einer einzigen Seite kleiner als sieben Quarten ist, sein Ende bis zur dreizehnten [Stelle] reicht, und das Produkt von weniger als sieben Quarten mit einer Tredezime weniger als sieben an der siebzehnten Stelle ausmacht, so darf die Spanne (d. h. der Fehler) bei ihrem (der Seite) Quadrat jenen Betrag ($7 \cdot 60^{-17}$) nicht erreichen, und ebenso bei der zugehörigen Ergänzung, und ebenso bei der zugehörigen Erniedrigung um eine
- 20 Stelle, und so weiter bis zum Beginn der Rechnung. Bestimmen wir also die Sehnens so, wie wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten angaben, bis der Umfang eines Vielecks herauskommt, dessen Seitenzahl 1 2 8 16 12 48 beträgt, und treiben wir bei der Rechnung die Genauigkeit bis zur achtzehnten Stelle, so kommt das Gewünschte heraus.

21

Vierter Abschnitt

2a, 21

Die Berechnungen

Wir fügen den Durchmesser 20 zur Seite 10 des Sechsecks; es kommt 30 heraus; dies erhöhen wir um eine Stelle; das gibt 300; daraus ziehen wir die Wurzel und fügen zu ihr 20; die Summe erhöhen wir um eine Stelle und ziehen daraus die Wurzel. In dieser Weise führen wir achtundzwanzig Berechnungen aus und gehen von einer Berechnung zur nächsten erst über, nachdem wir die Rechnung zwei- oder dreimal von vorne gemacht haben. Außerdem sichern wir uns durch die Waage der Rechnung, vervielfachen die heraus-

gekommene Wurzel mit sich selbst, rechnen es zwei- oder dreimal von vorne nach und fügen den Rest der Rechnung zu dem zweiten Ergebnis. [Dann wird] die Summe gleich der Zahl (d. h. dem Radikanden), wenn die Rechnung richtig ist. [Dies tun wir] zur Prüfung und Sicherung ihrer Richtigkeit, damit nicht ein Versehen unterlaufe und sich in der Folge verbreite. Da es nun viele Ziffern sind, so gebrauchen wir nicht die Ziffern, deren Gebrauch unnötig ist. Das Verfahren der Wurzelausziehung und der Berechnung des Quadrats aus der Wurzel ist in dieser Art unsere eigene Erfindung, und dies ist das leichteste Verfahren bei diesem Gegenstand. Wir bringen in diesem Abschnitt die Tafeln der Berechnungen bei, damit das ein Muster für die Rechner und ein gebahnter Weg für diejenigen sei, die die Richtigkeit hiervon überprüfen wollen. Die Berechnungstafeln sind folgende:

Von den 28 Berechnungstafeln teile ich als Beispiele die erste, zweite, 15te und 28ste mit. Des Zusammenhangs wegen schicke ich diesen Beispielen die Überschriften aller 28 Tafeln voraus. Dazu gebe ich von jeder Wurzelausziehung K.s Ergebnis an, ferner seinen letzten Rest, d. i. den Rest, den er nach Bestimmung der vorletzten Stelle des Ergebnisses und Abziehung des zugehörigen Produktes erhielt. Die höchste Stelle jeder erhaltenen Wurzel ist einmal Erhöhtes, die letzte Oktodezimen. Die letzte Stelle des Restes ist bei der ersten Berechnung Oktodezimen, bei allen folgenden Undezimesen.

- b Erste Berechnung. Sie ergibt die Sehne des Drittels des Umfangs, d. i. die Sehne der Ergänzung des Sechstels [des Umfangs]. 6
 Wurzel: 1 43 55 22 58 27 57 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 27
 Rest: 3 16 27 Oktodezimen.
- a Zweite Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung der Hälfte des Sechstels des Umfangs. 12
 Wurzel: 1 55 54 39 57 25 2 41 7²⁾ 56 38 3 9 14 51 43 4 22 44 46.
 Rest: 2 56 5 43 Nondezimes. Bei der Probe durch Vervielfachung 2 56 5 44.
- b Dritte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung des Viertels des Sechstels des Umfangs. 24
 Wurzel: 1 58 58 24 10 48 24 30 46 47 22 13 4 44 26 38 36 37 48 27
 Rest: 1 47 13 41.
- a Vierte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Achtundvierzigstel des Umfangs ist. 48
 Wurzel: 1 59 44 35 3 17 25 14 26 3 12 39 10 10 28 33 45 47 32 16
 Rest: 1 4 48 21.
- b Fünfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Sechsendneunzigstel des Umfangs ist. 1 36
 Wurzel: 1 59 56 8 42 6 26 35 40 40 17 55 44 14 58 19 34 54 29 34
 Rest: 2 13 51 38.
- a Sechste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Hundertzweiundneunzigstel des Umfangs ist. 3 12
 Wurzel: 1 59 59 2 10 17 40 37 1 18 16 54 32 35 27 38 48 41 50 24
 Rest: 1 35 28 39.
- b Siebente Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Dreihundertvierundachtzigstel des Umfangs ist. 6 24
 Wurzel: 1 59 59 45 32 33 32 54 1 54 51 41 6 50 27 35 53 38 54 49
 Rest: 3 17 43 12.
- a Achte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Siebenhundertachtundsechzigstel des Umfangs ist. 12 48
 Wurzel: 1 59 59 56 23 8 19 57 33 17 31 8 29 4³⁾ 41 15 7 13 12 11
 Rest: 43 14 37.

¹⁾ Hs: 6. ²⁾ Hs: 17.

- 7 b Neunte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Tausend-fünfhundertsechundsunddreißigstel des Umfangs ist. 25 36
 Wurzel: 1 59 59 59 5 47 4 47 8 29 50 15 57 23 28 51 40 19 11 12
 Rest: 2 6 29 32.
- 8 a Zehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Dreitausend-undzweihundsechzigstel des Umfangs ist. 51 12
 Wurzel: 1 59 59 59 46 26 46 11 1 11 51 41 51 14 21 59 25 0 45 19
 Rest: 1 17 35 36.
- 8 b Elfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein Sechstausend-einhundertvierundvierzigstel des Umfangs ist. 1 42 24
 Wurzel: 1 59 59 59 56 36 41 32 42 25 44 25 52 26 23 47 47 39 26 5
 Rest: 19 26 38.
- 9 a Zwölfte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 24 48-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 9 10 23 10 25 40 15 52 4 24 9 57 49 14 52
 Rest: 3 28 54 22.
- 9 b Dreizehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 6 49 36-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 47 17 35 47 35 44 42 3 15 53 31 50 58¹⁾ 28 25
 Rest: 1 39 26 43.
- 10 a Vierzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 13 39 12-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 56 49 23 56 53 53 39 8 38 38 47 2 24 44 3
 Rest: 11 1 49.
- 10 b Fünfzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 27 18 24-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 12 20 59 13 28 15 19 31 30 58 12 8 17 28
 Rest: 1 51 11 42.
- 11 a Sechzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 54 36 48-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 48 5 14 48 22 3 14 24 14 41 49 38 3 27
 Rest: 1 49 49 34.
- 11 b Siebzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 49 13 36-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 57 1 18 42 5 30 46 23 1 17 47 11 42 30
 Rest: 2 0 56 36.
- 12 a Achtzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 38 27 12-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 15 19 40 31 22 41 27 26 25 31 47 7 33
 Rest: 2 12 14 24.
- 12 b Neunzehnte Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 7 16 54 24-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 48 49 55 7 50 40 21 20 25 30 45 28 53
 Rest: 3 31 41 48.

¹⁾ Hs: 25

- a* Zwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 14 33 48 45-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 57 12 28 46 57 40 5^a) 53 9 26 55^a) 39 51
 Rest: 3 22 54 56.
- b* Einundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 29 7 37 36-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 18 7 11 44 25 1 19 23 3 14 48 34
 Rest: 2 15 22 10.
- c* Zweiundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 58 15 15 12-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 49 31 47 56 6 15 19 50 48 24 22 59
 Rest: 3 58 1 23.
- d* Dreiundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 56 30 30 24-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 57 22 56 59 1 33 49 57 40 23 19 33
 Rest: 2 11 45 5. Bei der Probe durch Vervielfachung 2 11 45 6.
- e* Vierundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 3 53 1 0 48-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 20 44 14 45 23 27 29 24 59 24 30
 Rest: 2 0 2 49.
- f* Fünfundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 7 46 2 1 36-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 50 11 3 41 20 51 52 21 14 27 2
 Rest: 0 9 11 26.
- g* Sechsendzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 15 32 4 3 12-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 57 32 45 55 20 12 58 5 18 35 15
 Rest: 1 0 41 58.
- h* Siebenundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 31 4 8 6 24-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 23 11 28 50 3 14 31 19 38 43
 Rest: 2 52 25 7, bei der Probe durch Vervielfachung 2 52 25 8.
- i* Achtundzwanzigste Berechnung. Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 2 8 16 12 48-stel des Umfangs ist.
 Wurzel: 1 59 59 59 59 59 59 59 59 50 47 52 12 30 48 37 49 54 40
 Rest: 2 41 35 19.

^a) fehlt in Hs. ^b) Hs: 25.

Page 13b

Erste Berechnung
Sie ergibt die Sehne des Drittels des Umfangs, d. i. die Sehne der Ergänzung
des Sechstels (des Umfangs)

Tafel 4a

Zweite Berechnung

Sie ergibt die Sehne der Ergänzung der Hälfte des Sechstels des Umfangs

Kreisbogen	Grad	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaaven	Nonen		
Wage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaaven	Nonen
1	43	55	22	58	27	57	58	0	44	25	31	42
2	40	25										
3	30	27	48	30								
4	20	22	30	40	27	21						
5	10	12	10	12	51	0	9					
6	0	0	0	0	0	0	0					
7	10	22	34	22	30	36	30	4				
8	20	40	48	40	48	48	48	4				
9	30	58	58	58	58	58	58	4				
10	40	68	68	68	68	68	68	4				
11	50	78	78	78	78	78	78	4				
12	60	88	88	88	88	88	88	4				
13	70	98	98	98	98	98	98	4				
14	80	108	108	108	108	108	108	4				
15	90	118	118	118	118	118	118	4				
16	100	128	128	128	128	128	128	4				
17	110	138	138	138	138	138	138	4				
18	120	148	148	148	148	148	148	4				
19	130	158	158	158	158	158	158	4				
20	140	168	168	168	168	168	168	4				
21	150	178	178	178	178	178	178	4				
22	160	188	188	188	188	188	188	4				
23	170	198	198	198	198	198	198	4				
24	180	208	208	208	208	208	208	4				
25	190	218	218	218	218	218	218	4				
26	200	228	228	228	228	228	228	4				
27	210	238	238	238	238	238	238	4				
28	220	248	248	248	248	248	248	4				
29	230	258	258	258	258	258	258	4				
30	240	268	268	268	268	268	268	4				
31	250	278	278	278	278	278	278	4				
32	260	288	288	288	288	288	288	4				
33	270	298	298	298	298	298	298	4				
34	280	308	308	308	308	308	308	4				
35	290	318	318	318	318	318	318	4				
36	300	328	328	328	328	328	328	4				
37	310	338	338	338	338	338	338	4				
38	320	348	348	348	348	348	348	4				
39	330	358	358	358	358	358	358	4				
40	340	368	368	368	368	368	368	4				
41	350	378	378	378	378	378	378	4				
42	360	388	388	388	388	388	388	4				
43	370	398	398	398	398	398	398	4				
44	380	408	408	408	408	408	408	4				
45	390	418	418	418	418	418	418	4				
46	400	428	428	428	428	428	428	4				
47	410	438	438	438	438	438	438	4				
48	420	448	448	448	448	448	448	4				
49	430	458	458	458	458	458	458	4				
50	440	468	468	468	468	468	468	4				
51	450	478	478	478	478	478	478	4				
52	460	488	488	488	488	488	488	4				
53	470	498	498	498	498	498	498	4				
54	480	508	508	508	508	508	508	4				
55	490	518	518	518	518	518	518	4				
56	500	528	528	528	528	528	528	4				
57	510	538	538	538	538	538	538	4				
58	520	548	548	548	548	548	548	4				
59	530	558	558	558	558	558	558	4				
60	540	568	568	568	568	568	568	4				
61	550	578	578	578	578	578	578	4				
62	560	588	588	588	588	588	588	4				
63	570	598	598	598	598	598	598	4				
64	580	608	608	608	608	608	608	4				
65	590	618	618	618	618	618	618	4				
66	600	628	628	628	628	628	628	4				
67	610	638	638	638	638	638	638	4				
68	620	648	648	648	648	648	648	4				
69	630	658	658	658	658	658	658	4				
70	640	668	668	668	668	668	668	4				
71	650	678	678	678	678	678	678	4				
72	660	688	688	688	688	688	688	4				
73	670	698	698	698	698	698	698	4				
74	680	708	708	708	708	708	708	4				
75	690	718	718	718	718	718	718	4				
76	700	728	728	728	728	728	728	4				
77	710	738	738	738	738	738	738	4				
78	720	748	748	748	748	748	748	4				
79	730	758	758	758	758	758	758	4				
80	740	768	768	768	768	768	768	4				
81	750	778	778	778	778	778	778	4				
82	760	788	788	788	788	788	788	4				
83	770	798	798	798	798	798	798	4				
84	780	808	808	808	808	808	808	4				
85	790	818	818	818	818	818	818	4				
86	800	828	828	828	828	828	828	4				
87	810	838	838	838	838	838	838	4				
88	820	848	848	848	848	848	848	4				
89	830	858	858	858	858	858	858	4				
90	840	868	868	868	868	868	868	4				
91	850	878	878	878	878	878	878	4				
92	860	888	888	888	888	888	888	4				
93	870	898	898	898	898	898	898	4				
94	880	908	908	908	908	908	908	4				
95	890	918	918	918	918	918	918	4				
96	900	928	928	928	928	928	928	4				
97	910	938	938	938	938	938	938	4				
98	920	948	948	948	948	948	948	4				
99	930	958	958	958	958	958	958	4				
100	940	968	968	968	968	968	968	4				

Probe durch Ausrechnung des Quadrats

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

40 Oktodesimen richtig

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Taj. IOb

[illegible]

Sechster Abschnitt

18a
1

Bestimmung der Umfänge des dem Kreise ein- und des ihm umbeschriebenen Vielecks, die einander ähnlich sind, und deren jedes 800 335 168 Seiten hat

Die im fünften Abschnitt erhaltene Wurzel, welche die Größe einer einzigen Seite ist, vervielfachen wir mit der Seitenzahl des erwähnten Vielecks, deren Erhöhtes 1 2 8⁷⁾ 16 12 48 beträgt.

Multiplikand	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25		Tafel 18a oben
Multiplikator	Quarten	Quinten	Sexten	Septiman	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen		
Fünffmal Erhöhtes	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
Viermal Erhöhtes	2		12	8	12	29	59	12	29	7	12	38	50
Dreimal Erhöhtes	3		0	48	0	8	7	52	1	52	4	48	3
				0	32	1	52	4	48	4	24	2	32
Zweimal Erhöhtes	16			1	36	0	16	15	44	3	44	9	36
					1	4	3	44	9	36	8	48	5
Einmal Erhöhtes	12				1	12	0	12	11	48	12	48	7
						0	48	2	48	7	12	6	36
Zahl	48					4	48	0	48	47	12	11	12
						3	12	11	12	28	48	26	
Produkt	6	16	59	25	1	34	51	40	14	49	40		
	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen		

Das ist der Umfang des dem Kreise einbeschriebenen Vielecks in den Teilen, in denen ³ der Durchmesser hundertzwanzig beträgt. Dieser [Umfang] ist kleiner als der Umfang des Kreises, und wie wir im zweiten Abschnitt bewiesen, ist das Verhältnis dieses Umfangs zum Überschuß der Summe der Seiten des ihm ähnlichen umbeschriebenen Vielecks über diesen Umfang gleich dem Verhältnis der nachfolgend angegebenen Hälfte der in der achtundzwanzigsten Berechnung erhaltenen Wurzel:

Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sextdezimen	Septenddezimen	Oktaddezimen
59	59	59	59	59	59	59	59	59	55	23	56	6	15	24	18	54	57	20
zu folgendem Überschuß der Hälfte des Durchmessers über sie:									4	30	3	53	44	35	41	5	2	40

Tafel 18a, 1)
Zeile 9

⁷⁾ Hs undeutlich, als ob > statt < dasteht.

⁸⁾ In der Hs ist diese Tafel derart neben die obere Tafel von S. 15 gestellt, daß die drei gegebenen Zahlen der Proportion annähernd so stehen: erste Zahl dritte Zahl vierte Zahl

- ⁹ Dies sind vier in Verhältnisgleichung stehende Zahlen, deren zweite unbekannt ist. Die erste Stelle der ersten Zahl ist Einmal Erhöhtes, die erste der vierten ist eine None. Also gibt das Ergebnis der Vervielfachung beider Oktaven, und das Ergebnis der Teilung durch die dritte [Zahl] Nonen. Was nach ihnen (den Nonen) kommt, brauchen wir aber nicht; deshalb lassen wir die meisten Ziffern weg und sagen: das Verhältnis von 6 17 zu der Unbekannten ist gleich dem Verhältnis von sechzig zu 4 36 Dezimen. Wir vervielfachen also die erste [Zahl] mit der vierten erniedrigt. Es kommt heraus neunundzwanzig Nonen. Fügen wir [sie] zum Umfang jenes Vielecks hinzu, so kommt als Umfang des dem Kreis umbeschriebenen Vielecks folgendes heraus:

Tafel 18a.
Zeile 13

Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
0	16	59	28	1	34	51	46	14	50	15

- ¹⁵ Das ist größer als der Umfang des Kreises, und der Betrag der Summe des Überschusses und des Mangels ist neunundzwanzig Nonen unter der Voraussetzung, daß der Durchmesser hundertzwanzig ist. Also ist er in den Teilen, in denen der Umfang dreihundertsechzig ist, sicher kleiner als neunundzwanzig Nonen. Nun bewiesen wir im dritten Abschnitt, daß die Größe einer einzigen Oktave des Umfangs eines Kreises, dessen Durchmesser sechshundert-
- ¹⁷ tausend Erddurchmesser beträgt, kleiner als vier Fünftel der Breite eines Haars von der Mähne des Arbeitspferdes ist, welche Breite ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns beträgt. Also ist etwas, das kleiner als neunundzwanzig Nonen desselben ist, kleiner als zwei Fünftel der Breite eines Haars. Also macht die Spanne zwischen den beiden angegebenen Umfängen, deren einer kleiner und deren anderer größer als der wahre Umfang des Kreises ist, nicht zwei Fünftel der Breite eines Haars aus. Fügen wir also die Hälfte der Spanne zwischen den beiden Vielecken zum kleineren und ziehen sie vom größeren ab,
- ²⁰ oder besser, runden wir von ihr (der Spanne) das bei dem kleineren [Umfang] in die neunte Stelle Fallende auf, nämlich [um] 14 Nonen, und streichen wir das bei dem größeren [Umfang] in sie Fallende, nämlich 15 Nonen, ab, so kommt folgendes heraus:

Tafel 18a.
unten

Größe des Umfangs, wenn der Durchmesser hundertzwanzig ist										
Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	
0	16	59	28	1	34	51	46	14	50	

- ²² Also macht die Spanne zwischen diesem und dem wahren Wert nicht ein Fünftel der Breite eines Haars von der Mähne des Arbeitspferdes aus, welche Breite ein Sechstel der
- ^{18b} Breite eines mittleren Gerstenkorns ist, und dies ist das, was wir bewiesen haben wollten.

wa yau naṭ kaḥ a lad nā mū jayadnu
muḥītun ḥaitu niṣful-quṭri sīnu

[ist der] Umfang, sofern die Hälfte des Durchmessers 60 ist.

Tafel 15b

Tafel 15b

In Reihe 14: Hs 30 statt 32 — In Reihe 35: Hs 58 | 29 — In Reihe 41: Hs 19 statt 40 —
In Reihe 46: Hs 19 statt 40 —

gehenden Rechnungen die Hälfte des Durchmessers nur deshalb an, damit die Sehnen nicht von dem Üblichen und in den Tafelwerken Angewandten abweichen. Nähmen wir sie aber [gleich] eins an, so würden sich die Zeichen der Ziffern nicht ändern, sondern [nur] ihre Stellen[werte].

Wir haben seine (des Umfangs $\approx 2\pi$) Vielfache mit jeder der Sechzigerziffern in einer Tafel zusammengestellt, damit durch sie leicht der Umfang aus dem Durchmesser und umgekehrt ermittelt werden könne. Die Tafel ist folgende: (s. S. 19).

20a

Siebenter Abschnitt

Was die Vernachlässigung der überschießenden und mangelhaften Brüche bei der letzten Stelle der vorhergehenden Berechnungen ausmacht

Wisse, daß bei der letzten Stelle jener Berechnungen die Spanne (der Fehler) sich nicht auf eine volle Einheit jener Stelle beläuft, und auch bis zur letzten Stelle der letzten Berechnung nicht [soviel] ausmacht. Denn die letzte Stelle der ersten Berechnung war siebenundfünfzig, und sie war um zwanzig [Einheiten] der ihr folgenden Stelle, d. h. der neunzehnten Stelle, mangelhaft. Denn der Rest der Rechnung war 3 16 27, und wenn wir diesen durch den Unterschied der beiden Quadrate, der 3 27 50 45 war, teilen, so bekommen wir 56 40 heraus, und das setzen wir als Aufrundung des Bruches zu 57 an. Also ist das Quadrat der zweiten Berechnung um den gleichen Betrag mangelhaft, d. h. um zwanzig, aber an der achtzehnten Stelle. Ziehen wir das nun vom Rest der zweiten Berechnung, der 2 56 5 betrug, ab, so bleibt 2 55 45 übrig. Das teilen wir durch den Unterschied der beiden Quadrate, der 3 51 49 war. Dann bekommen wir 45 28 heraus. Wir teilten dort aber 2 56 5 durch den Unterschied der beiden Quadrate, und es kam 46 heraus, was um zweiunddreißig der neunzehnten Stelle mangelhaft ist. Nach diesem Verfahren erkennt man, daß die letzte Stelle der dritten Berechnung um sechs [Einheiten] der ihr folgenden Stelle mangelhaft ist, die der vierten um fünfzehn überschießend, die der fünften um achtundzwanzig mangelhaft, die der sechsten um fünfzehn mangelhaft, die der siebenten um zweiundzwanzig überschießend, die der achten um sechs mangelhaft, die der neunten um vierundzwanzig mangelhaft, die der zehnten um achtzehn überschießend, die der elften um vier mangelhaft, die der zwölften um zwölf überschießend, die der dreizehnten um fünf mangelhaft, die der vierzehnten um sechzehn mangelhaft, die der fünfzehnten um siebzehn mangelhaft, die der sechzehnten um neun überschießend, die der siebzehnten um sechzehn [überschießend], die der achtzehnten um acht überschießend, die der neunzehnten um drei mangelhaft, die der zwanzigsten um siebzehn mangelhaft, die der einundzwanzigsten um vierzehn mangelhaft, die der zweiundzwanzigsten um siebenundzwanzig überschießend, die der dreiundzwanzigsten um drei, die der vierundzwanzigsten um eine, die der fünfundzwanzigsten um achtzehn, die der sechsundzwanzigsten um fünfzehn, die der siebenundzwanzigsten um zehn, die der achtundzwanzigsten um sechsundzwanzig, alles [Einheiten] der neunzehnten Stelle der Wurzel und der achtzehnten des Quadrats der darauf folgenden Berechnung, die letzten sieben um die betreffenden Beträge überschießend. Also ist das Quadrat der achtundzwanzigsten Berechnung um zehn überschießend, aber in der achtzehnten Stelle. Also ist die letzte Stelle des Überschusses des Quadrats des Durchmessers über es, d. h. die Ziffer 17, die der siebzehnten Stelle angehört, um zehn [Einheiten] der achtzehnten Stelle mangelhaft.

Also ist die letzte Stelle der Wurzel daraus, die wir zu fünfundzwanzig ansetzten, um zweiundfünfzig der fünfzehnten Stelle mangelhaft, und die letzte Stelle des Ergebnisses der Vervielfachung, d. h. des Umfangs, die wir zu sechsundvierzig in der neunten Stelle ansetzten, um vierundfünfzig [Einheiten] der zehnten Stelle mangelhaft, und es ist am besten, daß wir die letzte Stelle der Seite zu vierundzwanzig und die letzte Stelle des einbeschriebenen Umfangs zu fünfundvierzig ansetzen. Jetzt ist die Aufrundung fünfzehn Nonen und der Abstrich vierzehn Nonen.

Ich habe das weitläufig ausgeführt, damit man wisse, daß die Vernachlässigung der überschießenden und mangelhaften Brüche an der letzten Stelle dieser Berechnungen nicht so viel ausmacht, daß es an eine einzige volle None in der Größe des Umfangs heranreicht. Wir haben diese Größen auch in einer Tafel zusammengestellt, damit den Abschreibern [möglichst] wenig Fehler unterlaufen. Die Tafel ist nebenstehend.

Achter Abschnitt

Verwandlung des Betrages des Umfangs in die indischen Ziffern unter der Voraussetzung, daß die Hälfte des Durchmessers eins ist

Da der Umfang sechsmal die Hälfte des Durchmessers und ein Bruch ist, den wir bis zu den Nonen erreicht haben, setzen wir diesen Bruch mit einem Nenner an, der zehn fünfmal wiederholtes Tausend ($10 \cdot 1000^5$) ist, weil ein einziger Teil von ihm (10^{-10}) eine einzige None nicht um eine halbe Dezime übertrifft. (Ebenfalls zur Erleichterung der Rechnung mit ihm). Wir haben die Vielfachen hiervon mit jeder der neun Ziffern in einer Tafel zusammengestellt, um das Rechnen damit zu erleichtern. Die Tafel ist folgende: (s. S. 22).

Wisse, daß die an der letzten Stelle der Brüche stehende zwei in der Stelle der Minuten ^{20b, 2} in bezug auf die sechs Ganzen steht, wenn man zugrunde legt, daß zehn Minuten ein Ganzes bilden. Wenn wir wollen, nennen wir diese Stelle ‚Zehntel‘. Die rechts von ihr stehende ³ acht [steht] in der Stelle der Sekunden, und wir nennen sie ‚Dezimalsekunden‘ (wörtlich ‚Zweites der Zehntel‘). Die nach ihr [kommende] drei [steht] in der Stelle der Tertien, und wir nennen sie ‚Dezimaltertien‘, und so [fort] nach dem Muster der Sternrechnung. Deshalb fangen wir bei einem einfachen Ausgangspunkt (oder: Nenner) an, nämlich eins. Dieses Verfahren in der indischen Rechnung ist unsere eigene Erfindung, desgleichen seine An- ¹⁰ ordnung in der Tafel. Wir haben diese Ziffern von links nach rechts auf einen Halbvers gebracht, um einen Vers zu bilden:

Tafel 20a unten

Tafel dessen, was an der letzten Stelle der Berechnungen vernachlässigt wird		
Berechnungen	Was es ausmacht	Überschüsse und Mängel
1	20	mangelh.
2	32	mangelh.
3	6	mangelh.
4	15	übersch.
5	28	mangelh.
6	15	mangelh.
7	22	übersch.
8	6	mangelh.
9	24	mangelh.
10	18	übersch.
11	4	mangelh.
12	12	übersch.
13	5	mangelh.
14	16	mangelh.
15	17	mangelh.
16	9	übersch.
17	16	übersch.
18	8	übersch.
19	3	mangelh.
20	17	mangelh.
21	14	mangelh.
22	27	übersch.
23	3	übersch.
24	1	übersch.
25	18	übersch.
26	15	übersch.
27	10	übersch.
28	26	übersch.
Quadrat der Seite	10	mangelh.
Seite	52	mangelh.
Umfang	54	mangelh.

20 a. 20

20 b

Tafel 20 b

Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser																			
Ganze			[Zähler der] Brüche																
deren Zehner	Vielfache der Hälfte des Durchmessers	Hundert	viertel wiederholt(e Tausender)	dreimal wiederholt(e Tausender)	Tausender der Tausender	Tausender	Hundert	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer	Zahlen
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10

13

wa baḥḡā ḥaḡḡi šaz a za šah ḥawahu
muḥḡun li-quṭrin huwa 'ināni minhu

6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 5 8 6 5

ist [der] Umfang zu einem Durchmesser, der zwei davon ist.

20 b, 14

Und auf Persisch:

15

šaš wa du hašt wa siḥ yak hašt wa paṅṅ wa siḥ šifra
bahajt wa yakrā (hajt) wa nuḥ paṅṅ wa hašt wa šaš paṅṅ ast

Sechs und zwei acht und drei eins acht und fünf und drei, eine Null mit sieben und eins [sieben] und neun fünf und acht und sechs fünf ist [es].

29 b, 15

Neunter Abschnitt

Art des Rechnens mit den beiden Tafeln

Ist die Größe der Hälfte des Durchmessers in Ellen oder Farsang oder einem anderen Maß bekannt, so setzen wir sie in Gummaziffern oder indischen [Ziffern] an, [je nachdem] welche von beiden [Zifferarten] wir wünschen, und vervielfachen sie mit dem Verhältnis des Umfangs (zum Durchmesser), indem wir in die Tafel eingehen und gegenüber der höchsten Stelle desselben anfangen. Das Gefundene schreiben wir irgendwo auf. Dann gehen wir mit der darauf folgenden Stelle in sie ein und schreiben das Gefundene um eine Stelle erniedrigt darunter, hierauf mit der darauf folgenden [Stelle] und schreiben das Gefundene um eine weitere Stelle erniedrigt darunter, bis es vollendet ist. Dann zählen wir das Ganze zusammen, wobei wir das weglassen, was die unter der letzten Stelle des zuerst genommenen [Teilprodukts] stehende [Stelle] überschreitet, oder vielmehr unter einer seiner letzten

^{*)} Hs: 7

Beispiel: Wir wollen die Größe des Umfangs eines Kreises wissen, bei dem die Hälfte ²⁴ des Durchmessers sechshundertfünzigtausendachtundvierzig und ein achtel Ellen oder Farsang beträgt. Wir stellen es dar:

in Gummalziffern					
Ganze				Brüche	
Preklast Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Wen oder Versaug	Minuten	Sekunden
3	0	47	24	7	30

		Die Rechnung mit Gummalziffern											
Dreimal Erhöhtes	3	0	18	50	58	24	4	44	35	18	44	30	
Zweimal Erhöhtes	0		0	0								0	0
Einmal Erhöhtes	47			4	55	18	34	57	14	18	33	13	37
Ellen oder Farsang	24				2	30	47	47	12	37	56	42	30
Minuten	7					0	43	58 ¹⁰	56	16	11	4	2
Sekunden	30						3	8	29	44	0	47	26
Ergebnis, d. i. der Umfang		0	18	55	56	14	14	36	28	15	26	17	35
			Dreimal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Ellen oder Farsang	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen

Taj. 19a
9888

In indischen Ziffern									
Ganze						Brüche			
Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Dezimalsekunden	Dezimalteilen	
5	5	0	5	4	4	1	12	5	

		Die Rechnung mit indischen Ziffern																			
Hunderttausender	6	3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0		
Zehntausender	5		3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2		
Tausender	0				0	0													0		
Hunderter	8					5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6		
Zehner	4						2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1		
Einer	4							2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7		
Zehntel	1								0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7		
Dezimalsekunden	2									1	2	5	6	0	3	7	0	6	1		
Dezimaltertien	5										3	1	4	1	5	9	2	6	5		
Ergebnis, d. i. der Umfang		4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9		
		Millionen	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Dezimalsekunden	Dezimaltertien	Dezimalquarten	[Dezimalquinten]	[Dezimalsesten]	[Dezimalseptimen]	[Dezimaloktaven]	[Dezimalnonen]	[Dezimaldezimen]	[Dezimalhundstufen]		
		Ganze									Brüche										

¹²⁾ In Hs undeutlich.

Taf. 19a
unten

Andere Art mit indischen Ziffern, bei der das Verfahren darin besteht, daß wir ganz rechts beginnen und von rechts nach links um je eine Stelle erhöhen, [wobei wir] jede [erhöhte Stelle] unter eine andere [setzen].																														
Dezimaltertien	5											3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5	
Dezimalsekunden	2											1	2	5	8	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	
Zehntel	1											0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	
Einer	4											2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	9	3	4	6	0	
Zehner	4											2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	9	3	4	6	0	
Hunderter	5											5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0	
Tausender	0																													
Zehntausender	5											3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	9	7	9	3	2	5		
Hunderttausender	6											3	7	6	9	9	1	1	1	5	4	3	0	7	7	5	1	9	0	
Ergebnis, d. i. der Umfang	4	0	8	9	9	3	7	4	1	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9	3	4	5	4	3	1	2	5		
Namen der Stellen	Tausendtausender						Tausender 3 (mal)						Tausender 4 (mal)						Tausender 5 (mal)						Tausender 6 (mal)					
	Hunderttausender						Hundert						Hundert						Hundert						Hundert					
	Zehntausender						Zehner						Zehner						Zehner						Zehner					
	Tausender						Einer						Einer						Einer						Einer					
	Hunderter						Zehntel						Zehntel						Zehntel						Zehntel					
	Zehner						Dezimalsekunden						Dezimalsekunden						Dezimalsekunden						Dezimalsekunden					
	Einer						Dezimaltertien						Dezimaltertien						Dezimaltertien						Dezimaltertien					
							Dezimalquarten						Dezimalquarten						Dezimalquarten						Dezimalquarten					
							Dezimalquinten						Dezimalquinten						Dezimalquinten						Dezimalquinten					
							Dezimalseksen						Dezimalseksen						Dezimalseksen						Dezimalseksen					
							Dezimalseptimen						Dezimalseptimen						Dezimalseptimen						Dezimalseptimen					
							Dezimaloktaven						Dezimaloktaven						Dezimaloktaven						Dezimaloktaven					
							Dezimalnonen						Dezimalnonen						Dezimalnonen						Dezimalnonen					
							Dezimaldezimen						Dezimaldezimen						Dezimaldezimen						Dezimaldezimen					
							Dezimalhundertdezimen						Dezimalhundertdezimen						Dezimalhundertdezimen						Dezimalhundertdezimen					
							Dezimaltausenddezimen						Dezimaltausenddezimen						Dezimaltausenddezimen						Dezimaltausenddezimen					
							Dezimalhunderttausenddezimen						Dezimalhunderttausenddezimen						Dezimalhunderttausenddezimen						Dezimalhunderttausenddezimen					
							Dezimalmilliondezimen						Dezimalmilliondezimen						Dezimalmilliondezimen						Dezimalmilliondezimen					
							Dezimalbilliondezimen						Dezimalbilliondezimen						Dezimalbilliondezimen						Dezimalbilliondezimen					
							Dezimaltrilliondezimen						Dezimaltrilliondezimen						Dezimaltrilliondezimen						Dezimaltrilliondezimen					
							Dezimalquadrilliondezimen						Dezimalquadrilliondezimen						Dezimalquadrilliondezimen						Dezimalquadrilliondezimen					
							Dezimalquintilliondezimen						Dezimalquintilliondezimen						Dezimalquintilliondezimen						Dezimalquintilliondezimen					
							Dezimalsextilliondezimen						Dezimalsextilliondezimen						Dezimalsextilliondezimen						Dezimalsextilliondezimen					
							Dezimalseptilliondezimen						Dezimalseptilliondezimen						Dezimalseptilliondezimen						Dezimalseptilliondezimen					
							Dezimaloktilliondezimen						Dezimaloktilliondezimen						Dezimaloktilliondezimen						Dezimaloktilliondezimen					
							Dezimalnonilliondezimen						Dezimalnonilliondezimen						Dezimalnonilliondezimen						Dezimalnonilliondezimen					
							Dezimaldecilliondezimen						Dezimaldecilliondezimen						Dezimaldecilliondezimen						Dezimaldecilliondezimen					
							Dezimalundecilliondezimen						Dezimalundecilliondezimen						Dezimalundecilliondezimen						Dezimalundecilliondezimen					
							Dezimalduodecilliondezimen						Dezimalduodecilliondezimen						Dezimalduodecilliondezimen						Dezimalduodecilliondezimen					
							Dezimaltredecilliondezimen						Dezimaltredecilliondezimen						Dezimaltredecilliondezimen						Dezimaltredecilliondezimen					
							Dezimalquadrdecilliondezimen						Dezimalquadrdecilliondezimen						Dezimalquadrdecilliondezimen						Dezimalquadrdecilliondezimen					
							Dezimalquintdecilliondezimen						Dezimalquintdecilliondezimen						Dezimalquintdecilliondezimen						Dezimalquintdecilliondezimen					
							Dezimalsextdecilliondezimen						Dezimalsextdecilliondezimen						Dezimalsextdecilliondezimen						Dezimalsextdecilliondezimen					
							Dezimalseptdecilliondezimen						Dezimalseptdecilliondezimen						Dezimalseptdecilliondezimen						Dezimalseptdecilliondezimen					

Ganze

Brüche

Wenn wir wollen, drücken wir diesen Bruch aus als: zwei sechsmal wiederholte Tausender (2.1000*), vierhundertvierunddreißig (ünfmal wiederholte Tausender [usw.] bis zum Ende mit dem Nenner Zehner der sechsmal wiederholten Tausender (10.1000*). Und wenn wir wollen, drücken wir ihn aus als: zwei Zehntel, vier Dezimalsekunden, drei [Dezimaltertien, vier] Dezimalquarten und so [fort] bis zum Ende. Dies [erfordert] das Höchstmaß der Rechenzeit.

die nach ihrer Ziffer[nfolge] (d. h. unabhängig vom Stellenwert) kleiner als sie ist. Ist sie gefunden, so [verfahren wir folgendermaßen]: Steht sie in einer Zeile, deren höchste Stelle Null ist, so setzen wir auch an die höchste [Stelle] des hingetzten Umfangs eine Null, d. h. rechts von den Gummalziffern und links von den indischen [Ziffern], und schreiben das Gefundene so darunter, daß die beiden Nullen untereinander stehen, und ebenso die übrigen Ziffern der Reihe nach. Wir ziehen es davon ab, schreiben den Rest darunter und schreiben das, was am Rande der Tafel stand, nämlich in der Spalte der Zahl, gegenüber jener Zahl an einen Ort, den wir die Zeile des Ergebnisses nennen. Dies[e Ziffer] hat den Wert derjenigen Stelle, die auf die höchste Stelle des Umfangs folgt, auch wenn diese die Null ist, die wir davor setzten. Dann suchen wir die größte Zahl, die nach ihrer Ziffer[nfolge] kleiner als der Rest ist, ziehen sie von ihr ab und schreiben das, was sich gegenüber jener Zahl am Rande findet, hinter das, was zuerst in die Zeile des Ergebnisses gesetzt wurde, d. h. links von dem zuerst Hingeschriebenen, wenn es eine Gummalziffer ist, und rechts, wenn es eine indische [Ziffer] ist. Dies [gilt], wenn die Zahl der höchsten Stelle des Restes um eine Stelle niedriger ist als die höchste Stelle dessen, was darüber steht, sei es nun null oder eine Zahl. Falls ihre Erniedrigung mehr als eine Stelle beträgt, setzen wir hinter das in der Zeile des Ergebnisses Geschriebene eine Null oder Nullen, deren Anzahl um eins kleiner ist, als die Anzahl der Erniedrigungen der höchsten Stelle des Restes gegenüber dem beträgt, was über ihm steht, und setzen unter den Rest eine Reihe von Nullen oder so viele Reihen, wie die erwähnte Zahl der Nullen beträgt, derart, daß die höchste Stelle der ersten Reihe genau unter der höchsten Stelle des Restes steht, auch wenn diese eine Null ist, diejenige der zweiten [Nullenreihe] um eine Stelle niedriger als sie, die der dritten um zwei Stellen und so [fort], bis es vollendet ist, um zu verhindern, daß ein Fehler unterläuft und um das Festhalten zu erleichtern, nicht [etwa], weil es notwendig wäre. Den Rest schreiben wir noch einmal unter die Nullen, und zwar genau unter die ersten. Dann suchen wir auf die angegebene Weise die größte Zahl und ziehen sie nach der angegebenen Vorschrift vom Reste ab. So verfahren wir, soweit wir wollen, und das, was in der Zeile des Ergebnisses herauskommt, ist das Gesuchte. Wenn wir wollen, setzen wir die Ziffern der Zeile des Ergebnisses an den Rand des Rechenschemas gegenüber den (in den Hilfstafeln) aufgesuchten Zahlen.

Beispiel: Wollen wir den Durchmesser eines Kreises wissen, dessen Umfang in Ellen vom Betrage der Zahl ist, die wir (in dem Beispiel) vorher als Durchmesser annahmen, so rechnen wir mit ihr folgendermaßen:

[Zeile des Ergebnisses]	Das Verfahren nach der Gummalrechnung						
	Umfang	3	0	47	24	7 ¹¹⁾	30
Zweimal Erhöhtes 28	Das, was wir aufsuchten	2	55	55	45	4	44
Einmal Erhöhtes 46	Rest		4	51	39	2	46
	Das, was wir aufsuchten		4	49	1	35	29
Ellen 25	Rest		¹¹⁾	2	37	27	17
	Das, was wir aufsuchten			2	37	4	47
Minuten 3	Rest				0	22	30
	Das, was wir aufsuchten				0	18	51
Sekunden 35	Rest					3	39
	Das, was wir aufsuchten						

¹¹⁾ Hs: 4.¹¹⁾ Hs hat hier 2 und daneben statt der 2 eine 37.

Tafel 19 b
Hien Haka

Zeile des Ergebnisses		Mit indischen Ziffern									
		Umfang	0	6	5	0	8	4	4	1	2
Hunderttausender	1	Das, was wir aufsuchten	0	6	2	8	3	1	8	5	3
Zehntausender	0	Rest		2	2	5	2	5	5	9	4
		Das, was wir aufsuchten	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tausender	3	Rest		2	2	5	2	5	5	9	4
		Das, was wir aufsuchten		1	8	8	4	9	5	5	6
Hunderter	5	Rest									
		Das, was wir aufsuchten		3	6	7	6	0	3	8	
Zehner	8	Rest					5	3	4	4	5
		Das, was wir aufsuchten					5	0	2	6	5
Einer	5	Rest					3	1	7	9	0
		Das, was wir aufsuchten					3	1	4	1	6
Zehntel	0	Rest							3	7	4
		Das, was wir aufsuchten							0	0	0
Dezimalsekunden	6	Rest							3	7	4
		Das, was wir aufsuchten							3		

21a

Zehnter Abschnitt

Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem, was bei den Leuten verbreitet und gebräuchlich ist, und dem, was wir erhalten haben

Wisse, daß die Vertreter dieses Zweiges der Wissenschaft den Umfang als drei einsiebel des Durchmessers ansetzten, also sechs zweisiebel der Hälfte des Durchmessers. Stellen wir das in Gummaziffern dar und bilden den Unterschied zwischen ihm und dem, was wir herausbekamen, so ergibt sich folgendes:

Tafel 21 a
oben
3

Verhältnis des Umfangs zur Hälfte des Durchmessers nach der verbreiteten Rechnung	0	17	8	34	17	8	34	17	8	34
nach unserem Ergebnis	0	16	59	28	1	34	51	40	14	50
Unterschied zwischen beiden	0	0	9	6	15	33	42	30	53	44

Man erkennt daraus, daß für einen Kreis, bei dem die Hälfte des Durchmessers dreitausendsechshundert Ellen [groß] ist, der Unterschied annähernd neun einzehntel Ellen beträgt.

- 5 Der Verfasser der kaiserlichen Gabe gibt an, die Hälfte des Durchmessers der Krümmung der Fixstern[sphäre] betrage siebzigtausendunddreisiebzig und einen halben Erddurchmesser, und bestimmt hieraus den Umfang unter der Annahme, daß er drei einsiebel desselben (d. h. des Durchmessers) betrage, zu vierhundertvierzigtausendvierhundertzweiundsechzig Erddurchmessern. Rechnen wir es nun folgendermaßen mit dem [Wert] aus, den wir herausbekommen haben, so ist der Unterschied zwischen beiden hundert[sieben]-

Das mit den drei	7	4 3 9 8 2 2	9 7
Zahlenziffern und	7	4 3 9	8 2
der Bruchziffer	3	1 3	8 5
Genommens	5	3	1 4
Ergebnis		4 4 0 2 8 4	7 8
Was in der „Gabe“ steht		4 4 0 4 6 2	
Unterschied zwischen beiden		1 7 7	

Tafel 21 a
Mitte

undsiebzig Erddurchmesser und ein Bruch, der kleiner als ein Viertel ist. Also ist er für einen einzigen Grad der Krümmung der Fixstern[sphäre] annähernd gleich einem halben Erddurchmesser, und Gott weiß es am besten. Hieraus erkennt man, daß der Umfang dem Richtigen näher und leichter herauskommt, wenn man die Hälfte des Durchmessers mit sech[s] [Ganzen] und siebzehn Minuten vervielfacht, als wenn man den Durchmesser mit drei einsiebtel vervielfacht.

Schluß

21a, 11

Nachweis der Fehler von Abul-Wafā' und Abur-Raiḥān (al-Bīrunī)

Wir führen nun den ersten Lehrsatz des ersten Buchs des Almagest an.

Es sei abg ein Halbkreis auf dem Durchmesser adg und [um] den Mittelpunkt d [und] bd senkrecht auf dem Durchmesser. Wir h[al]ften gd in h , ziehen bh , machen hz gleich bh und ziehen bz .

Dann ist dz die Seite des Zehneck[s] und bz die Seite des Fünfeck[s] (Vgl. Fig. 3).

13

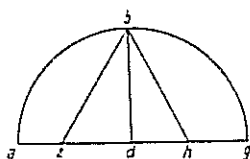


Fig. 3

Da gd in h geh[al]tet und in ihr[er] Verlängerung dz hinzugefügt ist, so ist die Fläche gz mal dz zusammen mit dem Quadrat von dh gleich dem Quadrat von hz nach dem sechsten Lehrsatz des zweiten [Buchs] der Elemente, also gleich dem Quadrat von hb , oder den Quadraten (d. h. der Summe der Quadrate) von hd und db . Zieht man das (beiden Seiten der Gleichung) gemeinsame Quadrat von hd ab, so bleibt übrig: Die Fläche gz mal dz ist gleich dem Quadrat von db , d. i. dem Quadrat von gd . Also ist die Linie gz im Punkte d nach dem mittleren und äußeren Verhältnis (d. h. nach dem goldenen Schnitt) geteilt, weil das Produkt aus der ganzen Linie und dem kleineren Teil gleich dem Quadrat des längeren Teils ist. Das hat zur Folge, daß das Verhältnis von dz zu gd gleich dem Verhältnis von gd zu gz ist, nach dem siebzehnten Lehrsatz des sechsten [Buchs] der Elemente. Hierbei ist die längere gd die Sehne des Sechstels des Kreises nach dem fünfzehnten Lehrsatz des vierten [Buchs] der Elemente. Also ist dz die Sehne des Zehntels des Kreises, wie es der zwölfte Lehrsatz des dreizehnten [Buchs] der Elemente deutlich macht, und bz , deren Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden ist, ist die Sehne des Fünftels des Kreises nach dem dreizehnten Lehrsatz des dreizehnten [Buchs] der Elemente.

4*

20 Ich nun behaupte: gz ist gleich der Sehne der Ergänzung der Seite des Fünfecks, d. h. gleich der Sehne von drei Zehnteln des Umfangs.

Denn du weißt schon aus dem Vorhergehenden, daß die Summe der Quadrate der Sehne eines Bogens und der Sehne seiner Ergänzung gleich dem Quadrat des Durchmessers ist. Nun ist die Summe der beiden Quadrate von bz und gz gleich dem Quadrat des Durchmessers. Das Quadrat des Durchmessers ist nämlich gleich viermal dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers, und das Quadrat von gz ist gleich der Summe aus dem Quadrat von gd , der Hälfte des Durchmessers, dem Quadrat von dz und dem Doppelten der Fläche gd mal dz , und das Quadrat von bz ist gleich der Summe der beiden Quadrate von bd , der Hälfte des Durchmessers, und dz ; also ist die Summe der beiden Quadrate von gz und bz gleich der Summe aus dem Doppelten des Quadrats der Hälfte des Durchmessers, dem Doppelten des Quadrats von dz und dem Doppelten der Fläche gd mal dz . Nun weißt du schon aus dem Vorhergehenden, daß das Quadrat der Hälfte des Durchmessers gleich der Fläche gz mal dz ist, also gleich der Summe aus der Fläche gd mal dz und dem Quadrat von dz . Also ist die Summe aus dem Doppelten der Fläche gd mal dz und dem Doppelten des Quadrats
21 b von dz gleich dem Doppelten des Quadrats der Hälfte des Durchmessers. Also ist die Summe der beiden Quadrate von bz und gz gleich viermal dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers, also gleich dem Quadrat des Durchmessers. Ist also bz die (Sehne der) Seite des Fünfecks, so ist gz die Sehne von drei Zehnteln (des Kreisumfangs), und das ist das Gewünschte.

2 Nun bewies Ptolemäus im dritten Lehrsatz des ersten Buchs des Almagest, daß der Unterschied zwischen der Fläche aus der Sehne eines von zwei Bögen mit der Sehne der Ergänzung des anderen und der Fläche aus der Sehne der Ergänzung jenes Bogens mit der Sehne des anderen gleich der Fläche aus dem Durchmesser mit der Sehne des Unterschieds zwischen beiden Bögen ist. Ferner bewies er im vierten Lehrsatz desselben [Buchs], daß die Summe der Fläche aus der Sehne eines von zwei Bögen mit der Sehne des anderen
3 und der Fläche aus der Sehne [der Ergänzung] ihrer Summe mit dem Durchmesser gleich der Fläche aus der Sehne der Ergänzung eines der beiden Bögen mit der Sehne der Ergänzung des anderen ist. Also ist die Summe des Quadrats der Sehne eines Bogens und der Fläche aus der Sehne [der Ergänzung] seines Doppelten mit dem Durchmesser gleich dem Quadrat der Sehne der Ergänzung jenes Bogens.

4 Wenn diese Regeln klar sind, gehen wir dazu über, die Sehne von anderthalb Teilen zu bestimmen, ferner das zu prüfen, was nach Abul-Wafā's Meinung die Sehne von einem halben Teil ist, seinen Fehler bei der Rechnung aufzuzeigen, die Sehne von einem halben Teil anzugeben und ihre Richtigkeit zu prüfen. Die Rechnung ist folgende:

Erklärung der Rechnung											
	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Seiten	Sechsten	Oktaven
Fünffmal das Quadrat des Viertels des Durchmessers, d. h. die Summe aus dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers und einem Viertel davon	1	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Die Wurzel daraus, d. i. die Summe aus der Zehneckseite und einem Viertel des Durchmessers, d. i. hz	0	1	7	4	55	20	29	39	6	54	20
Ziehen wir davon ein Viertel des Durchmessers ab, so bleibt alle Zehneckseite übrig, d. i. dz	0	0	37	4	55	20	29	39	6	54	20
Die Summe aus ihrem Quadrat und dem Quadrat der Hälfte des Durchmessers, d. i. das Quadrat der Fünfeckseite	1	22	55	4	39	30	20	53	5	40	0
Die Fünfeckseite, d. i. hz	0	1	10	32	3	13	44	21	54	54	55
Also ist die Linie gz, d. i. die Sehne von drei Zehnteilen, nämlich die Sehne der Ergänzung von einem Fünftel des Kreises zur Hälfte desselben	0	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20
Die Sehne von einem Drittel des Kreises, d. h. der Ergänzung von einem Sechstel, die im vierten Abschnitt vorkam	0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	41
Die Fläche aus der Sehne des Sechstels mit der Sehne der Ergänzung des Fünftels	1	37	4	55	20	29	39	0	54	20	0
Die Fläche aus der Sehne des Fünftels mit der Sehne der Ergänzung des Sechstels	2	2	10	7	56	1	47	59	39	39	50
Der Unterschied zwischen beiden		25	5	12	35	32	8	51	45	13	50
Teilen wir ihn durch den Durchmesser, so kommt die Sehne des Drittels des Zehnteils des Kreises, d. h. die Sehne von zwölf Teilen heraus	0	0	12	32	36	17	46	4	25	52	37
Ihr Quadrat	0	2	37	20	14	11	20	10	37	39	52
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von 108 Teilen übrig	3	57	22	39	45	48	39	40	22	20	8
Die Wurzel daraus	0	1	59	20	33	27	31	40	36	15	34
Fügen wir dann zu dieser Wurzel den Betrag des Durchmessers, erhöhen ⁽¹⁴⁾ es um eine Stelle und ziehen die Wurzel daraus, so ergibt sich die Sehne von 174 ⁽¹⁴⁾ [Teilen]		1	59	50	7	57	32	27	1	7	40
Fügen wir den Durchmesser zu dieser Wurzel, erhöhen ⁽¹⁴⁾ es um eine Stelle und ziehen die Wurzel daraus, so ergibt sich die Sehne [von 177]		1	59	57	31	57	51	49	7	9	7
Ebenso erhalten wir die Sehne von 178° 30'.		1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Ziehen wir ihr Quadrat, d. h. das Erhöhte der Summe aus dem Durchmesser und der vorhergehenden Sehne von 177 vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von anderthalb Teilen übrig	0	0	2	28	2	8	11	32	50	53	
Die Wurzel daraus, d. i. die Sehne von anderthalb Teilen	0	0	1	34	14	42	13	1	57	12	
Zur Unterscheidung von den aus der Rechnung erhaltenen Nullen haben wir in die von Ziffern freien Zellen Nullen in Rot eingetragen											

19) Es: quadrieren.

29) Es: 177.

39) Es: quadrieren.

Erklärung der Rechnung	Erste Berechnung. Nachprüfung des [Wertes], den Abul-Wafā' für die Sehne eines halben Teils ansah										Zweite Berechnung. Nachprüfung des [Wertes], den wir als [Sehne] eines halben Teils angaben										
	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven
Ist die Sehne eines Bogens	0	0	0	31	24	55	51	55			0	0	0	31	24	56	58	35	58	41	47
so ist ihr Quadrat	0	0	0	16	26	56	8	20	52	31	0	0	0	16	26	57	15	2	9	40	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt als Quadrat der Sehne seiner Ergänzung übrig	3	59	59	43	33	3	51	39	7	29	3	59	59	43	33	2	44	57	50	14	
Sehne seiner Ergänzung	0	1	59	59	55	53	15	53	41	11	0	1	59	59	55	53	15	37	0	47	20
Ziehen wir das Quadrat der Sehne dieses Bogens vom Quadrat der Sehne seiner Ergänzung ab, so bleibt die Fläche aus dem Durchmesser mit der Sehne der Ergänzung des Doppelten dieses Bogens übrig	3	59	59	27	6	7	43	18	14	58	3	59	59	27	6	5	29	55	40	29	
Tellen wir sie durch den Durchmesser, so kommt die Sehne der Ergänzung des Doppelten jenes Bogens heraus	0	1	59	59	43	33	3	51	39	7	0	1	59	59	43	33	2	44	57	50	14
Ihr Quadrat	3	59	58	54	12	19	57	10	29	59	3	59	58	54	12	15	30	25	53	27	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne des Doppelten jenes Bogens übrig	0	0	1	5	47	40	2	49	30	1	0	0	1	5	47	41	29	31	0	33	
Ziehen wir daraus die Wurzel, so ergibt sich die Sehne des Doppelten jenes Bogens	0	0	1	2	49	49	40	38	42	4	0	0	1	2	49	51	48	0	25	27	14
Fläche aus der Sehne jenes Bogens mit der Sehne seines Doppelten	0	0	0	32	53	51	9	3	13	51	0	0	0	32	53	53	22	25	38	44	35
Fläche aus der Sehne der Ergänzung des einen von beiden mit der [Sehne der] Ergänzung des anderen	3	59	59	18	52	40	38	19	7	39	3	59	59	18	52	37	51	35	56	7	31
Unterschied	3	59	58	45	58	49	29	15	53	48	3	59	58	45	58	44	29	10	17	22	50
Tellen wir ihn durch den Durchmesser, so kommt die Sehne der Ergänzung des Dreifachen jenes Bogens heraus	0	1	59	59	22	50	24	44	37	57	0	1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Ihr Quadrat	3	59	57	31	58	1	48	15	17	18	3	59	57	31	57	51	48	7	9	7	
Ziehen wir es vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne des Dreifachen jenes Bogens übrig	0	0	2	28	1	58	11	44	42	42	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Also ist die Sehne des Dreifachen jenes Bogens	0	0	1	31	14	39	7	59	49	35	0	0	1	31	14	42	19	1	57	12	

Nachdem wir aus der Sehne, die Abul-Wafā' für die Sehne eines halben Teils ansah, 22a die Sehne des Dreifachen ihres Bogens erhalten haben, welche 1 34 14 39 7 59 beträgt, wie aus dem Schluß der Tafel der ersten Berechnung [hervorgeht], und diese um drei Terten, elf Quarten und einen Bruch kleiner als die Sehne von anderthalb Teilen ist, die wir in der vorhergehenden Tafel zu 1 34 14 42 19 1 herausbekamen, so erkennt man, daß sie (Abul-Wafā's angebliche Sehne von $\frac{1}{2}$) annähernd um den dritten Teil des angegebenen Unterschieds kleiner als die Sehne eines halben Teils ist, daß also der Umfang, den er daraus erhielt, nicht richtig ist. Das aber, was am Schluß der Tafel der zweiten Berechnung herauskommt, stimmt mit der wirklichen Sehne von anderthalb Teilen überein, [woraus] man erkennt, daß der von uns als Sehne eines halben Teils angegebene [Wert], der an der Spitze der Tafel der zweiten Berechnung steht, richtig ist.

Was nun die Nachprüfung der Sehne von zwei Teilen betrifft,

so ist das in die 3. Reihe der zweiten Berechnung Gesetzte das Quadrat der Sehne der Ergänzung von einem Teile und beträgt	3	59	58	54	12	15	30	25	50	27	
Ziehen wir nun den Durchmesser von dem um eine Stelle Erniedrigten dieser [Zahl] ab, so bleibt die Sehne der Ergänzung von zwei Teilen übrig	0	1	59	58	54	12	15	30	25	59	27
Also ist ihr Quadrat	3	59	58	36	50	14	10	45	21	7	51
Ziehen wir das nun vom Quadrat des Durchmessers ab, so bleibt das Quadrat der Sehne von zwei Teilen übrig	0	0	4	23	9	45	49	11	38	52	9
Also ist die Wurzel daraus, d. i. die Sehne von zwei Teilen, aufs Richtige	0	0	2	5	39	26	22	29	28	32	25

Tafel 22a
unten links

Da Abur-Raiḥān (al-Birūnī) sie bei der Bestimmung des Umfangs des Vielecks zu 2 5 39 43 36 ansetzte, erkennt man, daß er sich darin irrte, indem dies um siebzehn Terten und vierzehn Quarten größer als das Richtige ist, obwohl er den Sinus von einem Teil, 10 der die Hälfte der Sehne von zwei Teilen ist, richtig in die Tafel setzte.

Dies ist das Letzte von dem, was wir auseinandersetzen wollten, und Lob sei Gott, dem Herrn der Weltbewohner.

Es endet die Schrift mit Hilfe Gottes, des Freigebigen.

II.

ERLÄUTERUNGEN

Bemerkungen über die Handschrift, den Text und die Übersetzung

Die der Übersetzung zugrunde liegende Hs befindet sich im Armeemuseum zu Istanbul (Nr. 756). Ich benutzte eine Wiedergabe der in der Öffentlichen Wissenschaftlichen Bibliothek [ehemals Preußischen Staatsbibliothek] zu Berlin befindlichen, 1933 erworbenen Photographie (*Ms. simul. or. 60*) der Hs. Diese ist in einem hübschen, sehr gleichmäßigen und gut lesbaren Nashī geschrieben, das nach dem Urteil von Herrn Bibliotheksrat WEISWEILER in Berlin dem zehnten oder vielleicht eher dem elften Jahrhundert der Hīgrā, d. i. dem 16. oder 17. Jahrhundert unserer Zeitrechnung angehört. Die Größe des Schriftspiegels im Original ist mir nicht bekannt; auf meinen Kopien ist der Spiegel etwa 11 cm breit und 17 bis 19 cm hoch. Eine Seite, deren Text nicht durch Zahlentafeln unterbrochen ist, hat 24 bis 28 Schriftzeilen.

Eine Numerierung der Blätter in der Hs kann ich auf den Lichtbildern nicht entdecken. Anscheinend wurden die Blätter erst bei der Herstellung der Lichtbilder durch Auflegen gedruckter Nummern mit 1 bis 22 numeriert. Auf der Vorderseite jedes Blattes wurde die Blattnummer an den oberen, auf der Rückseite an den unteren Rand gesetzt. Dementsprechend bezeichne ich die Seiten mit 1*b* bis 22*a*. Der Inhalt erweist, daß die mit 19 und 20 numerierten Blätter vertauscht sind. Blatt 20 enthält nämlich die Abschnitte 7, 8 und den Anfang von Abschnitt 9, Blatt 19 den Schluß von Abschnitt 9, nämlich die zu den Darlegungen dieses Abschnitts gehörigen Beispiele. Die Umstellung scheint schon der Handschrift eigen zu sein, denn auf S. 20*b* steht unten als Anschlußwort für das folgende Blatt الفصل, und mit diesem Worte fängt die Seite 21*a* an, nicht aber die Seite 19*a*, die in Wahrheit folgen mußte. Die Seiten 18*b*, 19*a*, 20*a* haben keine Anschlußwörter; 19*b* hat ebenso wie 19*a* الفصل, was sowohl zu dem Anfang von 20*a* paßt, wie zu demjenigen von 21*a*, der bei richtiger Anordnung folgen muß. Ich behalte die vermutlich der Blätterfolge der Hs entsprechende falsche Numerierung bei und so kommt es, daß die am Rande der Übersetzung angegebenen Seitenbezeichnungen in der Anordnung 18*b*, 20*a*, 20*b*, 19*a*, 19*b*, 21*a* aufeinander folgen.

Bei einzelnen, in dem Lichtbild schwach herausgekommenen Wörtern und Zahlen vermute ich, daß sie in der Hs rot geschrieben sind. So scheinen in der Überschrift der Rechnung auf Taf. 18*a* die Wörter für Quarten, Quinten, Sexten usw. abwechselnd rot und schwarz, in den Tafeln auf 19*b* die Anschriften „Umfang“, „Rest“ schwarz und die Anschriften „Das, was wir aufsuchten“ rot geschrieben zu sein. Diese Farbenunterschiede bei Wörtern gebe ich in der Übersetzung nicht wieder. Als Multiplikatoren in den Tafeln 18*a* oben, 18*b*, 19*a*, 19*b*, 20*b* anscheinend rot geschriebene Ziffern mache ich durch Fettdruck kenntlich. Auch ziehe ich den Strich, der sie von den übrigen Ziffern trennt, fett aus. (In der Tafel 21*a* Mitte erscheint dieser Trennungsstrich rot.) Ebenso verfare ich der Gleichmäßigkeit halber bei den Multiplikatoren der Tafel 20*b*, obwohl diese in der Hs anscheinend schwarz geschrieben sind.

Die Strichlängen in den Tafeln gebe ich nach der Hs wieder; nur in einigen wenigen Fällen verbessere oder ergänze ich Striche stillschweigend im Sinne des sonst in der Hs Beobachteten.

Die wegen der Linksläufigkeit der arabischen Schrift in der Urschrift von rechts nach links geschriebenen Sechzigerzahlen übersetze ich durch rechtsläufig geschriebene. Wo aber K. im Text den Operationen mit Sechzigerzahlen diejenigen mit den von ihm ebenso wie von uns rechtsläufig geschriebenen Zehnerzahlen vergleichend gegenüberstellt, mußte ich die Wörter „links“ und „rechts“ so stehen lassen, wie sie auf die arabische Schreibung der Sechzigerzahlen zutrifft.

Auch in den Tafeln kehrte ich die linksläufige Folge der Spalten in die rechtsläufige um. Weil aber, wie ich soeben schon bemerkte, im Arabischen die mit den sogenannten indischen Ziffern geschriebenen Zehnerzahlen wie bei uns von links nach rechts im Stellenwert fallen, so stimmen natürlich in der Tafel 20b die den Stellen der Vielfachen von 2π zukommenden Spalten der Übersetzung in der Rechtsläufigkeit mit der Urschrift überein. Man kann nun schwanken, ob man die mit „Zahlen“ überschriebene Spalte der Multiplikatoren wie im Urtext neben die niedrigste Stelle der Vielfachen setzen soll. Denn das heißt für den Leser des Arabischen: sie sind *vor* die Vielfachen gesetzt, für uns aber: *hinter* sie. In der genannten Tafel habe ich die Multiplikatoren so gesetzt, wie sie im Urtext stehen, d. h. an den rechten Rand der Tafel; in den späteren, entsprechenden Fällen (19a, 19b) schrieb ich sie vor die höchste Stelle der Vielfachen.

In den Figuren, deren Bezeichnung durch Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 von mir hinzugefügt ist, brauchte ich rechts und links nicht zu vertauschen, da im Text bemerkenswerterweise im Gegensatz zu dem sonst in arabischen mathematischen Texten Üblichen der erste Buchstabe Alif an die *linke* Ecke der Figur gesetzt ist. So stimmt die von K. aus dem *Almagest* I, 10 (I, S. 32 HEIBERG) entnommene Fig. 3 auch hinsichtlich rechts und links mit dem griechischen Original überein, während z. B. in *aṭ-Ṭūsī's* Übersetzung der *Elemente* nach dem römischen Druck von 1594 in typischen Fällen, z. B. beim pythagoreischen Lehrsatz, die Figur gegenüber dem griechischen Urtext an einer rechts und links vertauschenden Achse gespiegelt erscheint.

Eine Eigentümlichkeit des Verfassers ist es, zuweilen einen Satz des laufenden Textes in einer Rechentafel weiter- und zu Ende zu führen, so daß die Rechentafel sich an ein bestimmtes Wort des laufenden Textes anschließt. In der Hs steht die Tafel nicht immer genau an der betreffenden Stelle.

In die Felder von Über- und Unterschriften der Rechentafeln nicht eingetragene Wörter habe ich ergänzt. Vielleicht war allerdings zuweilen die Ausfüllung nicht beabsichtigt, so Tafel 19a, wo in der Hs bei den Unterschriften der Tafel nur die Stellenwerte der ersten und letzten Stellen eingetragen sind.

Zahlen schrieb ich in Worten oder in Ziffern, je nachdem wie sie in der Hs geschrieben sind. Die Gummaziffern (Buchstaben-ziffern) der Sechzigerzahlen gab ich durch Ziffern der Antiquaschrift wieder, die „indischen“ Ziffern dagegen, mit denen die Zahlen im Zehnergefüge geschrieben sind, durch kursive Ziffern. Die am unteren Rand der 29 Berechnungstafeln, z. B. derjenigen der Tafeln 3b—17b stehenden „indischen“ Ziffern sind in der Hs in sinnloser Weise so gedrängt geschrieben, daß der Eindruck mehrstelliger Zahlen entsteht. Nachdem ich diese Ziffern als Merkmahlen der Sechzigerübertragungen erkannt hatte, schrieb ich sie unter die Stellen, unter die sie gehören.

Sowohl die Gummaziffern wie die indischen Ziffern sind erfreulich deutlich geschrieben und weitaus in den meisten Fällen richtig. Nur wenige Ziffern, die nach dem Zusammenhang sicher falsch sind und wahrscheinlich dem Abschreiber oder seinen Vorgängern zur Last fallen, verbessere ich in der Übersetzung, natürlich unter Angabe des Befundes in der Hs.

Den in der Hs, abgesehen von den Abschnittsüberschriften und Tafeln, ununterbrochen weiterlaufenden Text suche ich in der Übersetzung durch Absätze übersichtlicher zu gestalten.

Ich war bemüht, getreu und genau zu übersetzen. Da, wo ich mir kleine Freiheiten gestatte, indem ich etwa ein Possessivsuffix unübersetzt lasse oder eine Einzahl durch eine Mehrzahl übersetze oder umgekehrt, oder eine passive Wendung durch eine aktive, geschieht es, um der deutschen Sprache keine Gewalt anzutun.

Der Gleichmäßigkeit zuliebe geschmiedete Bezeichnungen von Sexagesimalstellen wie „Tredezime“, „Oktodezime“ wolle man hinnehmen, obwohl sie nicht nach den lateinischen Ordnungszahlen gebildet sind.

In der Tafel 18a (oben) übersetze ich das Wort *al-madrūb* einmal mit Multiplikand, das andere Mal mit Multiplikator. Ich vermute, daß hinter dem mit Multiplikator übersetzten Wort ein *fihi* ausgefallen ist. Der S. 27 (9. Z. v. u.) zugrunde liegende arabische Ausdruck für den goldenen Schnitt entspricht dem von Euklid gebrauchten. Auch an der Stelle S. 28, 1. Z. liegt die wörtliche Übersetzung einer bekannten griechischen Redeweise vor: *qawiya* mit *'alā = ἴσον δύνασθαι* mit dem Dativ. Wörtlicher könnte man hier übersetzen: „und die den beiden in der Potenz gleiche *bz* ist die Sehne . . .“

Statt der wörtlichen Übersetzung ‚Vieleck im Kreis‘, ‚Vieleck auf dem Kreis‘ gebrauchte ich die uns geläufigen Ausdrücke ‚einbeschriebenes‘ und ‚umschriebenes Vieleck‘. Mit ‚Ergänzung‘ eines Bogens ist seine Ergänzung zu 180° gemeint, also das, was man auch ‚Supplement‘ nennt. ‚Wurzel‘ bedeutet nur ‚Quadratwurzel‘. Für Wurzeln höheren Grades hatte man andere Ausdrücke. (Vgl. Nachtrag).

Mängel rein sprachlicher Art, die dem Text oder nur der zugrunde gelegten Hs anhaften, sowie offenbare Schreibfehler verbessere ich stillschweigend und erwähne sie weder in der Übersetzung noch bei der Erläuterung, wenn sie den mathematischen Inhalt nicht berühren. Wer die Hs nachprüft, wird wohl in allen diesen Fällen von selbst sehen, wie ich den Text gelesen oder verbessert habe.

Auffallend sind — diese Schlußbemerkung richtet sich an den sprachkundigen Leser — im Text der Hs gewisse in ihrer Art wiederkehrende Verstöße gegen die arabische Sprache, darunter besonders das Fehlen des Artikels an Stellen, wo die Grammatik ihn fordert, oder sein Gebrauch an Stellen, wo er fehlen muß. Solche Fehler, wie auch einige Fehler in der Wortschreibung, liegen für einen Verfasser oder Abschreiber nahe, dessen Muttersprache das Persische ist. Ich vermerke ohne Anspruch auf Vollständigkeit folgende Stellen:

- 2a7 بالشكل الثلاثين statt بالشكل الثلاثين
 2b2 بشكل العروس statt بالشكل العروس
 18a10 خارج القسمة statt خارج قسمت
 18a18—19 المحيط الحقيقي للدائرة statt محيط الحقيقى للدائرة
 19a letzte Zeile غاية statt غاييت
 19b6 اعلی المراتب statt اعلى مراتب
 19b19 للاعداد الطولية statt لاعداد الطولية
 20a14 لربع العمل statt لربع العمل
 20a21 هذه التقادير statt هذا التقادير
 21a3 بالحساب المشهور statt بحساب المشهور
 22a1—2 اخر جدول العمل الاول statt اخر الجدول العمل الاول

Da auch an der Stelle *Isb 1* in dem Vers das undeterminierte *حجيت* auffällt, so erhebt sich die Frage, ob solche Verstöße gegen die arabische Sprache auch schon in dem authentischen Text des Verfassers vorkamen.

Die vorkommenden Längenmaße und astronomischen Entfernungen

In anschaulicher Weise bemüht sich K., dem Leser die bei den verschiedenen Näherungswerten von π verbleibenden Fehlerintervalle an Beispielen großer Kreise im Weltenraum lebendig vorstellbar zu machen. Die hierbei in der Einleitung und an späteren Stellen der Schrift vorkommenden Längenmaße gebraucht er, wie aus der Tafelrechnung von S. 6 hervorgeht, in folgender gegenseitiger Größenbeziehung:

1 Farsang = 12000 Ellen

1 Elle = 24 Finger

1 Finger = 6 Breiten eines mittleren Gerstenkorns

1 Breite eines mittleren Gerstenkorns = 6 Dicken eines Mähnenhaars des Pferdes. Außerdem ist in der Einleitung als Beispiel für irgendein Längenmaß die Rute genannt.

Wie besonders die Quellenstudien von H. SAUVAIRE¹⁴⁾ zeigen, werden die obigen Größenbeziehungen auch sonst im Schrifttum verschiedener Zeiten oft angegeben. Der Farsang ist als ursprünglich altpersisches Wegemaß („die Parasange“) den Lesern von Herodot und Xenophon bekannt. Auf die mannigfaltigen, im Lauf des Mittelalters in den verschiedenen Ländern des Islam eingeführten Ellen kann hier nicht eingegangen werden. Es sind mir keine Angaben darüber bekannt, welche Elle in Samarkand zur Zeit K.s gebräuchlich war. Die bei der Gradmessung unter al-Ma'mūn (813—833) verwandte sogenannte „schwarze Elle“¹⁵⁾ zu 24 Fingern scheint man von den Persern übernommen zu haben; sie hatte wie die neubabylonische Elle eine Länge zwischen 49 und 50 cm. Die Beziehungen 1 Elle = 24 Finger, 1 Finger = 6 Breiten eines Gerstenkorns bestanden schon bei den entsprechenden sumerisch-babylonischen Maßen. Die islamischen Schriftsteller geben gewöhnlich an, daß die Gerstenkörner mit dem „Bauch“ des einen an den „Rücken“ des anderen zu legen sind. Für die 6 auf ein Gerstenkorn entfallenden Haarbreiten wird nach SAUVAIREs Übersetzungen meistens ein Schwanzhaar des Maultiers (un crin de la queue d'un mulet) zugrunde gelegt.

Auch die Rute oder das Rohr kommt schon als babylonisches Längenmaß vor. Für das Rohr wird in islamischer Zeit ebenso wie für das babylonische Rohr eine Länge von 6 Ellen angegeben. Auch Angaben wie $6\frac{2}{3}$ Ellen, $7\frac{1}{7}$ Ellen, $7\frac{1}{2}$ Ellen, $7\frac{2}{3}$ Ellen, 8 Ellen findet man in arabischen Texten je nach der zugrunde gelegten Elle¹⁶⁾.

¹⁴⁾ H. SAUVAIRE, Matériaux pour servir à l'histoire de la numismatique et de la métrologie musulmanes. 4. partie: Mesures de longueur et de superficie. Journal asiatique (5) 8 (1886), S. 479—536. — S. auch J. A. DECOUDEMACHE, Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes, Paris 1909; A. SEGHE, Metrologia e circolazione monetaria degli antichi, Bologna 1928; FRITZ SCHMIDT, Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. Veröff. d. Pfälz. Ges. z. Förd. d. Wiss. 24, Neustadt a. d. H. 1935. — Weiteres Schrifttum findet man in einigen der folgenden Artikel der Enzyklopaedie des Islām angegeben: *Dhīrā'* (I, S. 1000), *Farsakh* (II, S. 73), *Ḥabba* (II, S. 196), *Isba'* (II, S. 564), *Kafiz* (II, S. 666), *Ḳarasfūn* (II, S. 810).

¹⁵⁾ Über eine Erklärung dieses Namens, die im Gegensatz zu der herkömmlichen, von den arabischen Schriftstellern gegebenen steht, vgl. D. R. WRIGHT in seiner Ausgabe von al-Bīrūnī's *Taḥṣīm*: The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology by ... al-Bīrūnī, London 1934, S. 119—120.

¹⁶⁾ Neben dem von K. gebrauchten Wort *qasaba* kommt für das Rohr noch eine andere Bezeichnung vor, die von SAUVAIRE als *bāb*, von DIETERICI und VAN VLOTEN als *nāb* gelesen wird. Die letztere Lesung scheint die richtige zu sein. Vgl. FR. DIETERICI, Die Abhandlungen der Ichwān es-Safā in Auswahl, Leipzig 1886, S. 144, Z. 3 v. u.; Liber Maḥāthir al-'Olām ed. G. VAN VLOTEN, Leiden 1895, S. 11, Z. 8. VAN VLOTEN verweist auf VULLERS unter *ناب* und *ناب*.

Die von den Astronomen des Kalifen al-Ma'mūn ausgeführte Gradmessung¹⁹⁾ ergab für einen Meridiangrad die Länge von $56\frac{2}{3}$ Meilen, die Meile zu 4000 schwarzen Ellen gerechnet. Das ergibt für den Umfang eines Großkreises der kugelförmig gedachten Erde 20400 Meilen oder, da 3 Meilen einen Farsang bilden, 6800 Farsang. A. NALLINO kommt in seiner Untersuchung der arabischen Gradmessung²⁰⁾ zu dem Ergebnis, daß die arabische Meile 1793,2 m betrug, was einer Elle von 493,3 mm entspricht. Nach einer anderen, schon von Sanad b. 'Alī (9. Jahrh.) angewandten Methode, nämlich durch Messung des Erniedrigungswinkels, unter dem der Horizont des Meeres oder einer großen Ebene vom Gipfel eines Berges bekannter Höhe aus erscheint, kam al-Bīrūnī (973—1048) zu einem ähnlichen Wert wie die Astronomen al-Ma'mūn's²¹⁾. Im *Taḥḥīm*¹⁷⁾ (S. 118) gibt al-Bīrūnī den Erddurchmesser zu $2163\frac{1}{2}$ Farsang an, was in naher Übereinstimmung mit der Umfangsgröße 6800 Farsang steht, denn $2163\frac{1}{2} \cdot \pi \approx 6796$.

K. nimmt nach S. 3 den Erddurchmesser annähernd gleich $5 \cdot 497$ Farsang = 2485 Farsang an und gebraucht an der Stelle S. 6 (Spalte 3 der Tafel) für den „Umfang der Erde“ den runden Wert 8000 Farsang. $2485 \cdot \pi$ ergibt rund 7807.

Für den Durchmesser des Tierkreises (*ḡalak al-burūḡ*)²²⁾ gibt al-Bīrūnī im *Taḥḥīm*¹⁷⁾ (S. 118) $44964005\frac{25}{33}$ Farsang an. Die nächste Entfernung der Fixsterne ist nach derselben Schrift (S. 116) $20\,774\frac{39}{50}$ Erdhalbmesser und nach S. 117: $22\,974\,394\frac{1}{11}$ Farsang, ein Wert, der sich von dem auf den Halbmesser des Tierkreises entfallenden relativ wenig unterscheidet. Als nächste Entfernung der Fixsterne wird al-Bīrūnī seinen Wert für die größte Entfernung des Saturn angesetzt haben, denn er sagt (*Taḥḥīm* S. 116): „Bei den Astronomen wird zugrunde gelegt, daß die größte Entfernung jedes Sterns gleich der kleinsten Entfernung des darüber befindlichen Sterns ist.“

Da K. (S. 3) erklärt, die dem Archimedischen Kreisumfang anhaftende Unsicherheitsspanne von $\frac{1}{497}$ Durchmesser betrage für den Gürtel des Tierkreises (*minṭaqat ḡalak al-burūḡ*) weit mehr als 10^5 Farsang, so setzt er für diesen Kreis einen Durchmesser von weit mehr als 49 700 000 Farsang voraus, also einen größeren Betrag als al-Bīrūnī.

Der nach S. 26 von aš-Šīrāzī († 1311), dem Verfasser der Kaiserlichen Gabe, für den Halbmesser der Fixsternsphäre angegebene Wert von $70\,073\frac{1}{2}$ Erddurchmessern übertrifft den von al-Bīrūnī für die nächste Entfernung der Fixsterne angenommenen Wert von etwa 10 387 Erddurchmessern um ein Mehrfaches. Das Studium von al-Bīrūnī's Mas'ūdi'schem Kanon und von aš-Šīrāzī's Kaiserlicher Gabe wird vielleicht aufklären, wie die Verfasser zu ihren Zahlen kamen.

Messung von Bögen und Sehnen. Bogenfunktionen

Wie Ptolemäus benutzen die islamischen Mathematiker als Einheit der Messung von Kreisbögen den 360-ten Teil des Umfangs, den sie als ‚Grad‘ bezeichnen und sexagesimal in Minuten, Sekunden usw. unterteilen. Ebenfalls nach dem Vorbild der hellenistischen

¹⁹⁾ Zu den von H. SUTER (Die Mathematiker und Astronomen der Araber usw., Leipzig 1900, S. 209) gemachten Quellenangaben über diese Gradmessung vergleiche man noch al-Bīrūnī's Mitteilungen im *Taḥḥīm*¹⁷⁾ S. 118—119, Nr. 208, im *Taḥḥīm* (Hs Istanbul, Fāṭih 3386 = Berlin MS simul. or. 36, S. 231—239) und im 7. Kapitel des 5. Buchs seines Mas'ūdi'schen Kanons.

²⁰⁾ A. NALLINO, Il valore metrico del grado di meridiano secondo i geografi arabi. *Cosmos di GUIDO CORA* 11 (1892-93, fasc. I-IV). — Vgl. A. NALLINO, Al-Battānī I, Mailand 1903, S. 164-165.

²¹⁾ Al-Bīrūnī, Schrift über das Astrolab, Hs Berlin Pet. 672 (AHLWARDT 5, S. 228), 43a—43b; *Taḥḥīm*¹⁷⁾ S. 239 bis 245; *Taḥḥīm*¹⁷⁾ S. 119; Mas'ūdi'scher Kanon, Buch 5, Kap. 7. — Vgl. E. WIEDEMANN, Bestimmung des Erddurchmessers von al-Bīrūnī. *Archiv f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Techn.* 1 (1908), S. 66—69.

²²⁾ Über den Tierkreis vgl. den Artikel *Minṭaqat* in der *Enzykl. d. Islām* III, S. 577—581.

Trigonometrie dient der islamischen als Maß der Sehnen der 120-te Teil des Durchmessers. Diese Einheit wird als ‚Teil‘ bezeichnet. Zum Unterschied vom ‚Grad‘, für den ebenfalls die Bezeichnung ‚Teil‘ vorkommt, werde $\frac{1}{120}$ des Durchmessers als ‚Durchmesserteil‘ bezeichnet. Der Durchmesserteil ist etwas kleiner als der Grad, es ist nämlich 1 Durchmesserteil $= \frac{3}{\pi}$ Grad. Umgekehrt hat der Kreisumfang $360 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 360 \cdot 1 \frac{1}{21} = 377 = 377 \frac{1}{7}$ Durchmesserteile. Wir werden sehen, daß K. gelegentlich von dieser Messungsweise von Bögen durch Durchmesserteile Gebrauch macht; sie entspricht der Winkelmessung durch das ‚Bogenmaß‘ der modernen Mathematik, und ein Durchmesserteil ist $\frac{1}{60}$ der Einheit des modernen Bogenmaßes. Auch der Durchmesserteil wird sexagesimal in Minuten usw. untergeteilt. Wenn wir mit K. schlechtweg von Minuten, Sekunden usw. sprechen, meinen wir diese sexagesimalen Unterteile des Durchmesserteils. Zur Unterscheidung von ihnen bezeichnen wir die sexagesimalen Unterteile des Grad als ‚Gradminuten‘ usw. Teilen wir den Halbmesser $r = 1$ sexagesimal, so sprechen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, nicht von n Minuten usw., sondern sagen nur $n \cdot 60^{-1}$ usw.

Den in Durchmesserteilen gemessenen Sinus eines Bogens a bezeichnen wir mit $\sin a$, die in Durchmesserteilen gemessene Sehne eines Bogens a mit $\text{Chord } a$. Gehört in einem Kreise vom Durchmesser $d = 2r$ zum Bogen a der Zentriwinkel α , so ist

$$\sin a = r \sin \alpha = 60 \sin \alpha \quad \text{Durchmesserteile}$$

$$\cos a = r \cos \alpha = 60 \cos \alpha \quad \text{Durchmesserteile}$$

$$\text{Chord } a = 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 120 \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{Durchmesserteile}$$

$$\text{Chord } (180^\circ - a) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} = 2r \cos \frac{\alpha}{2} = 120 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{Durchmesserteile}$$

In den Erläuterungen werden wir die Rechnungen wiederholt dadurch vereinfachen, daß wir zu $r = 1$ und den modernen Funktionen $\sin$, $\cos$ übergehen. K. kannte die Vorteile der schon von Abul-Wafā' al-Būzāḡānī (940–998) eingeführten Erleichterung $r = 1$, legte aber seinen Sehnenrechnungen den Halbmesser $r = 60$ zugrunde, weil die trigonometrischen und astronomischen Tafelwerke seiner Zeit dies taten.

Zur Einleitung

Die Lobpreisung bezieht Gottes Allwissenheit auf Mathematisches und insbesondere auf die Irrationalzahl π . Im ‚Schlüssel des Rechnens‘, (Buch 4 Kap. 4 Abschn. 2) sagt K. nach der Erörterung mehr oder weniger genauer Näherungswerte des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser: „Aber in Wahrheit kennt es nur Gott der Gepriesene und Erhabene.“ Darin liegt wohl eine Hindeutung auf die Irrationalität von π . (Vgl. Nachtrag).

In dem Segenswunsch auf den Propheten ist dieser als „der Umfang der Durchmesser der rechten Leitung und des Rechts“ (*muḥīṭ aqtār al-hidāya wal-'adāla*) bezeichnet. Die Übersetzung wird dem Doppelsinn der arabischen Worte nicht gerecht, die man auch so übertragen kann: „der die Gegenden (Himmelsstriche) der rechten Leitung und des Rechts Umfassende“. Wie das Wort *muḥīṭ* = der oder das ‚Umfassende‘, der ‚Umfang‘ (auch der ‚Ozean‘, der die Länder umgibt) hier auf den Propheten angewandt wird, so finden wir es oft auf Gott bezogen. Bei den „Treuen Freunden“ heißt es: „Wie die Eins das alle Zahlen Umfassende ist, so ist Gott der Umfassende aller Dinge“ (DIETERICI¹³) S. 141 Z. 8–7 v. u.).

In diesem Zusammenhang seien noch einige Beispiele für das Hineinspielen von Mathematischem in Theologisches und für mathematisch-theologische Wortspiele beigebracht. Ich ergänze damit die Hinweise, die ich zur Erläuterung des ersten Satzes des „Schlüssels“ gab, welcher lautet: „Lob sei Gott, der da einzig ist (*tawāḥḥada*) in der Hervorbringung der Einheiten, der da alleinig ist (*tajarrada*)²³ in der Zusammensetzung der Arten!“ Wiederholt finden wir in den Briefen der „Treuen Freunde“ den Schöpfer und die geschaffenen Dinge zu den Zahlen in Beziehung gesetzt, wie es die oben angeführte Stelle zeigt²⁴).

Nach dem mathematisch-astronomischen Teil des Katalogs arabischer Handschriften in Bankipur²⁵) teile ich einiges aus den Anfängen später Schriften über Rechnen und Geometrie mit:

S. 15—16 ist unter Nr. 2420 ein Werk „Hauptpunkte des Rechnens“ von Muḥammad Bāqir b. Zain al-ʿĀbidīn al-Yazdī (Anfang des 17. Jahrh.) genannt, das beginnt: „Lob sei Gott ob der vervielfältigten Vervielfachungen (*qurūb*, „Multiplikationen“) seiner Wohltaten, die er uns erwies, . . .“ Hinter dem Namen des Verfassers steht: möge Gott ihn (am jüngsten Tage) eine leichte Rechnung ablegen lassen!“ (Vgl. Koran, Ausg. Flügel, 84, 8).

S. 18 Nr. 2423. Ein Kommentar zum Rechenbuch von Bahāʿaddīn beginnt „Preis sei Gott, dem großen Einen und dem ewigen Einzigen“ („der großen Eins und der ewigen Ungeraden“)!

S. 21 Nr. 2426. Ein „Aufstieg der Geister zur Wissenschaft des Rechnens“ aus dem 17. Jahrh. fängt an: „Lob sei Gott, dessen Wissenschaft (Akk.) keine Zahl umfaßt“ (*yuhīl*).

S. 30 Nr. 2435. Ein später Kommentar zum ersten Buch des Euklidkommentars von al-Ṭūsī beginnt: „O Du, dessen Wohltaten einen Umfang haben, der Erde und Himmel umfaßt, und dessen einfaches Wesen zum Mittelpunkt von Lob und Preis geworden ist, . . .“

S. 31 Nr. 2437. Eine späte Schrift über die Winkel. Der in gereimter Prosa abgefaßte Beginn preist Gott unter anderem als den „Enthüller der verborgenen Dinge in den Winkeln“.

In einem kurzen geschichtlichen Rückblick kennzeichnet K. die Genauigkeit früherer Kreisberechnungen. Ist u_n der Umfang des einem Kreise vom Durchmesser d einbeschriebenen und U_n derjenige des umbeschriebenen n -Ecks, so schließt Archimedes²⁶) den Umfang u des Kreises in folgendes Intervall ein:

$$\Delta u_n = U_n - u_n = \left(\frac{10}{70} - \frac{10}{71}\right) d = \frac{d}{497}.$$

Bei einer Kreismessung, die K. dem Abul-Wafā' zuschreibt, beträgt diese Spanne

$$\Delta u_n = (12 \cdot 60^{-2} + 55 \cdot 60^{-3} + 12 \cdot 60^{-4}) \frac{d}{120} \approx \frac{3d}{100000}.$$

Unter der Voraussetzung $r = \frac{d}{2} = 1$ findet al-Bīrūnī

$$u_n \approx 6.16\ 59\ 10\ 48\ 0, \quad U_n \approx 6.17\ 1\ 53\ 19\ 6.$$

Also ist $U_n - u_n \approx 2 \frac{4}{5} \cdot 60^{-2}$ und für beliebiges d

$$\Delta u_n \approx \frac{7d}{18000}.$$

²³) 'adad fard = ungerade Zahl.

²⁴) S. z. B. DIETERICI¹³) S. 14, S. 14^v u. folgende, besonders S. 14^r. — Vgl. FR. DIETERICI, Die Proädeutik der Araber, Berlin 1865, S. 4—6.

²⁵) Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore 22, Calcutta 1937.

²⁶) Die von K. nicht erwähnte älteste islamische Darstellung einer Kreismessung, diejenige der Söhne des Mūsā b. Šākir, stimmt dem mathematischen Inhalt nach mit der des Archimedes überein. Vgl. Liber trium fratrum ed. M. CURTZE. Acta nova LEOPOLD. 49, 2 (1887), S. 125—130.

Sollte K. die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṭam ($\approx 965-1039$) kennengelernt haben, wie sie uns in der Berliner Hs²⁷, überliefert ist, so wundert es uns nicht, daß er sie nicht der Erwähnung wert findet; denn für die Berechnung des Zahlenwertes von π bedeutet sie keinen Fortschritt.

K. selbst will nun den Umfang u des Kreises vom Durchmesser d so genau berechnen, daß der Fehler von u wird:

$$f(u) < \frac{1 \text{ Haarbrette}}{8 \cdot 10^4 \text{ Erddurchmesser}} \cdot d.$$

Was K. von der Kreisberechnung des Archimedes berichtet, ist im letzten der drei Lehrsätze der auf uns gekommenen ‚Kreismessung‘ des großen Geometers enthalten (Arch. op. ed. Heiberg I², S. 236—242). Aber die Bemerkung (S. 3, 3. Abs.), Archimedes habe im ersten Lehrsatz des ersten Buches „seiner Schrift“ bewiesen, daß der Umfang eines umbeschriebenen Vielecks größer als der des Kreises ist, paßt nicht auf die uns erhaltene Fassung der Kreismessung des Archimedes. Da diese Fassung bekanntlich nicht diejenige sein kann, die Archimedes selbst seiner Schrift gab, so könnte jemand vermuten, daß dem K. die Übersetzung eines anderen, aus mehr als einem Buch bestehenden und ursprünglicheren Textes der Kreismessung des Syrakusaners vorlag. Näher liegt aber die Annahme, daß mit „seiner Schrift“ diejenige über Kugel und Zylinder gemeint ist; denn im ersten Lehrsatz des ersten Buches dieser Schrift (I², S. 10) beweist Archimedes, daß ein dem Kreis umbeschriebenes Vieleck größer als der Kreisumfang ist. Die Unklarheit bei K. könnte durch eine Auslassung in der von uns benutzten Hs verursacht sein. Auch muß man beachten, daß die kurze ‚Kreismessung‘ in den arabischen Handschriften auf die Schrift ‚Über Kugel und Zylinder‘ wie ein Anhang folgt.

Der 987 n. Chr. von Ibn an-Nadīm abgefaßte Fihrist nennt an der Spitze seiner Aufzählung von Werken des Archimedes: „Zwei Bücher über die Kugel und den Zylinder; ein Buch über die *Quadratur* (*tarbī*) des Kreises“. Ibn al-Qifṭī (1172—1248 n. Chr.) gibt ebenfalls diese beiden Titel an, außerdem aber vorher eine Schrift über „die Messung (*misāḥa*) des Kreises“; dieser Titel ist die genaue Übersetzung des Archimedischen Titels *κύκλου μέτρησις*.

Späteren islamischen Mathematikern waren die Schrift über Kugel und Zylinder und die Kreismessung als Glieder der Sammlung der ‚Mittleren Bücher‘ (*al-mutawassifāt*) geläufig, einer Zusammenstellung von Schriften, die im Lehrgang der mathematischen Wissenschaften zwischen den Elementen von Euklid und dem Almagest standen²⁸). Die meisten dieser Schriften waren Übersetzungen griechischer Werke. Schon Ibn al-Qifṭī spricht von den „Mittleren Schriften“. Aṭ-Ṭūsī (1201—1274), der viele arabische Übersetzungen klassischer mathematischer und astronomischer Werke überarbeitete, gab auch die mittleren Bücher heraus, und diese Sammlung von Aṭ-Ṭūsī, die uns in zahlreichen Handschriften erhalten ist²⁹), könnte unserem K. vorgelegen haben. Die sich in ihr an die Schrift über Kugel und Zylinder anschließende Redaktion der ‚Kreismessung‘ ist hier mit „Quadratur (*taksīr*) des Kreises“ betitelt. Es sind bisher keine Unterlagen dafür bekannt, ob die von den Biographen und Lexikographen angeführten Titel ‚Quadratur des Kreises‘ und ‚Messung des Kreises‘ voneinander verschiedene Werke bezeichnen.

²⁷) Vgl. H. SUTER, Die Kreisberechnung des Ibn al-Haiṭam. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 44 (1899), Hist.-lit. Abt. S. 33—47.

²⁸) Vgl. H. Halifa 5, S. 17, Nr. 11358; M. STEINSCHNEIDER, Die Mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 10 (1865), S. 456—498; E. WIEDEMANN, Beitr. z. Gesch. d. Naturw. 78 = Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. z. Erlangen 58—59 (1926—27), S. 231—233.

²⁹) Über die Istanbuler Handschriften vgl. M. KRAUSE, Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker. Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math., Astr. u. Phys. B 3 (1936), S. 437—532, S. 499—504.

K. sagt nichts darüber, daß, wie wir aus Heron (Metrika I, S. 66, SCHÖNE) wissen, Archimedes noch einen genaueren Wert von π abgeleitet haben soll. Auch den von Ptolemäus (Almagest VI, 7 S. 513 HEIBERG) angegebenen Wert von π erwähnt er ebensowenig wie die den Archimedischen Wert in der Genauigkeit übertreffenden, durch Apollonius und durch Philon von Gadara vollzogenen Bestimmungen, von denen uns Eutokios berichtet (Archimedis op. ed. HEIBERG III, S. 255—260).

Die Kreisberechnung, die K. dem Abul-Wafā' zuschreibt, ist in dessen uns erhaltenen Werken bisher nicht nachgewiesen worden. Wohl aber finden wir sie mit genau denselben Zahlen in einem kurzen Handschriftentext, den FR. WOEPCKE 1860 im dritten Artikel seiner Untersuchungen über die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bei den Orientalen mitgeteilt, ins Französische übersetzt und kritisch erläutert hat²⁰). Nach seinen Angaben enthielt die schöne Hs, über deren späteres Schicksal mir nichts bekannt ist²¹), eine Sammlung der „Mittleren Bücher“. In der Hs angegebene Daten über die Beendigung der Redaktion von einigen der hier gesammelten Schriften nennen die Jahre 651 und 653 der Hīgira. Dies sind ungefähr die Jahre 1253 und 1255 unserer Zeitrechnung, und gerade in diesen Jahren wurden, wie man aus dem Katalog von KRAUSE²²) ersieht, mehrere Ausgaben at-Tūsī abgefaßt. Die Hs selbst gehört der zweiten Hälfte des Jahres 1322 n. Chr. an. Wie gewöhnlich folgt auch hier auf die Schrift über Kugel und Zylinder von Archimedes seine Schrift über die Kreismessung. Ihr Titel „Buch über die Quadratur (*takṣīr*) des Kreises“ weist ebenso wie die Zeit der Abfassung auf at-Tūsī. Nach WOEPCKES Andeutungen enthält sie die drei Lehrsätze der uns griechisch überlieferten Kreismessung des Archimedes.

An den dritten dieser Lehrsätze schließt sich nun in der Hs die von WOEPCKE behandelte Einlage eines anscheinend nicht genannten Verfassers, also doch wohl des Herausgebers der Schriften, an, die ich jetzt nach WOEPCKES Wiedergabe des arabischen Textes übersetze:

„Die Astronomen haben ein anderes Verfahren. Sie bestimmen nämlich nach den Prinzipien, die in der Schrift Almagest und anderen ihrer mit Beweisen versehenen Schriften bewiesen sind, die Sehne eines kleinen Bogens, der ein (aufgehender) Teil des Kreisumfangs ist, und machen sie zu einer Seite einer dem Kreise einbeschriebenen Figur. Hierbei ist ihr Verhältnis zu dem vom Mittelpunkt des Kreises auf sie fallenden Lot gleich dem Verhältnis der Seite der dem Kreise umschriebenen und ihr (der einbeschriebenen) ähnlichen Figur zum Halbmesser. So erhalten sie also auch diese Seite und bestimmen demgemäß zwei Größen, deren eine der [Kreis]umfang übertrifft, während er unter der anderen bleibt, so daß der Umfang mit größter Annäherung erhalten wird. Beispiel: Der Kreis sei ab , sein Mittelpunkt sei g , und sein [Stück] ab sei ein Siebenhundertzwanzigstel des Umfangs. Wir ziehen die Sehne ab . Dann ist nach der von Abul-Wafā' al-Būzāḡānī auf Grund der angegebenen Prinzipien angestellten Berechnung ihre Größe in genauester Annäherung 0 31 24 55 54 55 Quinten; dies ist nämlich die Sehne eines halben Grades, wenn der Durchmesser zu hundertzwanzig Teilen angesetzt wird. Machen wir sie zur Seite einer dem Kreise einbeschriebenen Figur von siebenhundertzwanzig Seiten, so ist demgemäß der Umfang dieser Figur 376 59 10 59 Tertien. Hälften wir nun die Sehne von einem halben Grad, so ist die Größe von ad : 0 15 42 27 57 27 Quinten. Das Quadrat hiervon ist 0 4 6 44 2 4 57 25 18 30 9 Dezimen. Das Quadrat des Halbmessers, d. i. der Linie ag , ist 3600 Teile. Ziehen wir hiervon das Quadrat von ad ab, so bleibt als Quadrat von dg übrig: 3599 55 53 15²³) 57 55 2 34 41 29 51. Die Wurzel daraus, nämlich die Linie dg ,

²⁰) Journ. asiatique (5) 15 (1860), S. 281—320.

²¹) STEINSCHNEIDER erwähnt sie nicht bei der Aufzählung von Handschriften der Mittleren Bücher in seiner 1865 erschienenen Abhandlung²²).

²²) Nach WOEPCKES hat die Hs statt 15 fälschlich 65.

beträgt 59 59 57 56 37 56 51 Sexten. Vervielfachen wir ad mit dem Halbmesser gh und teilen es (das Produkt) durch dg , so kommt als Größe von kh heraus: 0 15 42 28 29 45 Quinten. Verdoppeln wir das, so ergibt sich 0 31 24 56 59 31 Quinten, und das ist die Größe von kz , der Seite der dem Kreise umschriebenen Figur von siebenhundertzwanzig Seiten, die der ersten ähnlich ist. Dementsprechend ist der Umfang der Figur 376 59 23 54 12 Quarten²³⁾. Setzen wir also den Durchmesser gleich hundertzwanzig, so ist der Umfang 376 Teile und ein Bruch, der größer als 59 10 59 0 Quarten und kleiner als 59 23 54 12 Quarten ist. Verwandeln wir dies in die Größe, die Archimedes angab, so übertrifft der Umfang das Dreifache des Durchmessers um etwas, das größer als zehn Siebzigstel und 38 41 21 Tertien, kleiner als zehn Siebzigstel und 37 47 37 Tertien und annähernd gleich zehn Siebzigstel und 38 14 29 Tertien ist.“

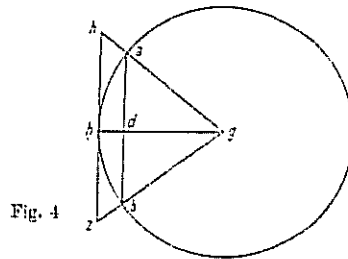


Fig. 4

Man wird nachforschen können, ob sich auch in anderen der zahlreich auf uns gekommenen Handschriften der Mittleren Bücher dieser oder ein ähnlicher Text an die Archimedische Kreismessung anschließt.

Ersichtlich schreibt der Verfasser diese Kreisberechnung nicht dem Abul-Wafā' zu, sondern bringt sie als Beispiel für ein den Astronomen eigenes Verfahren, das als Seite eines einbeschriebenen Vielecks eine solche kleine Sehne benutzt, wie sie die Astronomen bei der Berechnung ihrer Sehnen- oder Sinustafeln ausrechnen. Abul-Wafā' ist nur als derjenige genannt, der nach den trigonometrischen Methoden des Almagest und anderer einschlägiger Schriften Chord $\frac{1}{2}^\circ$ zu 0 31 24 55 54 55 Quinten berechnet habe, und diesen Wert benutzt der Verfasser als Ausgangswert, nämlich als Seite des 720-Ecks, das ihm als Beispiel für das zu erläuternde Verfahren der Astronomen dienen soll. Nun ist in Wahrheit

$$\text{Chord } \frac{1}{2}^\circ = 2 \sin 15' \approx 0 31 24 56 58 36 \text{ Quinten.}$$

K. hat den Wert in Zeile 2 der Tafel 22a noch viel genauer angegeben. Abul-Wafā' hätte also einen gehörigen Fehler begangen. Aber WOEPCKE hat aus der Pariser Hs des Almagest von Abul-Wafā' nachgewiesen, daß dieser große Mathematiker und Astronom den angegebenen Wert von 0 31 24 55 54 55 Quinten nicht für Chord $\frac{1}{2}^\circ$, sondern für $\sin \frac{1}{2}^\circ$ fand, und da in Wahrheit $\sin \frac{1}{2}^\circ \approx 0 31 24 55 54 0$ Quinten ist, — für das Doppelte dieses Betrages findet man in Zeile 10 der soeben genannten Tafel von K. einen noch viel genaueren Wert —, so beträgt der Fehler von Abul-Wafā' nur etwa 55 Quinten. Nach der Art, wie Abul-Wafā' an der von WOEPCKE untersuchten Stelle seines Almagest (10b12—11b12 der Pariser Hs) $\sin \frac{1}{2}^\circ$ berechnet, konnte er diesen Wert auch unmöglich in den Quinten genau erhalten. Denn er findet ihn mit der beschränkten Genauigkeit, die dadurch bedingt ist, daß er ihn in zwei feste Grenzen einschließt. Diese Grenzen sind die Größen zweier Sehnen, die sich durch bloße Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen aus gegebenen Zahlen berechnen lassen. Das Verfahren hierfür ist von

²³⁾ Nach WOEPCKE hat die Hs fälschlich 376 16 59 23 54 12 Quinten.

der Art desjenigen, nach welchem Ptolemäus im *Almagest* (I, 10) Chord 1° näherungsweise berechnet. Dieser Astronom beweist, daß

$$\frac{2}{3} \text{ Chord } \frac{3^\circ}{2} < \text{Chord } 1^\circ < \frac{4}{3} \text{ Chord } \frac{3^\circ}{4}$$

ist und kann die Schranken $\frac{2}{3} \text{ Chord } \frac{3^\circ}{2}$ und $\frac{4}{3} \text{ Chord } \frac{3^\circ}{4}$ durch rationale Operationen und Quadratwurzelausziehungen berechnen. Entsprechend beweist Abul-Wafā' in seinem Verfahren, das übrigens CANTOR und VON BRAUNMÜHL im Anschluß an WOEPCKE darstellen²⁴⁾, die Ungleichungen

$$\sin \frac{15^\circ}{32} \div \frac{1}{2} \left(\sin \frac{18^\circ}{32} - \sin \frac{15^\circ}{32} \right) < \sin \frac{1^\circ}{2} < \sin \frac{15^\circ}{32} \div \frac{1}{2} \left(\sin \frac{18^\circ}{32} - \sin \frac{12^\circ}{32} \right),$$

und nimmt als Näherungswert von $\sin \frac{1^\circ}{2}$ das arithmetische Mittel der beiden durch elementare Operationen und Quadratwurzelausziehungen auffindbaren Schranken an, zwischen die er den gesuchten Wert eingeschlossen hat.

WOEPCKE berechnete den hierbei begangenen unvermeidlichen Fehler

$$\sin \frac{16^\circ}{32} - \left[\sin \frac{15^\circ}{32} \div \frac{1}{2} \left(\sin \frac{18^\circ}{32} - \sin \frac{12^\circ}{32} \right) \right].$$

Er beträgt rund —47 Quinten. Daß Abul-Wafā's tatsächlicher Fehler noch um rund —8 Quinten größer ausfiel, liegt daran, daß seine Ausgangswerte für $\sin \frac{18^\circ}{32}$, $\sin \frac{15^\circ}{32}$, $\sin \frac{12^\circ}{32}$ in den Quinten fehlerhaft waren.

Daß aber Abul-Wafā' selbst den schwerwiegenden Fehler begangen hätte, Sehne und Sinus von einem halben Grad, die um mehr als eine Tertia voneinander abweichen, bis zu den Quinten einander gleichzusetzen, wird man bezweifeln müssen, wenn keine festeren Unterlagen hierfür gefunden werden als die uns vorliegenden Angaben von K. Eher muß man annehmen, die von WOEPCKE aufgefundene Textstelle aus dem 13. Jahrhundert oder eine ihr nahestehende wurde dahin mißverstanden, daß Abul-Wafā' selbst die Kreisberechnung mit dem falschen Ausgangswert $\text{Chord } \frac{1^\circ}{2} \approx 0\ 31\ 24\ 55\ 54\ 55$ Quinten angestellt habe. K. könnte einem solchen Mißverständnis zum Opfer gefallen sein. Man muß wohl annehmen, daß K. den *Almagest* und insbesondere die Tafeln von Abul-Wafā' nicht einsehen konnte; denn sonst wäre er der Sache ebenso auf den Grund gegangen, wie er es bei der Unstimmigkeit bei al-Birūnī tat. Hätte Abul-Wafā' selbst auf seinen Wert von $\sin \frac{1^\circ}{2}$ eine Kreisberechnung aufgebaut, so wäre es das Natürliche gewesen, ein eingeschriebenes 360-Eck mit der Seite $\text{Chord } 1^\circ = 2 \sin \frac{1^\circ}{2}$ zu bilden.

Kennzeichnend für die geschilderte Methode der Astronomen, die wir als die trigonometrische bezeichnen wollen, ist, daß sie den Wert einer kleinen Sehne wie diejenigen von 2° oder 1° oder $\frac{1^\circ}{2}$, die die Astronomen für ihre trigonometrischen Tafeln ausgerechnet haben, sozusagen als Fertigfabrikat übernimmt und für ihre Zwecke ausnutzt, so daß die Seitenzahl des zu bildenden Vielecks z. B. $\frac{1}{2} \cdot 360$ oder $1 \cdot 360$ oder $2 \cdot 360$ beträgt. Was die Abweichungen dieser Art der Kreisberechnung, unter die auch das noch zu besprechende Verfahren al-Birūnīs fällt, von der Archimedischen Kreismessung betrifft, so hebt WOEPCKE hervor, daß, während die Methode des Archimedes durch fortwährende Verdoppelung der Seitenzahl mit rationalen Operationen und Quadratwurzelausziehungen bis zu beliebiger Genauigkeit weiter getrieben werden kann²⁵⁾, sich nach der trigonometrischen Methode des von ihm

²⁴⁾ M. CANTOR, *Vorl. ü. Gesch. d. Math.* I² (1907), S. 746—747; A. VON BRAUNMÜHL, *Vorl. ü. Gesch. d. Trig.* I. (1900), S. 56—57. — Man vergleiche auch Miram Celebi in seinem Kommentar zu den Tafeln des *Uluğ Beg*: A. SEDILLOT, *Prolegomènes des tables astr. d'Ouloug-Beg*, Paris 1853, S. 75—77. Hierzu A. SEDILLOT, *Journal asiatique* (5) 2 (1855), FR. WOEPCKE, *Journ. d. math. pures et appl.* 19 (1854), S. 154—159.

²⁵⁾ Dies betonen schon die Banū Mūsā²⁶⁾ nachdrücklich.

ans Licht gezogenen Textes die Zahl π nur mit der begrenzten Genauigkeit bestimmen läßt, die dadurch bedingt ist, daß die Ausgangssehne oder der Ausgangssinus der Berechnung nur in ein Intervall mit festen Enden eingeschlossen wurde. Als Fortschritt der Methode gegenüber der Archimedischen hebt WOEPCKE hervor, daß sein Text aus der Seite des einbeschriebenen Vielecks diejenige des umbeschriebenen durch eine einfache Rechnung findet — sie ist nichts anderes als der Übergang von $2r \sin \frac{360^\circ}{n}$ zu $2r \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}$ —, während Archimedes unabhängig voneinander die Seiten des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Vielecks berechne. Dieser Unterschied hängt damit zusammen, daß die trigonometrische Methode mit Gleichungen und sexagesimal entwickelten Zahlen arbeitet, wobei durch Abbrechen der Sexagesimalentwicklung mit oder ohne Erhöhung aus den Gleichungen leicht Ungleichungen gewonnen werden. Archimedes dagegen, der die Proportion für den Übergang vom einbeschriebenen zum umbeschriebenen Vieleck kaum übersehen haben wird, stellt schrittweise Ungleichungen mit gemeinen Brüchen auf und hat seine ganze Berechnung darauf abgestellt, beim 96-Eck stehenzubleiben, um, was Eutokios hervorhebt, eine im praktischen Leben nützliche Annäherung zu geben.

Die trigonometrische Methode der Kreisberechnung lag für jeden nahe, der die Sehnensberechnungen des Almagest studierte. Ptolemäus selbst gibt π an der oben schon angeführten Stelle (Almagest VI, 7, S. 513 HEIB.) als Verhältnis der Sexagesimalzahl 3 3 30 zu 1 an. Von dieser Zahl, zu der man übrigens gelangt, wenn man den Ptolemäischen Wert $\operatorname{Chord} 1^\circ = 1\ 2\ 50$ mit 180 vervielfacht, sagt er, sie liege mit großer Annäherung in der Mitte zwischen den beiden Archimedischen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$. Eutokios, der die Vervielfachungen und Teilungen von Myriaden bei den π -Berechnern schwer verständlich findet, sagt (Archimedes III², S. 258—60 HEIB.), wenn jemand überhaupt die Kreisberechnung zum Kleineren, d. h. zu genaueren Werten von π treiben wolle, so müsse er es entsprechend den Ausführungen im Almagest durch Teile und Minuten und Kreisbögen ausführen.

Diese Aufforderung zur sexagesimal-trigonometrischen Kreismessung, der möglicherweise schon hellenistische Rechner nachgekommen waren, sehen wir in dem von WOEPCKE veröffentlichten Text befolgt. Ich bin auf die trigonometrische Kreisberechnung auch deshalb näher eingegangen, weil, wie wir sehen werden, K. ihre Vorteile mit denen der Archimedischen Kreismessung bei seinem eigenen Verfahren vereint.

Mit größerer Berechtigung als an Abul-Wafā' übt K. an al-Bīrūnī Kritik hinsichtlich der für die Seiten des ein- und des umbeschriebenen 180-Ecks benutzten Zahlenwerte. Die Kreisberechnung, die Abul-Raiḥān al-Bīrūnī im fünften Kapitel des dritten Buches seines Mas'ūdī'schen Kanons ausführt, ist, wie wir schon vorwegnahmen, ebenfalls eine trigonometrische, und sie ist der Art nach der von WOEPCKE veröffentlichten so ähnlich, daß sie dieser als Vorbild gedient haben könnte. Auch hier Sexagesimalzahlen, eine der Trigonometrie entlehnte Sehne und der Übergang zur Seite des umbeschriebenen Vielecks durch eine Rechnung, die trigonometrisch als Übergang vom doppelten Sinus eines Winkels zu seinem doppelten Tangens zu deuten ist. Es ist schade, daß al-Bīrūnī hier den falschen Ausgangswert $\operatorname{Chord} 2^\circ = 0\ 2\ 5\ 39\ 43\ 36$ benutzt, während er nicht nur, worauf K. hinweist, in seiner Sinustafel, die am Ende des sechsten Kapitels des genannten Buches steht, den richtigen Wert $\sin 1^\circ = 1\ 2\ 49\ 43$ bringt (hier liegt $r = 1$ zugrunde), sondern schon im vierten Kapitel den ebenfalls besseren Wert $\operatorname{Chord} 2^\circ = 0\ 2\ 5\ 39\ 25\ 58$ gefunden hat²⁴). Den viel genaueren Wert $\operatorname{Chord} 2^\circ = 0\ 2\ 5\ 39\ 26\ 22\ 29 \dots$ gibt K. (Taf. 22 a, S. 31) an.

²⁴) Die von K. angegebenen Zahlen stimmen mit denen der Stambuler Hs Velieddin 2277 des Mas'ūdī'schen Kanons überein. Auch SCHÖY, der nach der Oxforder Hs übersetzte, hat bei diesen Zahlen keine für die von K. ausgeübte Kritik wesentliche Abweichung in seinem Werke: CARL SCHÖY, Die trigonometrischen Lehren des ... al-Bīrūnī, Hannov. 1927.

Wichtiger als die zahlenmäßige Richtigkeit erscheinen uns die Wege, auf denen al-Birūnī Chord 2° oder $\sin 1^\circ$ und Chord 1° oder $\sin \frac{1^\circ}{2}$ zu finden lehrt. Ausführlich können wir hier nicht auf sie eingehen, heben aber hervor, daß sie im Gegensatz zu den festen Intervallen, in die Ptolemäus und Abul-Wafā' Chord 1° oder $\sin \frac{1^\circ}{2}$ einschließen, auf Rechnungen hinauslaufen, die den gewünschten Tafelwert beliebig genau liefern können. Abgesehen von rationalen Operationen und Quadratwurzelausziehungen führt al-Birūnī die Aufgabe nämlich entweder auf eine algebraisch formulierte kubische Gleichung zurück, deren sehr genaue Lösung er als Sexagesimalzahl unter der Bemerkung mitteilt, daß sie durch *istigrā'*, d. h. ein (sicher systematisch gemeintes) Probieren gefunden werde, oder er reduziert das Problem auf eine geometrisch formulierte biquadratische Gleichung, für die er eine durch sukzessive Annäherungen zu vollziehende Lösung skizziert, oder endlich läßt er die Lösung hinauslaufen auf die beliebig genaue Annäherung an den Wert von Chord 40° durch die Folge der Sehnen der Bögen $a_1 = 30^\circ + 10^\circ 30'$, $a_2 = 30^\circ + \frac{a_1}{4}$, $a_3 = 30^\circ + \frac{a_2}{4}$, . . . also $a_n = 40^\circ + \frac{a_1}{4^n}$. Diese Sehnen kann er durch rationale Operationen und Quadratwurzel- ausziehungen berechnen.

Zum ersten Abschnitt

Mit dem ersten Abschnitt beginnt K. die Darstellung seiner eigenen Kreismessung. Wie alle Kreisberechner des Altertums und des Mittelalters, die genauere Werte von π erzielten, folgt auch unser persischer Astronom insofern den Spuren des Archimedes, als er sich dem Kreis durch *regelmäßige* Vielecke annähert. Der Einfluß dieses Riesen in der Mathematik war eben übermächtig. An sich besaß schon die griechische Mathematik das Rüstzeug, um auch auf einem anderen Wege den Kreisumfang aus dem Durchmesser mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen, und sogar auf einem Wege, der π als Grenzwert einer Folge von *rationalen* Zahlen gewinnen läßt, während das Archimedische Verfahren auf Ketten ineinander geschachtelter Quadratwurzeln führt. Man hätte sich nur entschließen müssen, dem Kreise statt der *gleichseitigen ungleichseitige* Vielecke ein- und umzubeschreiben. Der heutige Mathematiker erkennt die Möglichkeit eines solchen Verfahrens sofort, wenn er sich gegenwärtigt, daß der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ durch eine überall dichte Menge von Punkten mit rationalen Koordinaten wie z. B. $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ oder $x = \frac{5}{13}$, $y = \frac{12}{13}$ geht. Mit Hilfe solcher systematisch ausgewählter Punkte als Ecken oder als Berührungspunkte kann man Folgen von ungleichseitigen ein- und umbeschriebenen Vielecken mit rationalem Inhalt bilden, der bei wachsender Seitenzahl den Kreisinhalt beliebig genau darstellt³⁷⁾. Da die griechische Mathematik die genannte Eigenschaft des Einheitskreises in der Form kannte, daß sie die allgemeine Erzeugungsformel der pythagoreischen Dreiecke, d. h. der rechtwinkligen Dreiecke mit rationalen Seitenverhältnissen besaß, so läßt sich diese wurzellose Kreisberechnung mit den Hilfsmitteln der antiken Geometrie und Rechenkunst durchführen.

K. arbeitet also wie Archimedes mit *regelmäßigen* Vielecken, und wenn wir von jetzt ab wie er einfach von Vielecken sprechen, so sind sie stillschweigend als gleichseitig-gleichwinklige gedacht.

³⁷⁾ Eine elementare Durchführung einer solchen Kreismessung versuche ich in der Arbeit: Kreisberechnung ohne Wurzeln. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwiss. 37 (1931), S. 219—225.

Im ersten und zweiten Abschnitt, außerdem in der aus dem Almagest entnommenen Stelle des Schlußabschnitts beruft sich der Verfasser bei Beweisführungen in der üblichen Weise auf Sätze der Elemente. Nur den pythagoreischen Lehrsatz führt K. nicht nach Buch und Satznummer bei Euklid an, sondern nennt 'ihn (S. 6, Z. 3) 'Lehrsatz der Braut'. Diese Bezeichnung kommt auch in anderen arabischen Texten vor, so bei Bahā'addīn (Cantor²⁴) I², S. 786).

Die im Text angegebenen Nummern der Lehrsätze weichen nur in folgenden Fällen von den Nummern der HEIBERG'schen Ausgabe des griechischen Textes ab: Der an zwei Stellen S. 4, 5. Z. v. u. und S. 6, 3. Z. als III 30 angeführte Satz ist bei HEIBERG III 31; die S. 27, 3. und 1. Z. v. u.) als XIII 12 und 13 bezeichneten Sätze sind bei HEIBERG XIII 9 und 10. Der 1594 in der Medizäischen Druckerei in Rom erschienene Druck von at-Tūsī's Ausgabe der Elemente stimmt im ersten der genannten Fälle mit K.'s Numerierung, in den beiden letzten mit derjenigen von HEIBERG überein. Der von K. (S. 27, 6. Z. v. u.) und HEIBERG mit VI 17 bezeichnete Satz ist in der genannten Tūsī-Ausgabe VI 16.

Aus $a : b = c : d$ folgert K. (S. 5, 1. Z.) $ad = bc$ nach VII 19. Diesen Satz 19 des siebenten Buches spricht Euklid aber nur für ganze Zahlen aus, während K. ihn auf geometrische Linien anwendet.

Der erste Abschnitt bringt einen Hilfssatz, der in einfachster Weise den Übergang von einem Vieleck zu demjenigen mit der doppelten Seitenzahl vermittelt. An Fig. 1, in der h der Kreismittelpunkt und der Bogen bd gleich dem Bogen dg ist, beweist K.

$$ad^2 = \frac{ab}{2} (ab + ag).$$

Wir bezeichnen den Durchmesser ab mit $d = 2r$, den Bogen bg mit b_i , seine (in der Figur nicht gezeichnete) Sehne bg mit s_i und die Sehne ag mit c_i . Da die letztere Sehne die Sehne des Bogens $180^\circ - b_i$ ist, der den Bogen b_i zu einem Halbkreise ergänzt, nennen wir sie kurz die 'Ergänzungssehne' des Bogens b_i und auch die Ergänzungssehne der Sehne s_i . Ergänzungssehne soll also heißen: Sehne der Ergänzung zu 180° , ebenso wie Kosinus heißt: Sinus der Ergänzung zu 90° . Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$(I) \quad c_i^2 = d^2 - s_i^2.$$

Bezeichnet man den aus $bg = b_i$ durch Häftung hervorgegangenen Bogen $bd = \frac{1}{2}b_i$ mit b_{i+1} , seine Sehne bd mit s_{i+1} und die zugehörige Ergänzungssehne ad mit c_{i+1} , so wird der Inhalt des Hilfssatzes durch die Formel

$$(II) \quad c_{i+1} = \sqrt{\frac{d}{2} (d + c_i)}$$

ausgedrückt. Sie zeigt, wie aus der Ergänzungssehne c_i des Bogens b_i diejenige c_{i+1} des Bogens $b_{i+1} = \frac{b_i}{2}$ berechnet wird.

Bezeichnet man den Bogen b_i einfach mit b , so kann man die Formeln (I) und (II) mit den Symbolen der Sehnenechnung folgendermaßen schreiben:

$$(I') \quad \text{Chord}^2 (180^\circ - b) = d^2 - \text{Chord}^2 b$$

$$(II') \quad \text{Chord}^2 \left(180^\circ - \frac{b}{2}\right) = \frac{d}{2} (d + \text{Chord} (180^\circ - b)).$$

Nach der von K. gegebenen Formulierung läge es freilich näher, von dem Bogen $ag = a$ auszugehen und den bewiesenen Satz durch die Formel

$$(II'') \quad \text{Chord}^2 \left(a + \frac{180^\circ - a}{2}\right) = \frac{d}{2} (d + \text{Chord } a)$$

auszudrücken, die durch die Einsetzung $a = 180^\circ - b$ in (II') übergeht. Für die Anwendung,

die K. selbst im folgenden Abschnitt dem Satz gibt, erscheint mir die Form (II') etwas zweckmäßiger als (II'').

Diese Formel (II') ist das Gegenstück zu der Formel, in die man ein Verfahren zusammenfassen kann, nach welchem Ptolemäus im *Almagest* aus der Sehne eines Bogens b die Sehne der Hälfte dieses Bogens ermittelt. Nachdem er nämlich vorher (I, S. 35—36 HEIBERG) nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Ergänzungssehne Chord $(180^\circ - b)$ entsprechend der obigen Formel (I) oder (I') berechnet hat, findet er (S. 39—40) die Beziehung, die mit unseren Bezeichnungen lautet:

$$(III) \quad s_{i+1} = \sqrt{\frac{d}{2} (d - c_i)}$$

oder

$$(III') \quad \text{Chord}^2 \frac{b}{2} = \frac{d}{2} (d - \text{Chord} (180^\circ - b)).$$

Bezeichnet man den Zentriwinkel des Bogens b mit 2φ , so gehen, wenn man $\frac{d}{2} = r = 1$ setzt und (vgl. oben S. 40) die Funktionen $\sin$ und $\cos$ einführt, die Formeln (I'), (II') und (III') über in (I'') $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$,

$$(II'') \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}, \quad (III'') \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Die Formel (II'') führt auf die von LAMBERT²⁸⁾ hervorgehobene Formel

$$(II''') \quad \sin (45^\circ + \frac{\varphi}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{2}}.$$

Daß K. wie Ptolemäus nach *homogenen* Formeln rechnet und wie dieser den Durchmesser d zu 120 Teilen ansetzt, macht sein praktisches Rechnen etwas schwerfällig. So bedeutet beim Rechnen mit Sechzigerzahlen die in (II) geforderte Vervielfachung mit $\frac{d}{2}$ die „Erhöhung“ des Stellenwertes um eine Sechzigerstelle. Für $d = 2$ würden die Formeln (I'), (II'), (II''), (III') ebenso bequem werden, wie es für uns die Formeln (I''), (II''), (II'''), (III'') sind. Viel lästiger als für den Sexagesimalrechner war die Annahme $r = 60$ allerdings für einen Rechner, der wie al-Birūnī in seinem *Tahdīd*²⁹⁾ alle aus den Tafeln entnommenen Sechzigerzahlen zunächst in Einheiten der niedrigsten Stelle umwandelte, um mit diesen dekadisch zu rechnen. Wegen dieser Nachteile hatte al-Birūnī nach dem Vorgang von Abul-Wafā' seiner Sinustafel im Mas'ūdī'schen Kanon den Halbmesser $r = 1$ zugrunde gelegt, „damit wir die mühselige Angabe der Vervielfachung mit ihm (dem Sinus totus $r = 60$) und der Teilung durch ihn aus unseren Rechnungen herausfallen lassen usw.“²⁹⁾. Leider hatte sich in der Folgezeit diese Vereinfachung in den trigonometrischen und astronomischen Tafelwerken nicht durchgesetzt. Nur aus Rücksicht auf die Gepflogenheit dieser Tafelwerke legt K. in den gewaltigen Sehnens- und Umfangsberechnungen des vierten bis siebenten Abschnitts den Halbmesser $r = 60$ zugrunde und macht die Rechnung dadurch etwas umständlicher als sie für $r = 1$ geworden wäre. Er bemerkt das selbst (S. 19, Z. 11 ff.). Für die Anwendungen seiner π -Berechnung, d. h. für die sexagesimale wie für die dezimale Berechnung des Umfangs aus dem Halbmesser und des Halbmessers aus dem Umfang nimmt er dagegen am Ende des 6. Abschnitts und in den Abschnitten 8 bis 10 den Halbmesser $r = 1$ an.

²⁸⁾ Vgl. J. TROPFKE, *Gesch. d. Elementar-Math.* 6² (1923), S. 60.

²⁹⁾ Hs. Velieddin 2277²⁸⁾, S. 84a. Vgl. SCHÖY²⁹⁾ C. 34 unten.

Zum zweiten Abschnitt

Die Überschrift spricht von der Bestimmung des Umfangs „irgendeines“ dem Kreise einbeschriebenen Vielecks (*ayy muḍalla' yakūn*). In Wahrheit berechnet K. (Fig. 2) aus der Ergänzungssehne $c_0 = ag$ der Seite s_0 eines einbeschriebenen m -Ecks die Ergänzungssehne $c_1 = a\tilde{h}$ der Seite $s_1 = b\tilde{h}$ eines einbeschriebenen Vielecks mit

$$n = 2 \cdot m$$

Seiten (c ist zugleich der Durchmesser des Inkreises des n -Ecks), dann die Seite $s_1 = b\tilde{h}$ und den Umfang $u_n = ns$ des einbeschriebenen n -Ecks und schließlich den Umfang $U_n = nt$ des umbeschriebenen n -Ecks.

Er nimmt $m = 3$ an, geht also von der Ergänzungssehne

$$(1) \quad c_0 = \frac{d}{2} = 60$$

der Seite $s_0 = \frac{d}{2} \sqrt{3}$ des einbeschriebenen Dreiecks aus. (Im Schlußabschnitt wendet er (Taf. 21 b, 13. Reihe) dasselbe Verfahren auf $m = 30$, also $s_0 = \text{Chord } 12^\circ$, $c_0 = \text{Chord } 168^\circ$ an.) An die Stelle der Seite des m -Ecks könnte irgendeine Sehne treten, deren Bogen in einem rationalen Verhältnis zum Kreisumfang steht, so daß die Vielecke im allgemeinen erst nach mehreren Umläufen geschlossen wären; aber von diesem allgemeineren Fall macht K. keinen Gebrauch.

Aus $c_0 = ag$ berechnet er nach dem Hilfssatz des ersten Abschnitts $c_1 = ad$, aus $c_1 = ad$ findet er nach demselben Satz $c_2 = az$, usw. Er erhält also durch v -malige Anwendung der Formel (II) von S. 48 nacheinander

$$(2) \quad c_1 = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_0)}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_1)}, \quad \dots, \quad c_v = \sqrt{\frac{d}{2}(d + c_{v-1})}.$$

Nachdem er die Berechnung bis $a\tilde{h} = c_v$ fortgesetzt hat, liefert ihm der pythagoreische Lehrsatz, d. h. die Formel (I) von S. 48, die n -Ecks-Seite $b\tilde{h} = s_v$ als Ergänzungssehne der Sehne $a\tilde{h} = c_v$:

$$(3) \quad s_v = \sqrt{d^2 - c_v^2} \left[= \sqrt{d^2 - \frac{d}{2}(d + c_{v-1})} = \sqrt{\frac{d}{2}(d - c_{v-1})} \right].$$

Die in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke zeigen K.s tatsächliche spätere Rechnungsweise an, die auf die Formel (III) von S. 49 hinausläuft.

Dann ist der Umfang des einbeschriebenen Vielecks

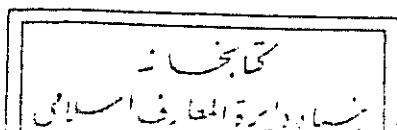
$$(4) \quad u_n = n \cdot s_v = 3 \cdot 2 \cdot s_v.$$

Dreiecksähnlichkeiten ermöglichen es nun, die Seite $kt = t$ des umbeschriebenen Vielecks durch $b\tilde{h} = s_v$, $a\tilde{h} = c_v$ und $ab = d$ auszudrücken und den Überschuß $\Delta u_n = U_n - u_n$ des Umfangs U_n des umbeschriebenen über den Umfang u_n des einbeschriebenen Vielecks aus dem letzteren zu berechnen. Es ergibt sich nämlich nacheinander:

$$(5) \quad \begin{aligned} s_v : t &= c_v : d \\ s_v : (t - s_v) &= c_v : (d - c_v) \\ u_n : (U_n - u_n) &= c_v : (d - c_v). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) bilden das ganze, überaus einfache Formelsystem, nach welchem K. die Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke beliebig hoher Seitenzahl berechnet.

Setzt man für $d = 2r = 2$ in die i -te der Rekursionsformeln (2) c_{i-1} aus der vorhergehenden, dann c_{i-2} aus der ihr vorhergehenden ein usw. und verfährt entsprechend bei



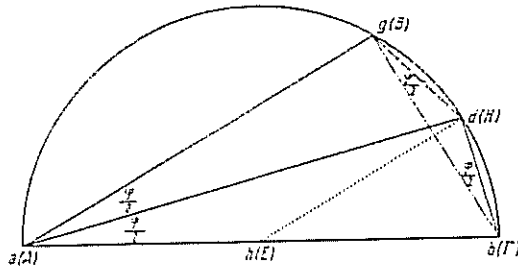
der Gleichung (3), so erhält man für c_i und s_i folgende geschlossene Ausdrücke, deren jeder i ineinander geschachtelte Quadratwurzeln hat:

$$(2a) \quad c_i = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + c_0}}}$$

$$(3a) \quad s_i = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + c_0}}} = \sqrt{2 - c_{i-1}}$$

Die theoretische Einfachheit dieser Kreisberechnung beruht darauf, daß nur die Folge der Ergänzungssehn $c_1, c_2, c_3, \dots, c_i$ der Seiten der Vielecke mit $2m, 4m, 8m, \dots, 2^i m$ Ecken berechnet wird und erst zu der letzten c_i dieser Ergänzungssehn die Sehne selbst, d. h. die Seite s_i des Vielecks mit $n = 2^i m$ Ecken.

Um diesen von K. eingeschlagenen Weg zu beleuchten, ziehen wir zum Vergleich die Berechnung der eingeschriebenen Vielecke in der Kreismessung des Archimedes heran, der diejenige unseres Autors zwar in den theoretischen Grundlagen überaus nahe steht, von der sie sich aber in der rechentechnischen Ausführung weit entfernt. Archimedes bildet wie K., der dem Syrakusaner dieses Verfahren ja letzten Endes verdankt, von $m = 3$ ausgehend, die Folge der $2^i \cdot m$ -Ecke, bleibt aber schon bei $n = 2^3 \cdot 3 = 96$ stehen. Wie geht Archimedes vom $2^3 \cdot 3$ -Eck zum $2^{i+1} \cdot 3$ -Eck über?



In Fig. 5 ist aus der Figur des Archimedes (I, S. 241 HEIBERG) und K.s Fig. 1 das für den Vergleich Notwendige vereint. Ausgezogene Linien sind beiden Figuren gemeinsam, die strichpunktierte hat Archimedes, die punktierte K. allein. Die Buchstaben des Archimedes sind denjenigen von K. in Klammern beigegefügt. Wir ziehen noch gd und bezeichnen den Winkel bag mit φ . Dann ist jeder der Winkel bad, dag, dbg und dgb gleich $\frac{\varphi}{2}$.

Archimedes geht vom rechtwinkligen Dreieck abg , das die Seite gb des Vielecks mit $n = 2^i \cdot m$ Ecken zur Kathete hat, zum rechtwinkligen Dreieck abd , das die $2n$ -Eck-Seite bd zur Kathete hat, über, indem er die Seitenverhältnisse $ad:db \left[= \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right]$ und $ab:bd \left[= \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right]$ des zweiten Dreiecks aus den entsprechenden, schon bekannten Seitenverhältnissen $ag:gb \left[= \operatorname{ctg} \varphi \right]$ und $ab:bg \left[= \operatorname{cosec} \varphi = \frac{1}{\sin \varphi} \right]$ des ersten Dreiecks berechnet.

Er berechnet also die Verhältnisse zweier Seitenpaare des Dreiecks abd aus den Verhältnissen der beiden entsprechenden Seitenpaare des vorhergehenden Dreiecks abg . K. dagegen berechnet nur ad aus ag und dem Durchmesser, oder, wie wir sagen können, um den Gegensatz zu Archimedes besser hervortreten zu lassen, er berechnet nur das eine Seitenverhältnis $ad:ab \left[= \cos \frac{\varphi}{2} \right]$ des Dreiecks abd aus dem einzigen, als bekannt vorausgesetzten entsprechenden Seitenverhältnis $ag:ab \left[= \cos \varphi \right]$ des vorhergehenden Dreiecks abg .

Die Formel für diese Berechnung von K. erhält man übrigens rasch, wenn man zu der von Archimedes aufgestellten Proportion

$$AH:HF = (AF + AB):BF,$$

also

$$ad:db = (ab + ag):bg$$

die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke gbd und ahd hervorgehende Proportion

$$ad:ah = bg:ab$$

hinzunimmt. Aus diesen beiden Proportionen folgt nämlich der von K. im ersten Abschnitt abgeleitete Satz

$$ad^2 = ah(ab + ag),$$

d. h. die Formel (II) von S. 48.

Trigonometrisch gesprochen geht Archimedes von $\operatorname{ctg} \varphi$ und $\operatorname{cosec} \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$ zu denselben Funktionen des halben Winkels über nach dem Formelpaar

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{cosec} \varphi, \quad \operatorname{cosec} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} + 1},$$

während K. den Übergang mit der einzigen Formel

$$(II'') \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

vollzieht. Archimedes hat etwas mehr Rechenarbeit, da er bei jedem Übergang quadrieren, addieren und radizieren muß, während K. nur addieren, hälfen und radizieren muß.

Der Vergleich mit der Archimedischen Kreismessung zeigt, wie einfach das Verfahren K.s ist. Diesem sehen wir am klarsten auf den Grund, wenn wir es auf die geschlossene trigonometrische Form bringen. Die Seite s_i ist die Sehne des 2^i -ten Teils des ursprünglichen Bogens b_0 ; c_0 ist die Ergänzungsehne von s_0 und c_i diejenige von s_i . Deshalb lassen sich, wenn wir $r = 1$ voraussetzen und für diesen Fall das Symbol Chord durch chord ersetzen, die Formeln (2a) und (3a) von S. 51 schreiben:

$$(2a') \quad c_i = \text{chord} \left(180^\circ - \frac{b_0}{2^i} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \text{chord} (180^\circ - b_0)}}}$$

$$(3a') \quad s_i = \text{chord} \frac{b_0}{2^i} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \text{chord} (180^\circ - b_0)}}}$$

Jeder der beiden rechts stehenden Ausdrücke hat i Wurzelzeichen. Für $i = 1$ geht (2a') in (II') von S. 48 und (3a') in (III') von S. 49 über, wenn man in diesen beiden Formeln den Durchmesser d gleich 2 setzt und für b_0 einfach b schreibt.

Geht man in (2a') und (3a') zu den Funktionen $\cos$ und $\sin$ über, indem man den Umfangswinkel des Bogens b_0 mit φ bezeichnet, so erhält man die Formeln

$$\left. \begin{aligned} (2a'') \quad c_i &= 2 \cos \frac{\varphi}{2^i} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}}} \\ (3a'') \quad s_i &= 2 \sin \frac{\varphi}{2^i} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}}} \end{aligned} \right\} (i \text{ Quadratwurzeln}).$$

Die Formeln (II'') und (III'') von S. 49 stellen die Sonderfälle $i = 1$ dieser Formeln dar.

Trigonometrisch bedeutet also das Verfahren von K. letzten Endes die Berechnung von s_i nach der Formel (3a'), die die Sehne des Bogens $\frac{b_0}{2^i}$ aus der Ergänzungsehne des Bogens b_0 , oder der Formel (3a''), die den Sinus des Winkels $\frac{\varphi}{2^i}$ aus dem Kosinus des Winkels φ zu berechnen lehrt. Diese Formeln aber wurden abgeleitet mit Hilfe der von K. im ersten Abschnitt in geometrischem Gewande bewiesenen Halbbogenformel (II') von S. 48, d. i. der

Halbwinkelformel (II'') von S. 49. Nach dieser Formel geht Chord $(150^\circ - \frac{b}{2})$ in sehr einfacher Weise aus Chord $(150^\circ - b)$ hervor (oder $\cos \frac{\varphi}{2}$ aus $\cos \varphi$), während es für die Berechnung von Chord $\frac{b}{2}$ aus Chord b (oder von $\sin \frac{\varphi}{2}$ aus $\sin \varphi$) keine ebenso einfache Formel gibt. Die Ptolemäische Halbbogenformel (III') von S. 49 liefert nur mit dem fortwährenden Umweg über den pythagoreischen Lehrsatz die Formeln (2a') und (3a'). Nach dem Archimedischen Verfahren läßt sich die Seite s_i des Viel-Ecks überhaupt nicht durch einen geschlossenen Ausdruck wiedergeben, es sei denn, daß man aus den beiden Archimedischen Übergangsformeln die des K. ableitet.

Daß K. die Formel (II') besitzt und ausnutzt, erscheint mir der Hervorhebung wert, so naheliegend uns ihre Ableitung aus (III') erscheinen mag. Eine derartige Verwendung der Vorzüge, die diese Formel gegenüber der Ptolemäischen Halbbogenformel (III') hat, ist mir weder bei Ptolemäus noch anderswo in der griechischen Trigonometrie bekannt, und auch bei den islamischen Mathematikern scheint die Anwendung dieser fruchtbaren Formel oder der ihr entsprechenden Kosinusformel (II'') bisher nicht nachgewiesen zu sein. Auch ob die Inder sie bei ihren Berechnungen der Funktionen des halben Winkels und des Kreisumfangs verwendeten, bedarf wohl noch näherer Untersuchung⁴⁰.

Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht das Verhalten von al-Birūnī. Im zweiten Kapitel des dritten, der Trigonometrie gewidmeten und oben (S. 46) schon erwähnten Buches seines Mas'ūdī'schen Kanons gibt er Vorschriften, nach denen aus einer gegebenen Sehne Chord a die Sehnen Chord $\frac{a}{2}$, Chord $\frac{a}{4}$, Chord $\frac{a}{8}$, ... berechnet werden sollen. Die eine der beiden für Chord $\frac{a}{2}$ gegebenen Vorschriften entspricht der Ptolemäischen Formel (II') von S. 48. Aber für Chord $\frac{a}{4}$, Chord $\frac{a}{8}$ usw. werden die Vorschriften verwickelt. Bringt man z. B. die für Chord $\frac{a}{4}$ gegebene Vorschrift auf eine Formel mit Sinus- und Kosinusfunktionen, so erhält man

$$(B) \quad \sin \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \varphi)}{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \varphi}}.$$

Bei K. dagegen hat man nach (3a'') von S. 52:

$$(K) \quad \sin \frac{\varphi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}}.$$

SCHOY⁴¹ sagt (S. 12), es sei natürlich leicht, von al-Birūnī's Formeln für Chord $\frac{a}{2^n}$ „auf die Sinusgrößen überzugehen“ und gibt anschließend aus HAMMERS Trigonometrie unsere Formeln (2a'') und (3a'') wieder. Das ist irreführend, denn mit diesen Formeln haben diejenigen al-Birūnī's nichts zu schaffen. Der von SCHOY angedeutete Übergang führt z. B. für Chord $\frac{a}{4}$ auf die verwickelte Formel (B), von der al-Birūnī keine Brücke zur Formel (K) geschlagen hat. Al-Birūnī besitzt eben nicht K.'s Formel (II) oder (II''), die der Schlüssel zu den Formeln (2a'') und (3a'') für die fortgesetzte Winkelhäftung ist.

Bei VIETA⁴² dagegen fällt wie bei K. das Schwergewicht auf die Folge der Ergänzungsehnungen c_i , die er in Erweiterung eines Begriffs aus dem zehnten Buch der Elemente als die „Apotomen“ der Vielecksseite s_i bezeichnet. Für diese Apotomen hat er die Formel (2a)

⁴⁰ Über diese Formel vgl. TROPFKE³⁸) 5*, S. 60.

⁴¹ FR. VIETA, Opera mathematica ed. VAN SCHOOTEN, Leiden 1646, S. 398—400.

von S. 51. VIETA gelangt, von $s_0 = c_0 = \sqrt{2}$ ausgehend, zu seiner Darstellung von $\frac{2}{\pi}$ durch das unendliche Produkt $\frac{c_2}{c_0} \cdot \frac{c_4}{c_2} \cdot \frac{c_6}{c_4} \cdot \dots$.

Daß später LUDOLF VAN CEULEN⁴²⁾ mit den Formeln (2a) und (3a) von S. 51 arbeitet, ist nicht überraschend. Aber er benutzt ungeschickterweise immer noch die Formeln (III) und (I) zur Herleitung von (2a).

Zum dritten Abschnitt

Der dritte Abschnitt zerfällt in vier Teile:

1. Der Verfasser formt die im ersten Abschnitt gestellte Genauigkeitsforderung um. (S. 6/7, 1. u. 2. Abs.)
2. Er berechnet eine obere Grenze für die der Genauigkeitsforderung genügende Seite s , des einbeschriebenen Vielecks mit $n = 2 \cdot 3$ Seiten. (S. 7, unterer Abs.)
3. Er bestimmt den zu s , gehörigen Exponenten v in der Seitenzahl $n = 2 \cdot 3$. (S. 8, Z. 11 ff.)
4. Er untersucht, bis zur wievielten Sexagesimalstelle die vorkommenden Zahlen zu berechnen sind, damit die Rechenschärfe hinreicht. (S. 8, Schluß-Abs. v. 3. Abschn.)

Zu 1.

Indem K. zunächst die Genauigkeitsforderung des ersten Abschnitts (vgl. S. 42)

$$f(u) < \frac{1 \text{ Haarbreite}}{6 \cdot 10^4 \text{ Erddurchmesser}} \cdot d$$

auf die Form

$$f(u) < \frac{1 \text{ Haarbreite}}{6 \cdot 10^4 \text{ Erdumfang}} \cdot u$$

bringt, kommt er dem Begriff des relativen Fehlers $r = \frac{f(u)}{u}$ näher, ohne diesen Begriff zu definieren.

In der Tafelrechnung von S. 6 will er nun beweisen, daß seine Genauigkeitsforderung erfüllt ist, wenn der Fehler des Umfangs weniger als eine Gradoktave, d. h. eine Oktave von einem Grad des Umfangs beträgt. Er behauptet nämlich

$$q = \frac{1 \text{ Gradoktave}}{360 \text{ Grad}} \left[= 10 \cdot 60^{-10} \right] < \frac{1 \text{ Haarbreite}}{6 \cdot 10^4 \text{ Erdumfang}}.$$

Es ist

$$(10 \cdot 60^{-10}) \cdot (6 \cdot 10^4 \text{ Erdumfang}) < \underbrace{\frac{\text{Farsang}}{\text{Finger}}}_{\frac{\text{Ellen}}{\text{Haarbreiten}}} \cdot 24 \cdot 36 = \frac{260}{3^2} \text{ Haarbreiten} \approx 0.823 \text{ Haarbreiten}.$$

Das ist etwas mehr als $\frac{4}{5}$ Haarbreiten, nicht weniger, wie K. herausbekommt, nachdem er in Zeile 7 stark nach unten abgerundet hat.

Die Genauigkeitsforderung ist also erfüllt, wenn man den relativen Fehler des Umfangs oder des Näherungswertes von 2π

$$r = \frac{f(u)}{u} < q = \frac{1 \text{ Gradoktave}}{360 \text{ Grad}} = \frac{60^{-1}}{360} = 10 \cdot 60^{-10}$$

macht. Es bleibe dahingestellt, ob K. von einer solchen zahlenmäßigen Formulierung seiner

⁴²⁾ LUDOLF VAN CEULEN, Van den Cirkel, Delft 1596 (nicht eingesehen); LUDOLFI A CEULEN de circulo et adscriptis liber ed. WILLEBRORD Snellius 1619.

Genauigkeitsforderung ausging, oder der im ersten Abschnitt gegebenen populären Fassung. Diese könnte er nachträglich konstruiert haben.

Erst recht ist die Genauigkeitsforderung erfüllt, wenn als obere Fehlergrenze nicht eine Gradoktave, sondern eine Oktave eines Durchmesseranteils gesetzt wird; denn wenn man den Umfang in Durchmesseranteilen mißt, so tritt in der letzten Ungleichung an die Stelle des Nenners 360 der Nenner

$$360 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 360 \left(1 + \frac{1}{21}\right) = 377 + \varepsilon, \quad \varepsilon < 1.$$

Statt des Wortes für 377 (S. 7, Z. 1) steht in der Hs das Wort für 366, dem ich keinen Sinn geben kann. An sich wäre an dieser Stelle auch die Lesung „376 und ein Bruch“ sinnvoll, aber K. müßte dann einen viel genaueren Näherungswert als $3\frac{1}{7}$ für π zugrunde gelegt haben, was an dieser Stelle nicht zu erwarten ist und für die Abschätzung unnötig wäre. Auch kurz nach dieser Stelle (S. 7, letzte Z.) legt er $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ zugrunde. Daß ein Abschreiber statt des von mir als richtig angenommenen Wortes für 77 das Wort für 66 liest, ist allerdings ungewöhnlich; eher hätten die Lesungen 79 oder 97 oder 99 unterlaufen können.

Einfacher können wir die Ersetzung der Gradoktave durch die Oktave eines Durchmesseranteils dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir

$$r < \sigma = 10 \cdot 60^{-10}$$

ersetzen durch

$$r < \sigma = 10 \cdot 60^{-10} \cdot \frac{3}{\pi}.$$

Zu 2.

Diese Aufgabe läßt sich folgendermaßen lösen:

Der relative Fehler des Näherungswertes von 2π ist

$$r = \frac{f(u)}{u} < \frac{U_n - u_n}{u_n} = \frac{du_n}{u_n} = \frac{d - c_r}{c_r}, \text{ nach (5) von S. 50.}$$

Also ist die Forderung $r < \sigma$ erfüllt, wenn man s , aus

$$\frac{d - c_r}{c_r} = \sigma, \quad s^2 = d^2 - c_r^2, \text{ nach (3) von S. 50,}$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$s^2 = d^2 \cdot \frac{\sigma^2 + 2\sigma}{(\sigma + 1)^2} > d^2 (2\sigma - 3\sigma^2).$$

Erst recht ist die Genauigkeitsforderung erfüllt, wenn man schrittweise s , so weiter verkleinert, wie es die beiden folgenden Gleichungen angeben:

$$s^2 \leq d^2 (2\sigma - 3\sigma^2) = d^2 \left[20 \cdot 60^{-10} \cdot \frac{3}{\pi} - 300 \cdot 60^{-20} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \right],$$

$$s \leq d \cdot 4 \cdot 60^{-5} = 120 \cdot 4 \cdot 60^{-5} = 8 \cdot 60^{-4} \text{ Durchmesseranteile.}$$

Die Genauigkeit reicht also hin, wenn man s , gleich oder kleiner als 8 Quarten eines Durchmesseranteils macht. K. erhielt statt dessen (S. 8, Z. 10) das hinreichende Ergebnis: gleich oder kleiner als 7 solcher Quarten. Er findet es folgendermaßen:

Ist in Fig. 2 $b\hat{h}$ die gesuchte, hinreichend kleine Vieleckseite, so fordert er, da $1 - \frac{1}{21} < \frac{3}{\pi}$ ist,

$$r < \frac{du_n}{u_n} = \frac{kl - b\hat{h}}{b\hat{h}} = \frac{i\hat{t}}{h\hat{i}} < 10 \cdot 60^{-10} \cdot \left(1 - \frac{1}{21}\right) < \sigma.$$

Da nun für eine sehr kleine Vielecksseite mit sehr großer Annäherung

$$h\hat{i} = h\hat{t} - i\hat{t} = \frac{d}{2} - i\hat{t} \approx 60 \text{ Durchmesseranteilen ist, so ergibt sich}$$

$$i\hat{t} < \approx 10 \cdot 60^{-9} \cdot \frac{20}{21} \text{ Durchmesseranteilen,}$$

und K. überblickt ohne weiteres, daß die Forderung sicher durch

$it < 8 \cdot 60^{-8}$ Durchmesserteile = 8 Nonen erfüllt ist. Die genaue Ausrechnung ergibt

$$it < \frac{200 \cdot 60}{21 \cdot 60^{10} + 200} \text{ Durchmesserteile} < 8 \text{ Nonen.}$$

Die im Text gemachten Forderungen

$$\frac{it}{hi} < \frac{\frac{1}{6} \text{ Gradoktave}}{1} \left(1 - \frac{1}{21}\right) \text{ und } \frac{it}{hi} < 8 \text{ Nonen}$$

sind dahin zu berichtigen, daß it statt $\frac{it}{hi}$ zu setzen ist.

Weiter gilt

$$2it = ab - ah = d - c, < 16 \cdot 60^{-9} \text{ Durchmesserteile,}$$

$$s_r^2 = d^2 - c_r^2 = (d + c_r)(d - c_r).$$

Da nun $d - c_r = 2it$ und für sehr kleines s_r mit sehr großer Annäherung $d \div c_r$ durch $2d = 4 \cdot 60$ Durchmesserteile ersetzt werden kann, so ergibt sich $s_r^2 < \approx 4 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 60^{-9} = 64 \cdot 60^{-8}$ Durchmesserteile, und K. überblickt ohne weiteres, daß die Forderung sicher durch

$$s_r < 7 \cdot 60^{-4} \text{ Durchmesserteile} = 7 \text{ Quarten}$$

erfüllbar ist. Die wirkliche Ausrechnung ergibt $s_r^2 = 8 \cdot 60 it - 4 it^2$, und für $it < 8 \cdot 60^{-8}$ Durchmesserteile ist $s_r \leq 7 \cdot 60^{-4}$ Durchmesserteile hinreichend klein.

Zu 3.

Der zu s_r gehörige Bogen hat, in Grad gemessen, die Größe

$$b_r = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{3 \cdot 2^i}.$$

In Durchmesserteilen gemessen beträgt er $b_r \cdot \frac{\pi}{3}$, und es ist

$$s_r < b_r \cdot \frac{\pi}{3} < b_r \left(1 + \frac{1}{21}\right).$$

Die Forderung $s_r < 7$ Quarten wird also erfüllt durch

$$b_r \left(1 + \frac{1}{21}\right) = \frac{360}{3 \cdot 2^i} \left(1 + \frac{1}{21}\right) < 7 \text{ Quarten.}$$

K. löst diese Exponentialungleichung in der Tafel 3a durch Versuchen, indem er die Seitenzahl $n = 3 \cdot 2^i$ und den Bogen $\frac{120^\circ}{2^i}$ nacheinander für $i = 0, 1, 2, \dots$ ausrechnet. Die Ergebnisse sind sexagesimal geschrieben. Für $i = v = 28$ unterschreitet das $\frac{22}{21}$ -fache des Bogens erstmalig die Schranke 7 Quarten. Als zugehörige Seitenzahl $n = 3 \cdot 2^{28}$ ergibt sich die Sechzigerzahl 1 2 8 16 12 48. Im Zehnergefüge ist das 800 335168. K. muß also dem Kreise ein Vieleck von 800 335168 Seiten ein- und umbeschreiben, um den Kreisumfang mit der gewünschten Genauigkeit zu finden.

Zu 4.

Der Fehler des Umfangs $f(u) < 60^{-4}$ Durchmesserteile beruht darauf, daß u nur in ein Intervall $\Delta u_n = U_n - u_n$ eingeschlossen werden kann. Zu diesem Fehler, den wir den Intervallfehler nennen wollen, tritt derjenige hinzu, der dadurch hervorgerufen wird, daß die Sexagesimalzahlen U_n und u_n und die Zahlen, aus denen sie hervorgehen, nur bis zu einer gewissen Sexagesimalstelle berechnet werden. Derartige Fehler mögen als Abkürzungsfehler bezeichnet werden.

In K.s Überlegungen über die Größe und den Einfluß der Abkürzungsfehler vermissen wir die ausdrückliche Feststellung, daß die Abkürzungsfehler zu dem Intervallfehler hinzukommen, und daß der durch Überlagerung dieser beiden Fehlergattungen entstehende Gesamtfehler für die Genauigkeit des Ergebnisses maßgebend ist. Um u , also π , auf eine bestimmte Anzahl von Stellen richtig anzugeben, müßte, da nichts darüber ausgemacht ist, wie nahe u etwa an u_n oder U_n herankommt, erreicht werden, daß dieser Gesamtfehler kleiner als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Sexagesimalstelle wird.

Im vorliegenden Abschnitt fehlt auch eine Äußerung darüber, daß bei der Berechnung jedes einzelnen der Werte $c_1, c_2, \dots, c_{28}, s_{28}, u_n, \Delta u_n, U_n$ ein Abkürzungsfehler begangen wird, und daß es zwar sehr unwahrscheinlich, aber nicht von vornherein unmöglich ist, daß diese Abkürzungsfehler alle oder überwiegend dasselbe Vorzeichen haben und sich verstärken. An diese Möglichkeit hat K. aber gedacht, und er hat deshalb im siebenten Abschnitt nachträglich die tatsächlichen Abkürzungsfehler nacheinander berechnet.

Zunächst (S. 8, Z. 25) spricht der Verfasser so, als genüge es, wenn der Abkürzungsfehler des Umfangs ebenso wie dessen Intervallfehler kleiner als eine Oktave eines Durchmesserteils bleibt. Er glaubt diese Genauigkeit dadurch zu erreichen, daß er den Abkürzungsfehler von s_{28} kleiner als eine Tredezime macht. Würde er aber hierbei etwa u_n nach unten und $\Delta u_n = U_n - u_n$ nach oben abzukürzen haben, so ist, zumal die Seitenzahl n etwas größer als 60^5 ist, nicht von vornherein sicher, ob der Wert der abgekürzten Größe Δu_n unter einer Oktave bleibt. Von dem später vorgenommenen Übergang zum Mittelwert $u = \frac{U_n + u_n}{2}$ ist im vorliegenden Abschnitt noch nichts gesagt.

Tatsächlich berechnet K. denn auch, wie man aus Taf. 17b ersieht, s_{28} bis auf die Quattuordezimen und verschärft diese Berechnung im siebenten Abschnitt durch eine Verfeinerung der vorhergehenden Rechnungen, die einer Berechnung aller c_i auf eine Stelle mehr gleichkommt. Damit drückt er den Abkürzungsfehler auf ein gesünderes Verhältnis zu dem durch das Stehenbleiben bei $\nu = 28$ verursachten Intervallfehler herab.

Weiter erhebt sich für ihn die Frage: Wenn s_{28} mit einem Höchstfehler von 1 Tredezime berechnet werden soll, wie genau müssen dann die Größen berechnet werden, aus denen s_{28} gefunden wurde? Rückwärts gehend sucht K. deshalb nach der für $s_{28}^2, c_{28}^2 = d^2 - s_{28}^2, c_{27}, \dots, c_2, c_1$ erforderlichen oder hinreichenden Genauigkeit. Verstehen wir ihn recht, so kommt er durch nicht einwandfreie Überlegungen zu dem Ergebnis, daß z. B. bei s_{28}^2 und c_{28}^2 der Fehler den Betrag von 7 Septendezimen nicht überschreiten dürfe. Er hätte für s_{28}^2 als obere Fehlergrenze etwa 14 Septendezimen ansetzen sollen; denn für hinreichend kleines δ ist $(s_{28} + \delta)^2 \approx s_{28}^2 + 2\delta \cdot s_{28}$.

Die Überlegungen führen K. (Ende des 3. Abschn.) zu dem Entschluß, alle c_i bis auf die Oktodezimen genau zu berechnen. Hier vermissen wir eine Äußerung darüber, ob er diese für jedes c_i geforderte gleiche Genauigkeit zur Erreichung der für s_{28} geforderten Genauigkeit für notwendig hält. Da er im siebenten Abschnitt sogar die Abkürzungsfehler dieser Größen nacheinander näherungsweise ausrechnet, also die Undevizesen berücksichtigt, so hat er entweder tatsächlich die Ausrechnung aller c_i bis zu den Oktodezimen oder Undevizesen für notwendig gehalten, oder er betrachtete diese Genauigkeit als hinreichend, ohne sich darüber Rechenschaft zu geben, ob sie notwendig. Sie ist nicht für alle c_i notwendig und K. hätte sich erhebliche Rechenarbeit sparen können, wenn er das erkannt hätte.

Es hätte nämlich genügt, die ersten der Größen $c_1, c_2, c_3, \dots$ mit geringerer Genauigkeit zu berechnen und erst mit wachsendem Index i von c_i die Genauigkeit zu steigern. Dies soll jetzt gezeigt werden.

5

Wir erfüllen (12), indem wir die rechte Seite von (11) kleiner als 60^{-10} machen. Dies erreichen wir, indem wir verlangen

$$(13) \quad \varepsilon = 11 \cdot 60^{-11}, \quad (14) \quad f(s_{28}) < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}, \quad (15) \quad f(u_n) < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_{27} < c_{28} < 2, \\ c_2 = 2 \cos 15^\circ > 1,93, \quad c_3 = 2 \cos 7^\circ 5' > 1,98 \\ 22 c_2 > 30, \quad (2 c_2)^2 > 60. \end{aligned}$$

Wir erfüllen also die Ungleichungen (9), wenn wir so genau rechnen, daß

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-12} < \frac{2c_2 \cdot 22c_3}{60} [(2c_2)^2]^8 \cdot 60^{-20} < 2^{24} \cdot c_2 c_3 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_2 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-12} < \frac{2c_3 \cdot 22c_4}{60} [(2c_3)^2]^8 \cdot 60^{-20} < 2^{24} \cdot c_3 c_4 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_3 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{(2c_3)^2 \cdot 22c_5}{60} [(2c_3)^2]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{24} \cdot c_4 c_5 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_4 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{2c_5 \cdot 22c_6}{60} [(2c_5)^2]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{23} \cdot c_5 c_6 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_5 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-13} < \frac{2c_6 \cdot 22c_7}{60} [(2c_6)^2]^7 \cdot 60^{-20} < 2^{22} \cdot c_6 c_7 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_6 &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-14} < \frac{(2c_6)^2 \cdot 22c_8}{60} [(2c_6)^2]^6 \cdot 60^{-20} < 2^{21} \cdot c_7 c_8 \dots c_{27} \cdot \varepsilon \\ &\dots \dots \dots \\ f_{24} &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{(2c_2)^2 \cdot 22c_3}{60} \cdot 60^{-20} < 2^3 \cdot c_{23} c_{24} c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_{25} &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{2c_3 \cdot 22c_4}{60} \cdot 60^{-20} < 2^2 \cdot c_{26} c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_{26} &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-20} < \frac{2c_4 \cdot 22c_5}{60} \cdot 60^{-20} < 2 \cdot c_{27} \cdot \varepsilon \\ f_{27} &< \frac{1}{2} \cdot 60^{-21} < \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Damit ist bewiesen: Um u_n auf eine Einheit an der zehnten Sexagesimalbruchstelle genau zu berechnen (Ungleichung 12), genügt es, zu berechnen:

c_1 und c_2 auf 12 Stellen nach dem Komma,

c_3, c_4 „ „ c_5 „ 13 „ „ „ „ „ „

c_6, c_7 „ „ c_8 „ 14 „ „ „ „ „ „

c_{24}, c_{26} „ „ c_{28} „ 20 „ „ „ „ „ „

c_{27} „ „ 21 „ „ „ „ „ „

s_{28} „ „ 16 „ „ „ „ „ „

(Ungleichung 14).

K., der $r = 60$ setzt, hätte hiernach, statt alle c_i bis auf die Undevizesen zu berechnen, c_1 und c_2 bis auf die Undezimen, c_3, c_4, c_5 bis auf die Duodezimen, usw., c_{27} bis auf die Vizesen und s_{28} bis auf die Quindezimen berechnen sollen.

Diesen Abschätzungen wurde die überaus unwahrscheinliche ungünstigste Annahme zugrunde gelegt, daß sich alle Abkürzungsfehler verstärken. In Wirklichkeit besteht die sehr große Wahrscheinlichkeit, daß sie sich größtenteils gegenseitig aufheben.

Zum vierten und fünften Abschnitt

Nun beginnt die Rechenarbeit. Im vierten Abschnitt sind nacheinander nach (2) von S. 50 die 28 Größen c_1 bis c_{28} berechnet; unsere Übersetzung gibt die Berechnungen von c_1 (Taf. 3b), c_2 (Taf. 4a), c_{13} (Taf. 10b) und c_{25} (Taf. 17a) wieder und teilt die Überschriften und Ergebnisse aller Berechnungen mit. Im fünften Abschnitt (Taf. 17b) schließt sich die Berechnung von s_{28} nach (3) von S. 50 an.

Der großen theoretischen Einfachheit des Verfahrens steht praktisch der Nachteil gegenüber, daß die c_i auf mehr Stellen zu berechnen sind, als nachher für s_{21} und u_n gewünscht werden, weil die Größen c_i mit wachsendem i dem Werte 2 zustreben und deshalb bei der Berechnung von s_{23} aus c_{27} infolge der Abziehung $2 - c_{27}$ der relative Fehler einen Sprung nach oben macht. Es ist wie bei der Berechnung des Sinus eines sehr kleinen Winkels aus seinem Kosinus, und dies ist nicht nur ein Vergleich, sondern der Kern der Sache, denn c_{23} ist nach (2a'') von S. 52 das Doppelte des Kosinus eines sehr kleinen Winkels, und s_{23} ist nach (3a'') das Doppelte des Sinus desselben Winkels. Aber die Natur der Formeln für die c^i bewirkt zugleich Erscheinungen, die jenem Nachteil ein Gegengewicht halten und die Rechenarbeit erheblich herabsetzen. Hierauf werden wir zurückkommen.

Jede der 28 Berechnungstafeln des vierten und ebenso die Berechnungstafel des fünften Abschnitts enthält eine Quadratwurzelausziehung. Die erste Tafel (Taf. 3b) z. B., die wir zunächst betrachten wollen, bringt die Berechnung der Quadratwurzel aus der Sechzigerzahl $3\ 0\ 0 = 3 \cdot 60^2$, wenn man mit $K. r = 60$, oder aus 3, wenn man $r = 1$ zugrunde legt, was nur eine Verschiebung der Stellenwerte, im Radikanden um 2 und im Ergebnis um eine Sechzigerstelle bedeutet. In der äußeren Anordnung ist die Quadratwurzelausziehung nach dem Muster angelegt, das K. im 'Schlüssel' als das von ihm selbst erdachte und bevorzugte bezeichnet. Neu ist hier nur gegenüber dem „Schlüssel“, daß wir es mit abgekürzter Rechnung zu tun haben, d. h., daß von einer bestimmten Stelle ab alle folgenden unterdrückt sind. Wie im Schlüssel sind die Stellen des Ergebnisses, die wir, als Zahlen nach ihrem Stellenwert gerechnet, mit $a_1, a_2, a_3, \dots$ bezeichnen wollen, in der Reihenfolge ihrer Aufindung über Stellen des Radikanden geschrieben worden, und zwar Einmal Erhöhtes über Zweimal Erhöhtes, Grad über Grad, Minuten über Sekunden usw. Die im unteren Teil des Schemas gebildeten Zahlen $a_1, 2a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2 + a_3, \dots$ seien 'die unteren Zahlen' genannt. Aus ihnen werden oben die von dem jeweiligen Rest abzuziehenden Produkte $a_1^2, (2a_1 + a_2)a_2, (2a_1 + 2a_2 + a_3)a_3, \dots$ berechnet, die wir 'die Vielfachen' nennen wollen. Zur Raumersparnis hat K. ein Stück der Rechnung nach oben und ein Stück der Folge der unteren Zahlen nach unten verschoben.

Der letzte Rest 3 16 27 der Wurzelausziehung tritt nach Bestimmung der 58 Septendezimen des Ergebnisses auf. Die folgende, letzte Stelle der Wurzel, 57, ergibt sich als aufgerundetes Ergebnis der Teilung 3 16 27 : 3 27 50.

Die Richtigkeit der Wurzelausziehung prüft K. auf zweifache Weise nach, durch die Neunundfünfzigerproben und dadurch, daß er das Quadrat des Ergebnisses ausrechnet und mit dem Radikanden vergleicht. Zum Zwecke der Neunundfünfzigerprobe steht in der mit 'Waage' überschriebenen Spalte der kleinste nicht negative Rest, der übrig bleibt, wenn man die Quersumme der auf gleicher Höhe stehenden Sechzigerzahl durch 59 teilt. Z. B. steht (Taf. 3b, Reihe 15) auf der Höhe der unteren Zahl 3 27 50 44 58 die Waage 5, da $3 + 27 + 50 + 44 + 58 = 5 \bmod 59$ ist. Entsprechend steht (Taf. 3b, Reihe 5 u.) auf der Höhe der Vielfachen $58 \times 3\ 27\ 50\ 44\ 58 = 3\ 20\ 55\ 3\ 28\ 4$ die Waage 54, da $3 + 20 + 55 + 3 + 28 + 4 = 54 \bmod 59$ ist. Die Neunundfünfzigerprobe verlangt nun, daß $58 \times 5 = 54 \bmod 59$ ist, und das trifft zu.

Im unteren Teil der Berechnungstafel (Taf. 3b) quadriert K. sein bis zu den Septendezimen genommenes Ergebnis der Wurzelausziehung 1 43 55 22 58 27 57 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 und fügt zu der erhaltenen Quadratzahl den in der Wurzelausziehung bei Erreichung der Septendezimen verbliebenen Rest von 3 16 27 Oktodezimen (Reihe 10). Er erhält bis zu den Oktodezimen genau den Radikanden 3 0 0 Einer.

Die Quadrierung der n -stelligen Sechzigerzahl $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ geschieht nach der Formel

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

$$= 2[(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})a_n + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2})a_{n-1} + \dots + (a_1 + a_2)a_3 + a_1a_2] + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

K. vervielfacht deshalb jede Stelle mit jeder *anderen* Stelle der Zahl, zählt die Vielfachen zusammen (Reihe 11 ob.) und nimmt die Summe noch einmal (Reihe 11 u.). Hierzu fügt er (Reihe 12 ob.) die Summe der Quadrate der einzelnen Stellen. Die Vielfachen jeder Stelle mit jeder anderen Stelle sind nach einem der im „Schlüssel“ mitgeteilten Vervielfachungsschemata gestaffelt niedergeschrieben. Wenn man z. B. die Ziffer 27 mit allen vorhergehenden Ziffern 1, 43, 55, 22, 58 vervielfacht, so erhält man die in der folgenden Wiedergabe mit vollen Linien umrahmten und gestaffelt von links oben nach rechts unten niedergeschriebenen zweistelligen Produkte.

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</

Vervielfacht man die der 27 vorhergehende Ziffer 58 mit allen ihr vorhergehenden, so ergibt sich die Folge der gestrichelt umrahmten Teilprodukte usw.

Reihe 12 ob. enthält die Summe der Quadrate der einzelnen Stellen. Schreibt man diese Quadrate $1^2 = 1$, $4^2 = 30\ 9$, $5^2 = 50\ 25$, ... erforderlichenfalls zweistellig (z. B. 3^2 in der Form 0 9), so sind sie alle lückenlos nebeneinander zu setzen.

Die am unteren Rand der ersten und der folgenden Berechnungstafeln stehenden indischen Ziffern geben die bei der Zusammenzählung der Teilprodukte auf die nächst höhere Sechzigerstelle zu übertragenden Einheiten an.

Wir sehen nun zu, wie K. bei der abgekürzten Quadratwurzelausziehung und bei der abgekürzten Vervielfachung die letzten Stellen hinsichtlich etwaiger Erhöhung behandelt hat. Er weiß sehr wohl, daß, wenn er eine Zahl bei einer gewissen Stelle abbricht, und die folgenden, vernachlässigten Stellen mehr als die Hälfte der letzten hingeschriebenen Stelle ausmachen, diese letzte hingeschriebene Stelle zu erhöhen ist. Das sehen wir z. B. später in den abgekürzten Vervielfachungen von Taf. 19a befolgt, wo sowohl in der sexagesimalen wie in der dezimalen Ausführungsweise die als Teilprodukte auftretenden, aus Tafeln entnommenen Vielfachen von 2π konsequent nach der angegebenen Vorschrift abgekürzt werden.

Nicht so schematisch verfährt K. bei der Wurzelausziehung und der Probequadrirung. Sonst hätte er nicht im Ergebnis aller 29 Probequadrirungen in der letzten Stelle (den Oktodezimen bei der ersten, den Undevizesen bei den 27 folgenden Berechnungen und den Vizesen bei der Berechnung von s_{24} , auf Taf. 17 b) genau Null erhalten können.

Bei der ersten Berechnung wollen wir etwas genauer betrachten, wie er hinsichtlich der Abkürzung verfährt. In den unteren Zahlen schreibt er noch die Undevizesen nieder, ohne aber diese Stelle zu erhöhen, wenn der folgende, weggelassene Teil der Zahl größer als 30 Einheiten der nächsten Stelle war. Sein Verhalten bei der Bildung und Abziehung der Vielfachen zeigen die auf der folgenden Seite angegebenen Zahlenspalten. Die erste gibt die Oktodezimen so wieder, wie sie in der Handschrift stehen. Verbessert man die offen-

baren Schreibfehler (Reihe 7 ob.) 59 in 51 und (Reihe 8 ob.) 41 in 17, so entsteht die zweite Spalte unserer Zusammenstellung, in der alle Abziehungen bis auf eine richtig sind.

$\overline{35}$	$\overline{35}$			$\overline{35}$
$\overline{54}$	$\overline{54}$	53	54	$\overline{54}$
$\overline{41}$	$\overline{41}$			$\overline{41}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	1	2	$\overline{2}$
$\overline{39}$	$\overline{39}$			$\overline{39}$
$\overline{52}$	$\overline{52}$	52	52	$\overline{52}$
$\overline{47}$	$\overline{47}$			$\overline{47}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	8	9	$\overline{8}$
$\overline{39}$	$\overline{39}$			$\overline{38}$
$\overline{30}$	$\overline{30}$	30	30	$\overline{30}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$			$\overline{8}$
$\overline{59}$	$\overline{51}$	50	51	$\overline{51}$
$\overline{41}$	$\overline{17}$			$\overline{17}$
$\overline{46}$	$\overline{46}$	44	45	$\overline{46}$
$\overline{31}$	$\overline{31}$			$\overline{31}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	3	4	$\overline{4}$
$\overline{27}$	$\overline{27}$			$\overline{27}$

Hätte K. nun die Vielfachen aus den von ihm ohne Erhöhung der Undevizesen abgekürzten unteren Zahlen gebildet und dabei auch die Oktodezimen der Vielfachen gegebenenfalls nicht erhöht, so hätten die Vielfachen die in der dritten Spalte angegebenen Ziffern erhalten. Sie widersprechen dem Befund. Erhöht man aber nötigenfalls die Oktodezimen, so erhalten die Vielfachen die in der vierten Spalte angegebenen Oktodezimen, und rechnet man noch genauer, indem man noch eine weitere Stelle der unteren Zahlen berücksichtigt, so erhält die Rechnung das in unserer fünften Spalte dargestellte Gesicht. Man bekommt dann in Übereinstimmung mit der Hs beim letzten Rest 27 Oktodezimen, und das ist, wie die Probe durch Quadrierung zeigt, die beste Abrundung des wahren Restes. Es bleibe dahingestellt, wie in der Hs die kleinen Unstimmigkeiten in den Oktodezimen zustande kamen. Trotz dieser Unstimmigkeiten scheint mir ersichtlich, daß K. bei der Vervielfachung nicht nur nötigenfalls erhöht, sondern auch die genaueren Werte der unteren Zahlen berücksichtigt. Vermutlich hat er, nachdem die Probe durch Quadrieren den richtigen Wert der Oktodezimen des Restes ergab, nämlich 27, die Oktodezimen der Wurzelausziehungsrechnung ein wenig ausgeglichen, um hier beim Rest ebenfalls 27 Oktodezimen zu erhalten. Auch bei den Vielfachen in der Berechnung von s_{28} (Taf. 17b) zieht K. in den Reihen 8 u. und 9 u. die unteren Zahlen genauer in Rechnung, als er sie in den Reihen 14 ob. und 14 u. angibt.

Im Unterschied zur ersten Berechnung schreibt K. in der zweiten (Taf. 4a) bei der Wurzelausziehung von den unteren Zahlen, ihren Vielfachen und den Resten eine Stelle mehr hin, meistens ohne eine durch den Wert der darauf folgenden Stelle erforderliche Erhöhung vorzunehmen. Bei der Probe durch Quadrierung hat er in drei Fällen (Reihen 3 ob., 7 ob., 9 ob.) an der 19-ten Bruchstelle die von der zwanzigsten erforderlich gemachte Erhöhung vorgenommen, in einem Falle (Reihe 7 u.) nicht. Hierdurch, und dadurch, daß er (Reihe 11 u.) die letzte Reststelle mit 44 statt mit der in Reihe 10 [ob. Taf.] erhaltenen 43 ansetzt, erzielt er für das Auge eine Übereinstimmung der Zahlen der Reihen 1 [ob. Taf.] und Reihe 12 [Quadrate] bis zur 20-ten Sechzigerbruchstelle.

Von der siebenten Berechnung ab hat der Verfasser, wie es aus der 15-ten und der 28-ten zu ersehen ist, auch bei den Vielfachen und Differenzen der Wurzelausziehungsrechnung teilweise die zwanzigste Bruchstelle niedergeschrieben und verrechnet. Da, wo er dies bei der 15-ten Berechnung tut (Taf. 10b), ist die folgende Stelle ebenso wenig wie bei den

unteren Zahlen berücksichtigt. Dies geht für die Vielfachen schon daraus hervor, daß er die Neunundfünfzigerprobe auf die abgekürzten Zahlen anwendet.

In der 28-sten Berechnung (Taf. 17a) sehen wir auch in den unteren Zahlen rechts die durch die Weglassung der höheren Stellen bedingten Erhöhungen vorgenommen, wodurch sich für die unteren Zahlen die Vervielfachung vereinfacht. In Reihe 4 u. hat die 20-ste Bruchstelle fälschlich 13 statt 2. Dieses Versehen rührt wohl daher, daß die auf 2 folgende Stelle 13 lauten würde. Das ist ein Anzeichen dafür, daß K. hier auch die 21-ste Bruchstelle ausgerechnet hatte. In Reihe 5 u. scheint ein ähnliches Versehen vorzuliegen. Bei genauer Rechnung müßte hier die 20-ste Bruchstelle 59 und erst die 21-ste 56 lauten, und K. hätte richtiger schon in Reihe 14 u. geschrieben: 4 0 Beide Versehen beeinflussen nicht die 19-te Bruchstelle, also auch nicht die weitere Rechnung.

Wie wir schon anfangs bemerkten, hat K. bei allen Probequadrirungen in den beiden letzten Stellen des Quadrats für das Auge Nullen hergestellt. Wenn er, um dies zu erreichen, bei den Teilprodukten ausgleichend Erhöhungen manchmal vornimmt und manchmal unterläßt, so erfüllt doch, wie die Nachprüfung im einzelnen zeigt, bei den c_i jede Probequadrirung ihren Zweck insofern, als sie die Richtigkeit jeder einzelnen Quadratwurzelausziehung bis zu den Septendezimen und die Richtigkeit des bei Erreichung der Septendezimen angegebenen Restes nachweist. Den Begriff 'Richtigkeit' meine ich in dem Sinne, daß der Fehler kleiner als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Stelle ist.

Die Natur der Formeln für c_i bringt zweierlei Erleichterungen der Rechenarbeit mit sich. Die erste besteht darin, daß wir, um eine vorgeschriebene Genauigkeit von s_{18} zu erreichen, c_i um so weniger genau zu berechnen brauchen, je kleiner i ist. So zeigten wir (S. 58—59), daß es z. B. genügt, für $r = 1$ die Größen c_1, c_2 auf 12 Sexagesimalbruchstellen zu berechnen, wenn der Fehler von u_n weniger als 60^{-12} betragen soll. Diesen Vorteil hat K. nicht ausgenutzt, wohl aber den anderen, der im Gegensatz zum ersten Vorteil erst bei wachsendem i erscheint und immer größer wird. Dieser Vorteil ergibt sich ganz von selbst daraus, daß die c_i mit wachsendem i dem Werte 2 zustreben. Die Radikanden $2 + c_i$ der einzelnen Wurzelausziehungen haben infolgedessen hinter den 3 Einern mit wachsendem i bei dezimaler Schreibung immer mehr Ziffern 9, bei sexagesimaler immer mehr Ziffern 59. So ist, wie wir aus der 15-ten Berechnung (Taf. 10 b) ersehen, $2 + c_{14} = 3 | 59\ 59 | 59\ 59 | 56\ 49 | 23\ 56 | \dots$. Die Folge ist, daß K. mit einem Schlage als erstes Teilergebnis der Wurzelausziehung die ersten 5 Stellen 1 59 59 59 59 angeben kann. Er hätte sogar eine Stelle mehr hinschreiben können. Dieser Vorteil, mehrere Anfangsstellen auf einmal erledigen zu können, den K. von der siebenten Berechnung an ausnutzt, wird für uns durchsichtiger, wenn wir in den Sechzigerzahlen negative Ziffern zulassen und im vorliegenden Fall den Radikanden schreiben: $2 + c_{14} = 4 | 00 | 00 | -4\ 49 | 23\ 56 |$. Für derartige Zahlen bleibt das von K. angewandte Radizierungsverfahren gültig; wir erhalten als höchste Stelle der Quadratwurzel die Ziffer $\sqrt{4} = 2$, und weiter mit einem Schlage die Stellen 0 0 0 0 —1; dann käme als nächste Stelle 12, und der Beginn der Rechnung sähe so aus (Taf. 10 b):

oben	2	0	0	0	0	—1	12
Reihe 1 ob.	4	0	0	0	0	—4	49 23 56 53 53 39 8
„ 1 u.	4	0	0	0	0	—4	0 0 0 0 0 1
						49	23 56 53 52
						48	0 0 0 0 —22 24
						1	23 56 53 53 0 44
Reihe 17 ob.						4	0 0 0 0 0 —2 12
„ 17 u.						4	0 0 0 0 0 —1

Bei der 28-sten Berechnung (Taf. 17a) konnte K. auf diese Weise auf einmal die ersten 10 Stellen des Ergebnisses $c_{28} = 1\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59 \dots$ angeben. Weitere Stellen

hätte er übrigens leicht mit Hilfe der altbekannten Näherungsformel $\sqrt{a^2 - \delta} = a - \frac{\delta}{2a}$ ausrechnen können. Auf diese Weise hätte er bei der 28-sten Berechnung auf Grund der Näherungsgleichung

$$c_{28} = \sqrt{4 - (2 - c_{27})} \approx 2 - \frac{2 - c_{27}}{4}$$

die ersten 19 Stellen seines 20-stelligen Ergebnisses richtig erhalten und nur die letzte, 20-ste Stelle wäre um eine Einheit zu groß ausgefallen. Denn es ist

$$2 \div c_{27} = 4 \div 0.0^9 - 37\ 11 \dots$$

$$c_{28} = \sqrt{2 \div c_{27}} = 2 \left(1 \div \frac{0.0^9 - 37\ 11 \dots}{8} - \frac{(0.0^9 - 37\ 11 \dots)^2}{128} \div \dots \right),$$

und das quadratische Glied dieser Entwicklung bewirkt, daß von der Stelle 45-60⁻²⁰ die Zahl $\approx 21.60^{-20}$ abzuziehen ist, so daß bei der Abkürzung die vorhergehende Ziffer 40 bleibt. K. konnte zwar die Abschätzung der Gültigkeit der Näherungsformel nicht in dieser Form ausführen, doch hätte die Quadrierung des Näherungswertes ihn auf die kleine Korrektur desselben bringen können. Seine Rechnungsweise kommt übrigens schließlich auf dasselbe hinaus wie die Näherungsformel, denn wegen der Abkürzung ist sein Radizierungsverfahren im späteren Verlauf ganz zu einem Verfahren der Teilung durch 4 geworden.

Die Schreibweise des Radizierungsverfahrens vereinfacht der Verfasser dadurch, daß er von den auftretenden Folgen von Ziffern 59 nur die erste und die letzte 59 hinschreibt.

Natürlich wirkt sich die Eigenart der Zahlen c_i auch bei den Probequadrierungen mit wachsendem i mehr und mehr aus. Auch hier könnte man einfacher rechnen, wenn man in der Sechzigerentwicklung negative Koeffizienten zuließe. Bei K. wiederholen sich infolge wiederholten Auftretens des Multiplikators 59 staffelförmig angeordnete Paare untereinanderstehender Ziffern. Von der neunten Berechnung ab nutzt er diese Gleichförmigkeit aus, indem er die Ziffern jedes solchen Paares von der zweiten Staffel ab schon bei der Niederschrift zusammenzählt. So schreibt er bei der 15-ten Berechnung [Taf. 10 b (Quadrat)]

statt der Zahlen

11	11	11	11	11
2	2	2	2	2

 die Zahlen

11	13	13	13	13
2				

Überschreitet die Summe eines solchen Paares die Zahl 59, so wird der nächst höheren Stelle eine Einheit zugeschlagen, so daß sich eine links benachbarte Paarsumme um 1 erhöht. Infolge dieser Zusammenfügung von Zahlenpaaren sieht man in der 15-ten Berechnung Folgen gleicher Zahlen wie 56, 13, 27 in durch Lücken voneinander getrennten gestaffelten Reihen auftreten. Von der 19-ten Berechnung ab schreibt K. diese Folgen gleicher Zahlen nicht mehr nach unten gestaffelt, sondern schiebt sie je zu einer Zeile in die Lücken hinauf. Dadurch spart er Raum. Natürlich kann er in Zeile 51 der 28-sten Berechnung gleich das 19-stellige Quadrat der ersten 10 Stellen der Zeile 5 aus Zeile 8 abschreiben, falls es dort richtig berechnet war; von der 22-sten Berechnung ab verfährt er so.

Zum sechsten Abschnitt

Nachdem für $d = 120$ im vierten Abschnitt

$$c_{28} = 1\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 59\ 50\ 47\ 52\ 12\ 30\ 48\ 37\ 49\ 54\ 40$$

und im fünften Abschnitt

$$s_{28} = 0.0\ 0\ 0\ 6\ 4\ 1\ 14\ 59\ 36\ 14\ 33\ 36\ 19\ 25$$

gefunden wurden, ergibt sich

$$u_n = 3 \cdot 2^{29} \cdot s_{29} = 6 \ 16 \ 59 \ 28 \ 1 \ 34 \ 51 \ 46 \ 14 \ 49 \ 46, \text{ nach (4) von S. 50,}$$

$$u_n: (U_n - u_n) = c_{29}: (d - c_{29}) = \frac{c_{29}}{2}: \left(\frac{d}{2} - \frac{c_{29}}{2}\right), \text{ nach (5) von S. 50.}$$

Hieraus erhält K. bei zulässig starker Abkürzung der Rechnung

$$\Delta u_n = U_n - u_n \approx 29 \text{ Nonen.}$$

Die Spanne, die nach dem dritten Abschnitt kleiner als eine Oktave werden sollte, ist also kleiner als 29 Nonen ausgefallen. Aus

$$u_n = 6 \ 16 \ 59 \ 28 \ 1 \ 34 \ 51 \ 46 \ 14 \ 49 \ 46$$

$$U_n = u_n + \Delta u_n = 6 \ 16 \ 59 \ 28 \ 1 \ 34 \ 51 \ 46 \ 14 \ 50 \ 15$$

setzt K. als Näherungswert des Kreisumfangs

$$u \approx \frac{U_n + u_n}{2} = 6 \ 16 \ 59 \ 28 \ 1 \ 34 \ 51 \ 46 \ 14 \ 50$$

fest.

Der auf den Halbmesser 1 bezogene Wert von u , d. h. die Zahl 2π ist hiermit zu

$$6 \ 16 \ 59 \ 28 \ 1 \ 34 \ 51 \ 46 \ 14 \ 50 \pm 0.0^\circ 15$$

berechnet.

Das Ergebnis ist richtig. Aus dem seit LUDOLF VAN CEULEN bekannten genaueren Wert von π erhält man für 2π eine Sexagesimalzahl, die statt der bei K. an letzter Stelle stehenden 50 die Ziffern 49 55 12... hat. In Wahrheit ist also K.s Fehler von 2π nicht nur, wie er angeben konnte, kleiner als $\frac{1}{4} \cdot 60^{-9}$, sondern kleiner als $\frac{2}{25} \cdot 60^{-9}$.

K. wußte nicht, daß es viel genauer gewesen wäre,

$$u \approx \frac{U_n + 2u_n}{3}$$

anzusetzen. Bezeichnet man nämlich mit 2ξ den im Bogenmaß gemessenen sehr kleinen Zentriwinkel von s_{29} , so ist

$$\frac{U_n - u}{u - u_n} = \frac{2t_{29} - 2\xi}{2 - 2s_{29}} = \frac{\tan \xi - \xi}{\xi - \sin \xi} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2,$$

und hieraus ergibt sich für u der oben angegebene Ausdruck.

Derartige Näherungsgleichungen, besser noch die ihnen entsprechenden Ungleichungen, die aber den Kreisherechnern vor SNELL und HUYGENS verborgen waren, hätten bei hinreichend scharfer Rechnung schon mit einem Vieleck von bedeutend weniger Seiten, als K. es anwandte, die von ihm geforderte Genauigkeit ermöglicht.

In dem arabischen Merkvers, den unser Perser (S. 19, Z. 3 ff.) auf seinen sexagesimalen Näherungswert von 2π gedichtet hat, sind die in Gummalbuchstaben geschriebenen Sexagesimalziffern von 2π , also die Ziffern $w = 6$, $yw = 16$, $n = 59$ usw. in ähnlicher Weise vokalisiert, wie beim alten arabischen Alphabet, dem Abġad, die Folge der Buchstaben $a, b, ġ, d, h, w, z$ usw. durch die Folge der barbarischen Merkworte *abġad hawwaz* usw. wiedergegeben wird. Die 60 am Ende des Merkverses ist durch den Namen des Gummalbuchstabens für diese Zahl, *sin*, ausgedrückt. Am Ende des achten Abschnitts hat K. (S. 22) auch für die Ziffern der *dezimalen* Entwicklung von 2π einen arabischen Merkvers gedichtet. In diesem Vers, der wie derjenige für die Sechzigerentwicklung in dem verbreiteten Versmaß *Wāfir* abgefaßt ist, sind die Ziffern ebenfalls zu vokalisiert Gruppen der entsprechenden Gummalbuchstaben $w = 6$, $b = 2$, $h = 8$, $ġ = 3$ usw. zusammengefaßt. Dagegen gebraucht der unmittelbar darauf folgende *persische* Merkvers für die dezimale Form von 2π die persischen Zahlwörter für 6, 2, 8 usw., die dem Versmaß zuliebe durch Flickwörtchen miteinander verbunden sind.

Zum siebenten Abschnitt

K. hat jede seiner Größen $c_1, c_2, \dots, c_{25}, s_{25}, s_{25}, u_{25}$ aus der vorhergehenden insofern richtig berechnet, als der Fehler jeder einzelnen Berechnung für sich weniger als die Hälfte der zuletzt angegebenen Sechzigerstelle beträgt. Er sagt sich aber ganz richtig, daß z. B. c_2 mit einem größeren Fehler als dem genannten behaftet sein kann, weil schon die Größe c_1 , aus der c_2 berechnet wurde, fehlerhaft war, und daß sich ungünstigenfalls diese Fehler verstärken könnten. Deshalb geht er die Berechnungen der genannten Größen der Reihe nach noch einmal durch, um die letzten angegebenen Stellen daraufhin nachzuprüfen, ob sie 'mangelhaft' oder 'überschießend' sind, und um wieviel. Wenn er z. B. findet, daß das Ergebnis der ersten Berechnung (Taf. 3 b) $c_1 = 1\ 43\ 55 \dots 43\ 58\ 57$ an der letzten Stelle 'mangelhaft' ist, so meint er damit, daß die letzte Stelle eine, wie wir wohl sagen, 'schwache' 57 ist. Er findet nämlich, daß c_1 bei genauerer Rechnung mit 56 40 statt mit 57 endigen müßte. Der 'Mangel' der mit 57 endigenden Zahl beträgt hiernach 20 Einheiten der auf die 57 folgenden, neunzehnten Sexagesimalbruchstelle. Wenn er hingegen z. B. unter Berücksichtigung der 'Mängel' von c_1, c_2 und c_3 findet, daß die Größe c_4 'überschießend' ist, und zwar um 15 Einheiten der auf die als letzte angegebene folgende Stelle, so heißt das, die Zahl $c_4 = 1\ 59\ 44 \dots 32\ 16$ ist genauer durch $1\ 59\ 44 \dots 32\ 16\ 15$ anzugeben. Diese Verfeinerung bedeutet also, daß er jede dieser Größen auf eine Stelle mehr als früher berechnet. Das war bei den Quadratwurzelausziehungen leicht auszuführen. Z. B. hatte er bei der ersten Berechnung (Taf. 3 b) die letzte Stelle 57 der Wurzel dadurch gefunden, daß er auf Grund einer bei islamischen Rechnern schon um das Jahr 1000 unserer Zeitrechnung nachweisbaren linearen Interpolation nach der Formel

$$\sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{(T+1)^2 - T^2} = T + \frac{r}{2T+1}$$

den letzten Rest $r = 3\ 16\ 27$ durch die Zahl $2\ T + 1$ teilte, die hier wegen der Abkürzung einfach durch die in Reihe 14 (rechts ob.) stehende letzte untere Zahl $3\ 27\ 50\ 45$ ersetzt werden darf. Das damals auf 57 aufgerundete Ergebnis dieser Teilung setzt er jetzt genauer mit 56 40 an und erkennt so, daß in c_1 die letzte damals angegebene Ziffer 57 um 20 der folgenden Stelle 'mangelhaft' war.

In dieser Weise verfeinert K. die ganze früher angestellte Rechnung und kommt zu dem Schlussergebnis, daß der Umfang u_n des einbeschriebenen Vielecks an der letzten Stelle um 54 Einheiten der nächsten Stelle zu groß herausgekommen war. Es sei deshalb, sagt er, bei u_n (Taf. 18 a ob. und S. 65) die letzte 46 in 45 zu verbessern. Dadurch wird aber der für u (Taf. 18 a unten) gefundene Wert in der letzten angegebenen Stelle 50 nicht geändert.

Diese Verfeinerungsrechnungen sind nicht alle richtig. Bei der ersten Berechnung erhält K., wie schon bemerkt, $3\ 16\ 27 : 3\ 27\ 50\ 45 \approx 56\ 40$. Ich erhalte 56 43, so daß ich als Verbesserung von c_1 den Wert -17 Einheiten der nächsten Stelle angebe, nicht wie K. -20 .

Aber es wäre müßig, das alles nachzurechnen. Denn unsere Untersuchung zum dritten Abschnitt hat erwiesen, daß die von K. vorgenommene Berechnung der c_i bis zu den Undezimen unnötig für alle c_i außer den drei letzten ist, und daß z. B. für c_1, c_2 und c_3 schon die Berechnung bis zu den Undezimen ausgereicht hätte. Daraus daß, wie wir sahen, K.s Näherungswert von 2π auch noch in der letzten von ihm angegebenen Stelle richtig ist, folgt, daß er bei den Verfeinerungsrechnungen dieses Abschnitts wahrscheinlich keine das Ergebnis beeinflussenden Fehler begangen hat, es müßten sich denn zwei oder mehr Fehler gegenseitig vernichtet haben.

Zum achten bis zehnten Abschnitt

Um die Berechnung von Kreisumfängen aus dem Halbmesser und umgekehrt zu erleichtern, hat K. im sechsten Abschnitt eine Hilfstafel dargeboten, die die Vielfachen von 2π mit den Sexagesimalziffern 1 bis 60 enthält. Wie wir früher (S. 49) erwähnten, geht er schon an jener Stelle entgegen dem in der Trigonometrie seiner Zeit bestehenden Brauch dazu über, $r = 1$ statt $r = 60$ anzunehmen, was für die sexagesimale Rechnung nur eine Verschiebung der Stellenwerte nach sich zieht. (Die Überschrift der Tafel 18b sollte entweder heißen: „Tafel der Vielfachen des Umfangs des Kreises, für den die Hälfte des Durchmessers eins ist“ oder „Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zur Hälfte des Durchmessers“!)

Eine für seine Zeit schöpferische Tat ist es, daß der Mann aus Kāšān nun den Umfang des Kreises vom Halbmesser 1, also die Zahl 2π , auch als Dezimalzahl angibt, und daß er zeigt, wie man mit Hilfe dieser Dezimalzahl Umfänge aus Halbmessern und Halbmesser aus Umfängen gewinnt, wenn die gegebenen und die gesuchten Größen durch Dezimalzahlen ausgedrückt werden. Er zeigt an Beispielen, wie man die hierzu erforderlichen Vervielfachungen von Dezimalzahlen mit Dezimalzahlen und Teilungen von Dezimalzahlen durch Dezimalzahlen — auch in abgekürzter Rechnung — ausführen kann. Diese Rechnungen, die er den entsprechenden Rechnungen mit Sexagesimalzahlen gegenüberstellt, und bei denen er die in Taf. 20b dargebotene Tafel der Vielfachen der Dezimalzahl 2π mit den Ziffern 1—60 zu Hilfe nimmt, sind die ältesten bisher bekannten Beispiele praktisch durchgeführter Dezimalbruchrechnung. Auf Einzelheiten in der Ausführung dieser und der später im „Schlüssel“ ausgeführten Dezimalbruchrechnungen bin ich an anderer Stelle eingegangen, ebenso auf die von K. im Schlüssel mitgeteilte Methode der Verwandlung von Sechzigerzahlen und -brüchen in dekadische Zahlen und Dezimalbrüche und umgekehrt.

K. kann die Dezimalzahl 2π bis zur 16-ten Stelle nach der 3 richtig angeben, „weil ein einziger Teil von ihm (dem Bruche 10^{-16}) eine einzige None nicht um eine halbe Dezime übertrifft“ (S. 21, Z. 15 v. u. f.), d. h. weil $10^{-16} - 60^{-9} < \frac{1}{2} \cdot 60^{-10}$ ist. Der seinem Näherungswert von 2π anhaftende Fehler, den er kleiner als $\frac{1}{4} \cdot 60^{-9}$ weiß, kann also mit hinreichender Genauigkeit als $< \frac{1}{4} \cdot 10^{-16}$ bezeichnet werden. In Wahrheit ist dieser Fehler, wie wir sahen, sogar kleiner als $\frac{2}{25} \cdot 60^{-1}$, also auch kleiner als $\frac{2}{25} \cdot 10^{-16}$. Hätte K. eine Dezimalstelle von 2π mehr berechnet, so hätte er am Schluß statt 5 erhalten: 48, und das sind die richtigen Schlußziffern der auf 17 Bruchstellen berechneten Zahl 2π .

Die vom Verfasser gegebenen Beispiele für die Berechnung von $u = 2\pi r$ aus r und von r aus $u = 2\pi r$ zeigen, daß er trotz seiner sehr genauen Bestimmung von 2π bei praktischen Rechnungen kein Fanatiker übertriebener Genauigkeit ist, sondern die Genauigkeit der Lösung der Natur der Aufgabe angepaßt sehen will. Wenn er im zehnten Abschnitt den Fehler des verbreiteten Näherungswertes $\pi \approx 3 \frac{1}{7}$ aufdeckt, so weist das hierzu gegebene Beispiel darauf hin, daß er für Rechnungen mit großen Zahlen, wie die astronomischen Rechnungen, den Gebrauch des groben Näherungswertes beanstandet. Lieber hätten wir hier freilich gesehen, wenn K. die Genauigkeit der Rechnung von der relativen Genauigkeit der Ausgangsgröße, nämlich des Halbmessers der Fixsternsphäre, abhängig gemacht hätte. In der Berechnungstafel 19a (unten rechts) hätte er hervorheben sollen, daß die letzten 8 Stellen des Ergebnisses dieser nicht abgekürzten Vervielfachung wertlos sind; mit einem genaueren Wert von 2π wären sie anders ausgefallen.

Im „Schlüssel“ kommt K. der praktischen Mathematik weiter entgegen. An die Stelle der Tafeln der Vielfachen von 2π sind im Schlüssel sexagesimale und dezimale Tafeln der Vielfachen von π und $\frac{\pi}{4}$ getreten, offenbar weil in der Praxis der Berechnungen des Umfangs und des Flächeninhalts der Durchmesser als gegebene oder gesuchte Größe näher als der Halbmesser liegt. In den dezimalen dieser Hilfstafeln legt der Verfasser für π den Wert 3.141593 zugrunde, in den sexagesimalen den Wert 3. S 29 44, der trotz seiner Kürze sehr genau ist; die nächste Sechzigerstelle wäre eine aufgerundete 1. Dieser sexagesimale Wert ist, wie K. hervorhebt, viel genauer als der Archimedische Wert; er ist eine Verfeinerung des von Ptolemäus angegebenen sexagesimalen Wertes 3. S 30 (vgl. oben S. 46, Z. 18).

Zum Schlußabschnitt

Der Schluß bringt den Nachweis der in der Einleitung gemachten Angabe, daß der dem Abul-Wafā zugeschriebene Wert von Chord 30' und der von al-Birūnī benutzte Wert von Chord 2° falsch sind. K. zeigt, daß der angebliche Wert von Chord 30' auf einen falschen Wert für Chord 1° 30' führt, ein von ihm selbst angegebener aber auf den richtigen, und leitet ferner den wahren Wert von Chord 2° ab.

Sein theoretisches Rüstzeug für die Sehnensberechnungen holt er aus dem zehnten Kapitel des ersten Buches des Almagest; daneben benutzt er seinen eigenen, im ersten Abschnitt bewiesenen Hilfssatz.

Die aus dem Almagest benutzten Sätze bezeichnet er als den ersten, dritten und vierten Lehrsatz (*sakl*) des ersten Buches. In der auf uns gekommenen griechischen Fassung des Almagest finden wir keine numerierten Lehrsätze. Tatsächlich ist der als I, 1 bezeichnete Satz, der die Berechnung der Zehnecksseite und der Fünfecksseite enthält, der erste Lehrsatz des genannten Kapitels (HEIBERG I 32, 10 bis 34, 4). Die Ableitung gibt K. (S. 27, Schluß) samt der Figur in ziemlich genauer arabischer Übersetzung aus dem Almagest wieder⁴⁾. In dem Übersetzungstext werden Sätze aus Euklids Elementen nach der Nummer des Buches und des Satzes angeführt, was in unserer griechischen Almagestausgabe nicht der Fall ist.

Die von K. als I, 3 und I, 4 bezeichneten Sätze aus dem Almagest betreffen folgende beiden Fälle des Additionstheorems der Sehnensfunktion:

d Chord $(a - b) = \text{Chord } a \text{ Chord } (180^\circ - b) - \text{Chord } (180^\circ - a) \text{ Chord } b$
 d Chord $(180^\circ - \langle a + b \rangle) = \text{Chord } (180^\circ - a) \text{ Chord } (180^\circ - b) - \text{Chord } a \text{ Chord } b$
 und entsprechen also den Formeln

$$\begin{aligned}\sin(\varphi - \psi) &= \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi, \\ \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi.\end{aligned}$$

Die erste der beiden Sehnensformeln kann nach ihrem Vorkommen in unserem griechischen Almagest (HEIBERG I 37, 19 bis 38, 17) mit einigem Recht als der dritte Lehrsatz bezeichnet werden. An sie schließt sich aber die zweite Formel nicht unmittelbar als nächster Lehrsatz an; sie ist vielmehr erst in einer Ableitung (HEIBERG I 41, 4 bis 42, 6) enthalten, die auf die von uns früher (S. 48/49) erwähnte Berechnung der Sehne der Hälfte eines Bogens von gegebener Sehne (HEIBERG I 39, 3 bis 40, 15) folgt.

⁴⁾ Man beachte, wie diese Übersetzung (S. 27 Z. 12) in enger Anlehnung an das Griechische sagt: „den Quadraten“, während K. sich in seiner eigenen Darstellung (S. 28, 2. Abs.) wiederholt deutlicher durch die Worte: „die Summe der Quadrate“ ausdrückt.

Bemerkenswert ist, daß K. die zweite der beiden Formeln des Additionstheorems der Sehnenfunktion nur für den Sonderfall $b = a$ benutzt. Er bekommt so die Doppelbogenformel

$$(D) \quad d \text{ Chord } (180^\circ - 2a) = \text{Chord}^2 (180^\circ - a) - \text{Chord}^2 a.$$

Sie entspricht der Formel

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi.$$

Aus der Doppelbogenformel (D) lassen sich durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes in Gestalt der Formel (I') die Halbbogenformeln (II') von S. 48 und (III') von S. 49 ableiten. Aber weder schlug K. im ersten Abschnitt diesen Weg für seinen Hilssatz ein, dessen Inhalt die Formel (II') ist, noch Ptolemäus im Almagest für seine Formel (III'). K. wendet seine Formel (D) nur einmal (Taf. 22a) an, um zur Ergänzungssehne des doppelten Bogens überzugehen.

Steht in Fig. 3 db senkrecht auf dem Durchmesser $ag = d = 2r$ des Halbkreises abg und ist $dh = hg$ und $hb = hz$, so lassen sich die von K. aus dem Almagest entnommenen Berechnungen der Zehnecksseite s_{10} und der Fünfecksseite s_5 in folgende Gleichungen kleiden:

$$(1) \quad gz \cdot dz + dh^2 = hz^2 \quad \text{nach Euklid, Elemente, II, 6}$$

$$(2) \quad hz^2 = hb^2 = hd^2 + db^2 \quad (\text{El. I, 47})$$

$$(3) \quad \frac{gz \cdot dz = db^2}{\quad}$$

$$(4) \quad \frac{db = dg = r}{\quad}$$

$$(5) \quad \frac{gz \cdot dz = gd^2}{\quad}$$

$$dz : gd = gd : gz \quad \text{nach El. VI, 17}$$

$$(7) \quad \frac{gd = s_4}{\quad} \quad \text{nach El. IV, 15}$$

$$(8) \quad \frac{dz = s_{10}}{\quad} \quad \text{nach El. XIII, 12 (= El. XIII, 9 HEIBERG)}$$

$$(9) \quad bz = \sqrt{s_4^2 + s_{10}^2} = s_5 \quad \text{nach El. XIII, 13 (= El. XIII, 10 HEIBERG)}.$$

Soweit Ptolemäus. Nun behauptet K.:

gz ist die Sehne $\frac{s_5}{10}$ von $\frac{3}{10}$ des Kreisumfangs, d. h. die Ergänzungssehne Chord 108° der Fünfecksseite $s_5 = \text{Chord } 72^\circ$.

Er beweist es so:

$$(10) \quad gz^2 = gd^2 + dz^2 + 2gd \cdot dz \quad (\text{El. II, 4})$$

$$(11) \quad bz^2 = bd^2 + dz^2 \quad (\text{El. I, 47})$$

$$(4) \quad \frac{gd = bd = r}{\quad}$$

$$(12) \quad \frac{gz^2 = bz^2 = 2r^2 + 2dz \cdot dz}{\quad}$$

$$(5) \quad \frac{r^2 = gz \cdot dz}{\quad}$$

$$(13) \quad \frac{r^2 = gd \cdot dz + dz^2}{\quad} \quad (\text{El. II, 3})$$

$$(14) \quad \frac{2gd \cdot dz + 2dz^2 = 2r^2}{\quad}$$

$$(15) \quad \frac{bz^2 + gz^2 = 4r^2 = d^2}{\quad} \quad \text{nach (12) und (14)}$$

$$(16) \quad \frac{bz^2 = s_5^2}{\quad} \quad \text{nach (9)}$$

$$(17) \quad \frac{gz = \sqrt{d^2 - s_4^2} = \frac{s_5}{10}}{\quad}, \text{ w. z. b. w.}$$

Nachstehend folgt der Inhalt der Tafelrechnungen der Taf. 21b und 22a. Der am Ende jeder Zeile beigefügte Ausdruck gibt zur Erleichterung der Nachprüfung den betreffenden Wert in modernen Funktionen für den Halbmesser 1.

Reihe

Taf. 21 b

2	$hz = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2$ nach (2) von S. 69	$\left[\frac{5}{4}\right]$
3	$hz = \frac{d}{4} \sqrt{5}$	$\left[\frac{1}{2} \sqrt{5}\right]$
4	$dz = s_{10} = hz - dh = hz - \frac{d}{4} = \text{Chord } 36^\circ$	$[2 \sin 18^\circ]$
5	$s_{10}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s_3^2 = \text{Chord}^2 72^\circ$ nach (9) von S. 69	$[2 - 2 \sin 18^\circ]$
6	$bz = s_3 = \text{Chord } 72^\circ$	$[2 \sin 36^\circ]$
7	$gz = \frac{s_3^2}{10} = \frac{d}{2} + s_{10} = \text{Chord } 108^\circ$ nach (17)	$[2 \cos 36^\circ = 1 + 2 \sin 18^\circ]$
8	$s_3 = \frac{d}{2} \sqrt{3} = \text{Chord } 120^\circ$	$[2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}]$
9	$\text{Chord } 60^\circ \cdot \text{Chord } (180^\circ - 72^\circ)$	$[4 \cos 36^\circ \sin 30^\circ = 2 \cos 36^\circ]$
10	$\text{Chord } 72^\circ \cdot \text{Chord } (180^\circ - 60^\circ)$	$[4 \sin 36^\circ \cos 30^\circ = 2 (\sin 66^\circ + \sin 6^\circ)]$
11	$\text{Chord } 72^\circ \cdot \text{Chord } (180^\circ - 60^\circ) - \text{Chord } (180^\circ - 72^\circ) \cdot \text{Chord } 60^\circ$	$[= d \cdot \text{Chord } 12^\circ]$
12	$s_{30} = \text{Chord } 12^\circ$	$[2 \sin 6^\circ]$
13	$\text{Chord}^2 12^\circ$	$[2 - 2 \cos 12^\circ]$
14	$d^2 - \text{Chord}^2 12^\circ = \text{Chord}^2 168^\circ$	$[2 + 2 \cos 12^\circ]$
15	$\text{Chord } 168^\circ$	$[2 \cos 6^\circ]$
16	$\sqrt{(d + \text{Chord } 168^\circ) \frac{d}{2}} = \text{Chord } 174^\circ$	$[2 \cos 3^\circ]$
17	$\sqrt{(d + \text{Chord } 174^\circ) \frac{d}{2}} = \text{Chord } 177^\circ$	$[2 \cos 1^\circ 30']$
18	$\sqrt{(d + \text{Chord } 177^\circ) \frac{d}{2}} = \text{Chord } 178^\circ 30'$	$[2 \cos 45']$
19	$d^2 - \text{Chord}^2 168^\circ 30' = d^2 - \frac{d}{2} (d + \text{Chord } 177^\circ) = \text{Chord}^2 1^\circ 30'$	$[2 - 2 \cos 1^\circ 30']$
20	$\text{Chord } 1^\circ 30'$	$[2 \sin 45']$

Reihe

ob. Taf. 22 a

2	$\text{Chord } x$	$[2 \sin 15']$
3	$\text{Chord}^2 x =$	$[2 - 2 \cos 30']$
4	$d^2 - \text{Chord}^2 x = \text{Chord}^2 (180^\circ - x)$	$[2 + 2 \cos 30']$
5	$\text{Chord } (180^\circ - x)$	$[2 \cos 15']$
6	$\text{Chord}^2 (180^\circ - x) - \text{Chord}^2 x = d \cdot \text{Chord } (180^\circ - 2x)$ nach (D) von S. 69	$[4 \cos 30']$
7	$\text{Chord } (180^\circ - 2x)$	$[2 \cos 30']$
8	$\text{Chord}^2 180^\circ - 2x$	$[2 + 2 \cos 1^\circ]$
9	$d^2 - \text{Chord}^2 (180^\circ - 2x) = \text{Chord}^2 2x$	$[2 - 2 \cos 1^\circ]$
10	$\text{Chord } 2x$	$[2 \sin 30']$
11	$\text{Chord } x \cdot \text{Chord } 2x$	$[4 \sin 15' \cdot \sin 30' = 2 \cos 15' - 2 \cos 45']$
12	$\text{Chord } (180^\circ - x) \cdot \text{Chord } (180^\circ - 2x)$	$[4 \cos 15' \cdot \cos 30' = 2 \cos 15' + 2 \cos 45']$
13	$\text{Chord } (180^\circ - x) \cdot \text{Chord } (180^\circ - 2x) - \text{Chord } x \cdot \text{Chord } 2x$	$[= d \cdot \text{Chord } (180^\circ - 3x)]$
14	$\text{Chord } (180^\circ - 3x)$	$[2 \cos 45']$
15	$\text{Chord}^2 (180^\circ - 3x)$	$[2 + 2 \cos 1^\circ 30']$
16	$d^2 - \text{Chord}^2 (180^\circ - 3x) = \text{Chord}^2 3x$	$[2 - 2 \cos 1^\circ 30']$
17	$\text{Chord } 3x$	$[2 \sin 45']$

Reihe	unt. Taf. 22a	
1	Chord ² (180° — 1°)	[2 + 2 cos 1°
2	$\frac{\text{Chord}^2 (180^\circ - 1^\circ)}{\frac{1}{2} d} - d = \text{Chord} (180^\circ - 2^\circ)$	[2 cos 1°
3	Chord ² (180° — 2°)	[2 + 2 cos 2°
4	$d^2 - \text{Chord}^2 (180^\circ - 2^\circ) = \text{Chord}^2 2^\circ$	[2 — 2 cos 2°
5	Chord 2°	[2 sin 1°

Mit Hilfe der Tafeln von J. PETERS⁴⁴⁾ habe ich fast alle Zahlen der Tafelrechnungen sowie der „zweiten Berechnung“ der Taf. 21 b und 22 a nachgeprüft. In der Mehrzahl der Fälle fand ich die von K. mitgeteilten Zahlen in allen angegebenen Stellen mit PETERS übereinstimmend. Insbesondere gilt dies für die Ausgangswerte und die Schlüßergebnisse der Rechnungen von Taf. 21 b und 22 a. Daß aus dem in allen angegebenen Stellen richtigen Wert von Chord 12° der Wert von Chord² 12° (Taf. 21 b) nicht in ebensoviel Bruchstellen wie Chord 12° richtig herauskommen konnte, war zu erwarten. Der Fehler — die letzte Stelle muß 43 statt 52 lauten — liegt, wie eine leichte Überschlagsrechnung zeigt, innerhalb der zu erwartenden Fehlerspanne. Er merzt sich bald darauf infolge der Quadratwurzelausziehungen von selbst aus. Auch in der dritten Tafelrechnung ergibt die Quadrierung einen Fehler (7 51 statt 5 55) innerhalb der Fehlergrenzen, die dadurch bestimmt sind, daß der Fehler in Reihe 2 bis zu einer halben Einheit der letzten angegebenen Stelle betragen kann. Auch die Zahlen der Reihen 4 und 5 liegen innerhalb der hierdurch verursachten Fehlergrenzen, und so kommt es, daß in Reihe 5 Chord 2° an letzter Stelle 25 statt der richtigen Ziffer 53 erhalten hat. In der zweiten Berechnung der oberen Taf. 22 a erhalte ich Reihe 10 in der letzten Stelle 22 statt 14.

K.s Bemerkung am Fuße der Taf. 21 b über die Eintragung rot geschriebener Nullen in leere, nicht berechnete Stellen zeigt wieder, mit welchem Verständnis er rechnet. In der Handschrift erkenne ich in dieser Tafel keine rot geschriebenen Nullen. Die leidigen Erhöhungen und Erniedrigungen des Stellenwertes, verursacht durch die Wahl des Halbmessers 60, machen in diesen wie in den früheren Berechnungstafeln die Fehlerbetrachtung für K. etwas umständlich.

Hätte der Verfasser, nachdem er durch die Tafelrechnung in Taf. 21 b Chord 1° 30' gefunden hatte, hieraus auf direktem Wege Chord 30' finden wollen, so wäre eine kubische Gleichung zu lösen gewesen. Statt dessen stellt er den Wert, von dem er behauptet, daß er gleich Chord 30' ist, in der zweiten Berechnung in Tab. 22 a (oben) an die Spitze, um hieraus die Sehne des dreifachen Winkels zu berechnen, die sich dann als mit der in Tab. 21 b berechneten Sehne von 1° 30' übereinstimmend erweist. Wie fand er den richtigen Wert von Chord 30'? Ein systematisches Probieren hätte zum Ziele führen können. K. hat aber eine gewandte Näherungsmethode angegeben, um die Sehne des Drittels eines Bogens von bekannter Sehne als Wurzel der maßgebenden kubischen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit in sexagesimaler Form zu berechnen. Der Lehrbrief, in welchem er dieses Verfahren mitteilt, scheint nach dem Lehrbrief über die Kreisberechnung erschienen zu sein; wenigstens nennt K. in der Vorrede des „Schlüssel“ gleich nach dem Lehrbrief über den Kreisumfang seinen „Lehrbrief betreffend die Bestimmung der Sehne und des Sinus für den

⁴⁴⁾ J. PETERS, Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus. Abh. d. Pr. Ak. d. Wiss. 1911, Phys.-math. Classe.

dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder gegebenem Sinus“. Aus einem wahrscheinlich von Qāḍizāde ar-Rūmī verfaßten Kommentar⁴³⁾ dieses Lehrbriefs ersehen wir, daß K. die Formel ableitete, die für $r = 1$ lautet:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

und daß er die sich hieraus für die Berechnung von $\sin \alpha$ aus $\sin 3\alpha$ ergebende kubische Gleichung nach dem Iterationsverfahren löste, das uns auch Mīram Čelebī in seinem Kommentar zu den Tafeln des Ulūğ Beg⁴⁴⁾ (S. 77—83) erhalten hat.

Vielleicht besaß oder erfand K. diese Methode schon, als er die Muḥīṭiyya schrieb. Dann könnte er es als zweckmäßig erachtet haben, ihre Veröffentlichung einem besonderen Lehrbrief vorzubehalten.

⁴³⁾ *Fihrist al-kutub al-‘arabiyya* (Katalog der arabischen Schriften) 6, Kairo 1308 d. H. (= 1890—91 n. Chr.), S. 210.

NACHTRAG

Zu S. 37: Zwischen Zeile 22 (hinter „Ausdrücke“) und Zeile 23 ist einzufügen:

„Zur Bezeichnung der höheren Stellen ganzer Sexagesimalzahlen: al-marfū‘ marrataīn, „die zweimal Erhöhte“, al-marfū‘ ṭalāṭ marrāt, „die dreimal Erhöhte“, usw. gebraucht K. auch die Ausdrücke al-maṭānī, al-maṭālīṭ usw., deren Auftreten ich bisher frühestens bei aṭ-Ṭūsī beobachtete. Unser Text hat (3a, 13 und 3a, 17) al-maḥāmīs, „die fünfmal Erhöhte“.

Zu S. 40: „Zur Einleitung“; hinter dem 1. Absatz ist fortzufahren:

In seinen „Schlüsseln der Wissenschaften“ (maṭāliḥ al-‘ulūm) sagt Abū ‘Abdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. Yūsuf al-Ḥwārizmī (Ende des X. Jahrh.):

„Die irrationale Quadratwurzel, bei der es keinen Weg gibt, ihren wahren Wert zahlenmäßig zu erkennen, wie $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{10}$, wird näherungsweise ausgezogen, ohne daß ihr wahrer Wert erreicht wird. Wie man berichtet, lautet eine der Gottespreisungen der indischen Brahmanen: Gepriesen sei der, der die irrationalen Wurzeln kennt.“

III.

ARABISCHER TEXT:

AR-RISĀLA AL-MUḤĪṬĪYA

DES

ĠAMŠĪD B. MAS'ŪD AL-KĀŠĪ

الرسالة الخيضية
لمشيد بن مسعود الكشي

Blatt 1b

- ١ الحمد لله العارف بنسبة القطر الى الخيط العارف بمقدار كل المركب والبسيط خالق الارض
والسموات جعل النور في الظلمات والصلوة والسلام على محمد المصطفى مركز دائرة الرسالة ومحيط
٢ اقطار البداية والعدالة وعلى الله النيبين واحمد الطاهرين أما بعد فيقول احوج خلق الله تعالى
الى غفرانه حميد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشاني الملقب بغيات احسن الله احواله
٣ ان ارشيدس اثبت ان المحيط اريد من ثلاثة امثال القطر باقل من سبع قطرها وانثر
من عشرة اجزاء من احد وسبعين جزءا من القطر فالتفتوت بين حدين يكون جزءا واحدا
٤ من اربعائة بسبعة وتسعين جزءا ففى دائرة يكون قطرها اربعائة وسبعة وتسعين ذراعاً او قصبا او
فرسخاً يكون مقدار محيطها مجهولاً ومشكوكاً فيما بين ذراع واحد او قصبة او فرسخ ويكون في
اعظم دائرة تقع في كرة الارض مجهولاً في خمسة فراسخ لأن قطرها خمسة امثال ذلك المقدار بالفراسخ
تقريب وفي منطقة تلك البروج مجهولاً في اكثر من مائة الف فرسخ بكسر وهذه المقادير فحشة في المحيطات
فكيف يكون في المساحة وذلك لأنه استخرج محيط ذي ستة وتسعين ضلعاً في الدائرة وهو اقل من
محيط تلك الدائرة لأن كل ضلع منه اصغر من القوس التي عرّضها لجميع الاضلاع اصغر من الخيط
١٠ الذي عليه ومحيط مضلع آخر على الدائرة شبيهاً بالاولى واثبت انه اكثر من محيط تلك الدائرة
بالشكل الاول من المقالة الاولى من كتابه والتفتوت بينهما ما ذكر
١٢ وأما ابو الوفاء البروجاني فانه حصل وتر نصف جزءاً من اجزاء ثلاثائة وستين من الخيط
بالاجزاء التي بنا يكون القطر $\overline{ق ك}$ بحساب تقريبي وضربه في سبعائة وعشرين حصل محيط المضلع
الذي في الدائرة واستخرج محيط المضلع الذي عليهما المشابه له وقال اذا كان القطر مائة وعشرين يكون
١٥ الخيط ٣٧٩ وكسر اكثر من $\overline{ن ط ي}$ ثوانث واقل من $\overline{ن ط ك}$ ندب رابع والتفتوت بين
المقدارين ب ندب رابع وهو في اعظم دائرة تقع في الارض يكون قريباً بالف ذراع ومع ذلك انه غلط
في مقدار وتر نصف الجزء لانه اخذه $\overline{ق ك}$ لاكد نه ند نه وما هو بصحيح والصحيح $\overline{ق ك}$ لاكد نون نه لرومورد تبينه
وأما ابو ربحان البيروني فانه حصل وتر جزئين من ثلاثائة وستين من الخيط وحصل محيط ذي مائة
١٧ وشائين ضلعاً في الدائرة وهو $\overline{ن ط ي م ج ق}$ ومحيط شبيهه عليهما $\overline{ن ط ا ن ج ن ط و}$ واخذ نصف
مجموعهما محيط الدائرة وحوله الى الرقوم البندية^{١)} عن مخرج كسر الارقام على ان القطر واحد وذلك
يعتد في مثل اعظم دائرة تقع في الارض قريباً بفرسخ ومع ذلك غلط في وتر الجزئين لانه حسب
٢٠ ب $\overline{ن ط م ج ن ر}$ وينبغي ان يكون ب $\overline{ن ط ك و ك ب}$ وقد وضع جيب جزء واحد الذي هو نصف
وتر الجزئين في جدول الجيب في قانون السعدي $\overline{ا ب م ط م ج}$ وهو صحيح وغلط في ضعفه ولما كانت
٢٢ هذه الاصل مخيلة اردنا ان نستخرج محيط الدائرة بالاجزاء التي يكون بنا القطر معلوما بحيث

يقع Hs: ١) الرقوم البندی Hs: ٢) يقع Hs: ٣) جزا Hs: ٤) شبيهاً Hs: ٥)

يتبين لك أن التفتوت بينه وبين ما هو الخلق لا يعتد بشعرة واحدة التي في سدس عرض شعيرة
معتدلة في مثل دائرة يكون قطرها تسعة آلاف مثل لقطر الأرض فلا يعتد فيما كان

أصغر منها بشي فحررت هذه الرسالة مشتملة على استخراجها وسيمتينا للحيثية وأوردنا في عشرة
فصول وخاتمة مستعين بالله العزيز والرحاب وعمو البادي الى طريق النجاة

الفصل الأول في معرفة وتر قوس في مجموع القوس المعلومة الوتر ونصف تمام الى نصف الدور أقول
ان سطح مجموع القطر ووتر كل قوس كانت أقل من نصف المحيط في نصف القطر يسوى مربع وتر قوس
كانت مساوية مجموع القوس الأول ونصف تمام الى نصف الدور

وليثبت نرسم على خط AB نصف دائرة ABC على مركز C ونصل وتر AC كيف اتفق وننصف BC تمام

الى نصف الدور على نقطة D ونصل AD والدعوى ان سطح نصف القطر في مجموع AB AC يسوى مربع
(أد) برهانه نصل BD فيكون زاوية ADB قائمة بالشكل^١ الثلثين من ثلثة الاصول ثم نخرج عن

نقطة D عمود DE على خط AB فيحدث مثلثا DBE DAE متشابهين فثلث ADB بالشكل الثامن من

ساسة الاصول فيكون نسبة AB القطر الى AD كنسبة AD الى AE فبالشكل التاسع عشر من سابعة

الاصول يكون سطح AB القطر في AE يسوى مربع AD ثم نخرج من نقطة D عمود DE على AB فيكون

نقطة E منتصف AB بالشكل الثالث من ثلثة الاصول ونصل DE ولان زاوية ADB لحيثية بقدر نصف

قوس ABC وعمو مقدار زاوية BCD فالزاويتان متساويتان فيكون مثلث ADE DBE متساويين لقيم زاويتي

EAD و EDB زاويتي EAD وضلعي AD و DE فيكون ضلع AE مساويا لضلع BE الذي هو نصف AB ولان

مسطح AE اعني مجموع نصف القطر ووتر BE نصف AB في القطر مساويا لمربع AD ولان سطح احد

المثلثين في نصف الآخر يساوي سطح نصف الأول في جميع الآخر يكون سطح مجموع القطر وضعف

وتر اعني مجموع القطر ووتر AD في نصف القطر يساوي مربع AD وذلك ما اردناه فاذا كان AD معلوما بالاجزاء

التي يكون بين نصف القطر ستين ونريد عليه القطر ويجعل المجموع مرفوعا برتبة يكون الحاصل مربع AD

الفصل الثاني في معرفة محيط ابي مصلع يكون في الدائرة ومحيط المصلع الذي عليها المشاهد له

نرسم على قطر AB نصف دائرة ABC على مركز C ونفرض AD سدس المحيط فيكون وتر AD مساويا

لأربع نصف القطر بالشكل الخامس عشر من رابعة الاصول ثم ننصف BC تمام AD الى نصف الدور

على D ونصل على R وتر AD على C وهكذا الى حيث شئنا^٢ فعلى ما ذكرنا في الفصل المتقدم يصير من

AD معلوما ومنه يصير AR معلوما ويصير منه AC معلوما وهكذا الى حيث اردنا

فاذا حصل لنا AC مثلا ونريد معرفة

وتر AC فنقص مربع AC عن مربع القطر يبقى مربع وتر AC لان زاوية ACB قائمة بالشكل الثلثين

من ثلثة الاصول فيكون مربع AB مساويا لمربعي AC و BC بالشكل^٣ العروس ثم ننصف قوس AC على

D ونصل CD فينصف وتر AC ويجعل CD مماسا للدائرة على نقطة E بان نخرج من نقطة D على

DE في المثلثين عمودي DE ونصل CE ونخرج الى F وكذا DE الى G فيكون CE موازيا لـ BC وكما

ان AC ضلع من المصلع الذي في الدائرة يكون CE ضلعا من المصلع الذي عليها مشابها له فيكون

شينا Hs: ^١ بالشكل Hs: ^٢ برهانه نصل BD فيكون زاوية ADB قائمة Nach AD folgen die durchstrichenen Worte ^٣ بالشكل Hs: ^٤

Blatt 25 مثلثا $\overline{كقط}$ و $\overline{كقط}$ $\overline{كقط}$ متساويين ومتشابهين لثلاثي $\overline{دحى}$ $\overline{دحى}$ المتساويين فيكون نسبة $\overline{دحى}$ الى $\overline{كقط}$ نصف النظر كنسبة $\overline{دحى}$ الى $\overline{كقط}$ ونسبة $\overline{كقط}$ الى $\overline{كقط}$ كذلك فيكون نسبة $\overline{دحى}$ الى $\overline{كقط}$ فصل الثاني على انقدم كنسبة وتر $\overline{كقط}$ الى فصل $\overline{كقط}$ على $\overline{كقط}$ وكذا يكون النسبة بين جميع اضلاع المثلث الذى فى الدائرة واحد اضلاعه $\overline{كقط}$ وبين جميع فصولات اضلاع المثلث الذى عليه واحد اضلاعه $\overline{كقط}$ على الاضلاع الاولى ويكون $\overline{دحى}$ نصف $\overline{كقط}$ لان مثلثي $\overline{دحى}$ $\overline{دحى}$ متشابهين ⁽¹⁰⁾ فقيم زاويتي $\overline{دحى}$ $\overline{دحى}$ وتسمى زاويتي $\overline{دحى}$ الخيفية التى يوترعا قوس $\overline{كقط}$ وه المركزية التى يوترعا نصف قوس $\overline{كقط}$ الذى هو $\overline{كقط}$ وه نصف $\overline{كقط}$ فى نصف $\overline{كقط}$ فاذا صار $\overline{دحى}$ معلوما ونسب معلوما والنسب المذكورة معلومة ¹⁰ يصير المثلث الذى فى الدائرة والذى عليه معلومين وذلك ما اردناه

الفصل الثالث فى ان تقسم المحيط بكم ضلع ويستقصى فى العمل الى آية مرتبة ليحصل لنا محيط بحيث لا يعتد بشعرة فى مثل الدائرة المذكورة اعلم ان الدائرة التى يكون قوسها متساوية الف مثل تقطر الارض يكون محيطها ايضا متساوية الف مثل محيطها فيكون

Tafel der
Zeilen
14-15

درجته واحدة منه	الف وستمائة وستة وستين مثلا وثلاثي مثل محيط الارض
سبعة وعشرين مثالا له وثلاثة اربع تقريبا	
ثلاثة الف وسبعمائة واربع فرسخ	
تقريبا على ان محيط الارض ثمانية الف فرسخ	
اثنين وستين فرسخا تقريبا	
فرسخا وثلاث عشر تقريبا	
مائتين وستة اربع تقريبا	
ثلاثة اربع وثلاث تقريبا	
اصبعاً وثلاث اصبع ووتر ثمانية واربعين شعرة	
اربعة احماس غلط شعرة من عرف البرزون ⁽¹¹⁾ بل اقل منها	

⁽¹⁰⁾ Hs: متشابهين ⁽¹¹⁾ Hs: البرزون

وعذا اذا كان لحيط ثلثائة وستين أما اذا كان ثلثائة وستة وميتين وكسرا يكون ثمانية منه اقل ¹² ¹³ ¹⁴ ¹⁵ ¹⁶ ¹⁷ ¹⁸ ¹⁹ ²⁰ ²¹ ²² ²³ ²⁴ ²⁵ ²⁶ ²⁷ ²⁸ ²⁹ ³⁰ ³¹ ³² ³³ ³⁴ ³⁵ ³⁶ ³⁷ ³⁸ ³⁹ ⁴⁰ ⁴¹ ⁴² ⁴³ ⁴⁴ ⁴⁵ ⁴⁶ ⁴⁷ ⁴⁸ ⁴⁹ ⁵⁰ ⁵¹ ⁵² ⁵³ ⁵⁴ ⁵⁵ ⁵⁶ ⁵⁷ ⁵⁸ ⁵⁹ ⁶⁰ ⁶¹ ⁶² ⁶³ ⁶⁴ ⁶⁵ ⁶⁶ ⁶⁷ ⁶⁸ ⁶⁹ ⁷⁰ ⁷¹ ⁷² ⁷³ ⁷⁴ ⁷⁵ ⁷⁶ ⁷⁷ ⁷⁸ ⁷⁹ ⁸⁰ ⁸¹ ⁸² ⁸³ ⁸⁴ ⁸⁵ ⁸⁶ ⁸⁷ ⁸⁸ ⁸⁹ ⁹⁰ ⁹¹ ⁹² ⁹³ ⁹⁴ ⁹⁵ ⁹⁶ ⁹⁷ ⁹⁸ ⁹⁹ ¹⁰⁰ ¹⁰¹ ¹⁰² ¹⁰³ ¹⁰⁴ ¹⁰⁵ ¹⁰⁶ ¹⁰⁷ ¹⁰⁸ ¹⁰⁹ ¹¹⁰ ¹¹¹ ¹¹² ¹¹³ ¹¹⁴ ¹¹⁵ ¹¹⁶ ¹¹⁷ ¹¹⁸ ¹¹⁹ ¹²⁰ ¹²¹ ¹²² ¹²³ ¹²⁴ ¹²⁵ ¹²⁶ ¹²⁷ ¹²⁸ ¹²⁹ ¹³⁰ ¹³¹ ¹³² ¹³³ ¹³⁴ ¹³⁵ ¹³⁶ ¹³⁷ ¹³⁸ ¹³⁹ ¹⁴⁰ ¹⁴¹ ¹⁴² ¹⁴³ ¹⁴⁴ ¹⁴⁵ ¹⁴⁶ ¹⁴⁷ ¹⁴⁸ ¹⁴⁹ ¹⁵⁰ ¹⁵¹ ¹⁵² ¹⁵³ ¹⁵⁴ ¹⁵⁵ ¹⁵⁶ ¹⁵⁷ ¹⁵⁸ ¹⁵⁹ ¹⁶⁰ ¹⁶¹ ¹⁶² ¹⁶³ ¹⁶⁴ ¹⁶⁵ ¹⁶⁶ ¹⁶⁷ ¹⁶⁸ ¹⁶⁹ ¹⁷⁰ ¹⁷¹ ¹⁷² ¹⁷³ ¹⁷⁴ ¹⁷⁵ ¹⁷⁶ ¹⁷⁷ ¹⁷⁸ ¹⁷⁹ ¹⁸⁰ ¹⁸¹ ¹⁸² ¹⁸³ ¹⁸⁴ ¹⁸⁵ ¹⁸⁶ ¹⁸⁷ ¹⁸⁸ ¹⁸⁹ ¹⁹⁰ ¹⁹¹ ¹⁹² ¹⁹³ ¹⁹⁴ ¹⁹⁵ ¹⁹⁶ ¹⁹⁷ ¹⁹⁸ ¹⁹⁹ ²⁰⁰ ²⁰¹ ²⁰² ²⁰³ ²⁰⁴ ²⁰⁵ ²⁰⁶ ²⁰⁷ ²⁰⁸ ²⁰⁹ ²¹⁰ ²¹¹ ²¹² ²¹³ ²¹⁴ ²¹⁵ ²¹⁶ ²¹⁷ ²¹⁸ ²¹⁹ ²²⁰ ²²¹ ²²² ²²³ ²²⁴ ²²⁵ ²²⁶ ²²⁷ ²²⁸ ²²⁹ ²³⁰ ²³¹ ²³² ²³³ ²³⁴ ²³⁵ ²³⁶ ²³⁷ ²³⁸ ²³⁹ ²⁴⁰ ²⁴¹ ²⁴² ²⁴³ ²⁴⁴ ²⁴⁵ ²⁴⁶ ²⁴⁷ ²⁴⁸ ²⁴⁹ ²⁵⁰ ²⁵¹ ²⁵² ²⁵³ ²⁵⁴ ²⁵⁵ ²⁵⁶ ²⁵⁷ ²⁵⁸ ²⁵⁹ ²⁶⁰ ²⁶¹ ²⁶² ²⁶³ ²⁶⁴ ²⁶⁵ ²⁶⁶ ²⁶⁷ ²⁶⁸ ²⁶⁹ ²⁷⁰ ²⁷¹ ²⁷² ²⁷³ ²⁷⁴ ²⁷⁵ ²⁷⁶ ²⁷⁷ ²⁷⁸ ²⁷⁹ ²⁸⁰ ²⁸¹ ²⁸² ²⁸³ ²⁸⁴ ²⁸⁵ ²⁸⁶ ²⁸⁷ ²⁸⁸ ²⁸⁹ ²⁹⁰ ²⁹¹ ²⁹² ²⁹³ ²⁹⁴ ²⁹⁵ ²⁹⁶ ²⁹⁷ ²⁹⁸ ²⁹⁹ ³⁰⁰ ³⁰¹ ³⁰² ³⁰³ ³⁰⁴ ³⁰⁵ ³⁰⁶ ³⁰⁷ ³⁰⁸ ³⁰⁹ ³¹⁰ ³¹¹ ³¹² ³¹³ ³¹⁴ ³¹⁵ ³¹⁶ ³¹⁷ ³¹⁸ ³¹⁹ ³²⁰ ³²¹ ³²² ³²³ ³²⁴ ³²⁵ ³²⁶ ³²⁷ ³²⁸ ³²⁹ ³³⁰ ³³¹ ³³² ³³³ ³³⁴ ³³⁵ ³³⁶ ³³⁷ ³³⁸ ³³⁹ ³⁴⁰ ³⁴¹ ³⁴² ³⁴³ ³⁴⁴ ³⁴⁵ ³⁴⁶ ³⁴⁷ ³⁴⁸ ³⁴⁹ ³⁵⁰ ³⁵¹ ³⁵² ³⁵³ ³⁵⁴ ³⁵⁵ ³⁵⁶ ³⁵⁷ ³⁵⁸ ³⁵⁹ ³⁶⁰ ³⁶¹ ³⁶² ³⁶³ ³⁶⁴ ³⁶⁵ ³⁶⁶ ³⁶⁷ ³⁶⁸ ³⁶⁹ ³⁷⁰ ³⁷¹ ³⁷² ³⁷³ ³⁷⁴ ³⁷⁵ ³⁷⁶ ³⁷⁷ ³⁷⁸ ³⁷⁹ ³⁸⁰ ³⁸¹ ³⁸² ³⁸³ ³⁸⁴ ³⁸⁵ ³⁸⁶ ³⁸⁷ ³⁸⁸ ³⁸⁹ ³⁹⁰ ³⁹¹ ³⁹² ³⁹³ ³⁹⁴ ³⁹⁵ ³⁹⁶ ³⁹⁷ ³⁹⁸ ³⁹⁹ ⁴⁰⁰ ⁴⁰¹ ⁴⁰² ⁴⁰³ ⁴⁰⁴ ⁴⁰⁵ ⁴⁰⁶ ⁴⁰⁷ ⁴⁰⁸ ⁴⁰⁹ ⁴¹⁰ ⁴¹¹ ⁴¹² ⁴¹³ ⁴¹⁴ ⁴¹⁵ ⁴¹⁶ ⁴¹⁷ ⁴¹⁸ ⁴¹⁹ ⁴²⁰ ⁴²¹ ⁴²² ⁴²³ ⁴²⁴ ⁴²⁵ ⁴²⁶ ⁴²⁷ ⁴²⁸ ⁴²⁹ ⁴³⁰ ⁴³¹ ⁴³² ⁴³³ ⁴³⁴ ⁴³⁵ ⁴³⁶ ⁴³⁷ ⁴³⁸ ⁴³⁹ ⁴⁴⁰ ⁴⁴¹ ⁴⁴² ⁴⁴³ ⁴⁴⁴ ⁴⁴⁵ ⁴⁴⁶ ⁴⁴⁷ ⁴⁴⁸ ⁴⁴⁹ ⁴⁵⁰ ⁴⁵¹ ⁴⁵² ⁴⁵³ ⁴⁵⁴ ⁴⁵⁵ ⁴⁵⁶ ⁴⁵⁷ ⁴⁵⁸ ⁴⁵⁹ ⁴⁶⁰ ⁴⁶¹ ⁴⁶² ⁴⁶³ ⁴⁶⁴ ⁴⁶⁵ ⁴⁶⁶ ⁴⁶⁷ ⁴⁶⁸ ⁴⁶⁹ ⁴⁷⁰ ⁴⁷¹ ⁴⁷² ⁴⁷³ ⁴⁷⁴ ⁴⁷⁵ ⁴⁷⁶ ⁴⁷⁷ ⁴⁷⁸ ⁴⁷⁹ ⁴⁸⁰ ⁴⁸¹ ⁴⁸² ⁴⁸³ ⁴⁸⁴ ⁴⁸⁵ ⁴⁸⁶ ⁴⁸⁷ ⁴⁸⁸ ⁴⁸⁹ ⁴⁹⁰ ⁴⁹¹ ⁴⁹² ⁴⁹³ ⁴⁹⁴ ⁴⁹⁵ ⁴⁹⁶ ⁴⁹⁷ ⁴⁹⁸ ⁴⁹⁹ ⁵⁰⁰ ⁵⁰¹ ⁵⁰² ⁵⁰³ ⁵⁰⁴ ⁵⁰⁵ ⁵⁰⁶ ⁵⁰⁷ ⁵⁰⁸ ⁵⁰⁹ ⁵¹⁰ ⁵¹¹ ⁵¹² ⁵¹³ ⁵¹⁴ ⁵¹⁵ ⁵¹⁶ ⁵¹⁷ ⁵¹⁸ ⁵¹⁹ ⁵²⁰ ⁵²¹ ⁵²² ⁵²³ ⁵²⁴ ⁵²⁵ ⁵²⁶ ⁵²⁷ ⁵²⁸ ⁵²⁹ ⁵³⁰ ⁵³¹ ⁵³² ⁵³³ ⁵³⁴ ⁵³⁵ ⁵³⁶ ⁵³⁷ ⁵³⁸ ⁵³⁹ ⁵⁴⁰ ⁵⁴¹ ⁵⁴² ⁵⁴³ ⁵⁴⁴ ⁵⁴⁵ ⁵⁴⁶ ⁵⁴⁷ ⁵⁴⁸ ⁵⁴⁹ ⁵⁵⁰ ⁵⁵¹ ⁵⁵² ⁵⁵³ ⁵⁵⁴ ⁵⁵⁵ ⁵⁵⁶ ⁵⁵⁷ ⁵⁵⁸ ⁵⁵⁹ ⁵⁶⁰ ⁵⁶¹ ⁵⁶² ⁵⁶³ ⁵⁶⁴ ⁵⁶⁵ ⁵⁶⁶ ⁵⁶⁷ ⁵⁶⁸ ⁵⁶⁹ ⁵⁷⁰ ⁵⁷¹ ⁵⁷² ⁵⁷³ ⁵⁷⁴ ⁵⁷⁵ ⁵⁷⁶ ⁵⁷⁷ ⁵⁷⁸ ⁵⁷⁹ ⁵⁸⁰ ⁵⁸¹ ⁵⁸² ⁵⁸³ ⁵⁸⁴ ⁵⁸⁵ ⁵⁸⁶ ⁵⁸⁷ ⁵⁸⁸ ⁵⁸⁹ ⁵⁹⁰ ⁵⁹¹ ⁵⁹² ⁵⁹³ ⁵⁹⁴ ⁵⁹⁵ ⁵⁹⁶ ⁵⁹⁷ ⁵⁹⁸ ⁵⁹⁹ ⁶⁰⁰ ⁶⁰¹ ⁶⁰² ⁶⁰³ ⁶⁰⁴ ⁶⁰⁵ ⁶⁰⁶ ⁶⁰⁷ ⁶⁰⁸ ⁶⁰⁹ ⁶¹⁰ ⁶¹¹ ⁶¹² ⁶¹³ ⁶¹⁴ ⁶¹⁵ ⁶¹⁶ ⁶¹⁷ ⁶¹⁸ ⁶¹⁹ ⁶²⁰ ⁶²¹ ⁶²² ⁶²³ ⁶²⁴ ⁶²⁵ ⁶²⁶ ⁶²⁷ ⁶²⁸ ⁶²⁹ ⁶³⁰ ⁶³¹ ⁶³² ⁶³³ ⁶³⁴ ⁶³⁵ ⁶³⁶ ⁶³⁷ ⁶³⁸ ⁶³⁹ ⁶⁴⁰ ⁶⁴¹ ⁶⁴² ⁶⁴³ ⁶⁴⁴ ⁶⁴⁵ ⁶⁴⁶ ⁶⁴⁷ ⁶⁴⁸ ⁶⁴⁹ ⁶⁵⁰ ⁶⁵¹ ⁶⁵² ⁶⁵³ ⁶⁵⁴ ⁶⁵⁵ ⁶⁵⁶ ⁶⁵⁷ ⁶⁵⁸ ⁶⁵⁹ ⁶⁶⁰ ⁶⁶¹ ⁶⁶² ⁶⁶³ ⁶⁶⁴ ⁶⁶⁵ ⁶⁶⁶ ⁶⁶⁷ ⁶⁶⁸ ⁶⁶⁹ ⁶⁷⁰ ⁶⁷¹ ⁶⁷² ⁶⁷³ ⁶⁷⁴ ⁶⁷⁵ ⁶⁷⁶ ⁶⁷⁷ ⁶⁷⁸ ⁶⁷⁹ ⁶⁸⁰ ⁶⁸¹ ⁶⁸² ⁶⁸³ ⁶⁸⁴ ⁶⁸⁵ ⁶⁸⁶ ⁶⁸⁷ ⁶⁸⁸ ⁶⁸⁹ ⁶⁹⁰ ⁶⁹¹ ⁶⁹² ⁶⁹³ ⁶⁹⁴ ⁶⁹⁵ ⁶⁹⁶ ⁶⁹⁷ ⁶⁹⁸ ⁶⁹⁹ ⁷⁰⁰ ⁷⁰¹ ⁷⁰² ⁷⁰³ ⁷⁰⁴ ⁷⁰⁵ ⁷⁰⁶ ⁷⁰⁷ ⁷⁰⁸ ⁷⁰⁹ ⁷¹⁰ ⁷¹¹ ⁷¹² ⁷¹³ ⁷¹⁴ ⁷¹⁵ ⁷¹⁶ ⁷¹⁷ ⁷¹⁸ ⁷¹⁹ ⁷²⁰ ⁷²¹ ⁷²² ⁷²³ ⁷²⁴ ⁷²⁵ ⁷²⁶ ⁷²⁷ ⁷²⁸ ⁷²⁹ ⁷³⁰ ⁷³¹ ⁷³² ⁷³³ ⁷³⁴ ⁷³⁵ ⁷³⁶ ⁷³⁷ ⁷³⁸ ⁷³⁹ ⁷⁴⁰ ⁷⁴¹ ⁷⁴² ⁷⁴³ ⁷⁴⁴ ⁷⁴⁵ ⁷⁴⁶ ⁷⁴⁷ ⁷⁴⁸ ⁷⁴⁹ ⁷⁵⁰ ⁷⁵¹ ⁷⁵² ⁷⁵³ ⁷⁵⁴ ⁷⁵⁵ ⁷⁵⁶ ⁷⁵⁷ ⁷⁵⁸ ⁷⁵⁹ ⁷⁶⁰ ⁷⁶¹ ⁷⁶² ⁷⁶³ ⁷⁶⁴ ⁷⁶⁵ ⁷⁶⁶ ⁷⁶⁷ ⁷⁶⁸ ⁷⁶⁹ ⁷⁷⁰ ⁷⁷¹ ⁷⁷² ⁷⁷³ ⁷⁷⁴ ⁷⁷⁵ ⁷⁷⁶ ⁷⁷⁷ ⁷⁷⁸ ⁷⁷⁹ ⁷⁸⁰ ⁷⁸¹ ⁷⁸² ⁷⁸³ ⁷⁸⁴ ⁷⁸⁵ ⁷⁸⁶ ⁷⁸⁷ ⁷⁸⁸ ⁷⁸⁹ ⁷⁹⁰ ⁷⁹¹ ⁷⁹² ⁷⁹³ ⁷⁹⁴ ⁷⁹⁵ ⁷⁹⁶ ⁷⁹⁷ ⁷⁹⁸ ⁷⁹⁹ ⁸⁰⁰ ⁸⁰¹ ⁸⁰² ⁸⁰³ ⁸⁰⁴ ⁸⁰⁵ ⁸⁰⁶ ⁸⁰⁷ ⁸⁰⁸ ⁸⁰⁹ ⁸¹⁰ ⁸¹¹ ⁸¹² ⁸¹³ ⁸¹⁴ ⁸¹⁵ ⁸¹⁶ ⁸¹⁷ ⁸¹⁸ ⁸¹⁹ ⁸²⁰ ⁸²¹ ⁸²² ⁸²³ ⁸²⁴ ⁸²⁵ ⁸²⁶ ⁸²⁷ ⁸²⁸ ⁸²⁹ ⁸³⁰ ⁸³¹ ⁸³² ⁸³³ ⁸³⁴ ⁸³⁵ ⁸³⁶ ⁸³⁷ ⁸³⁸ ⁸³⁹ ⁸⁴⁰ ⁸⁴¹ ⁸⁴² ⁸⁴³ ⁸⁴⁴ ⁸⁴⁵ ⁸⁴⁶ ⁸⁴⁷ ⁸⁴⁸ ⁸⁴⁹ ⁸⁵⁰ ⁸⁵¹ ⁸⁵² ⁸⁵³ ⁸⁵⁴ ⁸⁵⁵ ⁸⁵⁶ ⁸⁵⁷ ⁸⁵⁸ ⁸⁵⁹ ⁸⁶⁰ ⁸⁶¹ ⁸⁶² ⁸⁶³ ⁸⁶⁴ ⁸⁶⁵ ⁸⁶⁶ ⁸⁶⁷ ⁸⁶⁸ ⁸⁶⁹ ⁸⁷⁰ ⁸⁷¹ ⁸⁷² ⁸⁷³ ⁸⁷⁴ ⁸⁷⁵ ⁸⁷⁶ ⁸⁷⁷ ⁸⁷⁸ ⁸⁷⁹ ⁸⁸⁰ ⁸⁸¹ ⁸⁸² ⁸⁸³ ⁸⁸⁴ ⁸⁸⁵ ⁸⁸⁶ ⁸⁸⁷ ⁸⁸⁸ ⁸⁸⁹ ⁸⁹⁰ ⁸⁹¹ ⁸⁹² ⁸⁹³ ⁸⁹⁴ ⁸⁹⁵ ⁸⁹⁶ ⁸⁹⁷ ⁸⁹⁸ ⁸⁹⁹ ⁹⁰⁰ ⁹⁰¹ ⁹⁰² ⁹⁰³ ⁹⁰⁴ ⁹⁰⁵ ⁹⁰⁶ ⁹⁰⁷ ⁹⁰⁸ ⁹⁰⁹ ⁹¹⁰ ⁹¹¹ ⁹¹² ⁹¹³ ⁹¹⁴ ⁹¹⁵ ⁹¹⁶ ⁹¹⁷ ⁹¹⁸ ⁹¹⁹ ⁹²⁰ ⁹²¹ ⁹²² ⁹²³ ⁹²⁴ ⁹²⁵ ⁹²⁶ ⁹²⁷ ⁹²⁸ ⁹²⁹ ⁹³⁰ ⁹³¹ ⁹³² ⁹³³ ⁹³⁴ ⁹³⁵ ⁹³⁶ ⁹³⁷ ⁹³⁸ ⁹³⁹ ⁹⁴⁰ ⁹⁴¹ ⁹⁴² ⁹⁴³ ⁹⁴⁴ ⁹⁴⁵ ⁹⁴⁶ ⁹⁴⁷ ⁹⁴⁸ ⁹⁴⁹ ⁹⁵⁰ ⁹⁵¹ ⁹⁵² ⁹⁵³ ⁹⁵⁴ ⁹⁵⁵ ⁹⁵⁶ ⁹⁵⁷ ⁹⁵⁸ ⁹⁵⁹ ⁹⁶⁰ ⁹⁶¹ ⁹⁶² ⁹⁶³ ⁹⁶⁴ ⁹⁶⁵ ⁹⁶⁶ ⁹⁶⁷ ⁹⁶⁸ ⁹⁶⁹ ⁹⁷⁰ ⁹⁷¹ ⁹⁷² ⁹⁷³ ⁹⁷⁴ ⁹⁷⁵ ⁹⁷⁶ ⁹⁷⁷ ⁹⁷⁸ ⁹⁷⁹ ⁹⁸⁰ ⁹⁸¹ ⁹⁸² ⁹⁸³ ⁹⁸⁴ ⁹⁸⁵ ⁹⁸⁶ ⁹⁸⁷ ⁹⁸⁸ ⁹⁸⁹ ⁹⁹⁰ ⁹⁹¹ ⁹⁹² ⁹⁹³ ⁹⁹⁴ ⁹⁹⁵ ⁹⁹⁶ ⁹⁹⁷ ⁹⁹⁸ ⁹⁹⁹ ¹⁰⁰⁰

جزء Hs: ١٢) ست عشر Hs: ١٣) سبعا Hs: ١٤) غلط Hs: ١٥)

Fateh
13

العمل الثاني ويحصل منه وتر تمام نصف سدس المحيطات									
الترتيب	ن	د	ل	ز	ك	ب	م	ر	ن
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1	1	1	1	1
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1
51	1	1	1	1	1	1	1	1	1
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1
53	1	1	1	1	1	1	1	1	1
54	1	1	1	1	1	1	1	1	1
55	1	1	1	1	1	1	1	1	1
56	1	1	1	1	1	1	1	1	1
57	1	1	1	1	1	1	1	1	1
58	1	1	1	1	1	1	1	1	1
59	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60	1	1	1	1	1	1	1	1	1
61	1	1	1	1	1	1	1	1	1
62	1	1	1	1	1	1	1	1	1
63	1	1	1	1	1	1	1	1	1
64	1	1	1	1	1	1	1	1	1
65	1	1	1	1	1	1	1	1	1
66	1	1	1	1	1	1	1	1	1
67	1	1	1	1	1	1	1	1	1
68	1	1	1	1	1	1	1	1	1
69	1	1	1	1	1	1	1	1	1
70	1	1	1	1	1	1	1	1	1
71	1	1	1	1	1	1	1	1	1
72	1	1	1	1	1	1	1	1	1
73	1	1	1	1	1	1	1	1	1
74	1	1	1	1	1	1	1	1	1
75	1	1	1	1	1	1	1	1	1
76	1	1	1	1	1	1	1	1	1
77	1	1	1	1	1	1	1	1	1
78	1	1	1	1	1	1	1	1	1
79	1	1	1	1	1	1	1	1	1
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1
81	1	1	1	1	1	1	1	1	1
82	1	1	1	1	1	1	1	1	1
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1
86	1	1	1	1	1	1	1	1	1
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1
91	1	1	1	1	1	1	1	1	1
92	1	1	1	1	1	1	1	1	1
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1
94	1	1	1	1	1	1	1	1	1
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1
96	1	1	1	1	1	1	1	1	1
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠

بثلاثة واحدة بل يكون أقل من ربع تسعة وإنما فرضنا في الأعمال السابقة نصف القطر سنتين ليلا يختلف الاوتر على ما هو مشهور ومستعمل في التريجات فلو فرضناه واحدا لما اختلفت صور الأرقام بل اختلفت مراتبها وقد وضعنا مضروب في كل واحد من الرقم الستينية في الجدول ليسهل منه استخراج لقيط من القطر وبالعكس والجدول هذا^{١٠}

.....
 الفصل السابع في ما يعتد عن أعمال الكسور الزائدة والناقصة^{١١} في آخر مراتب الأعمال السابقة
 اعلم أن في آخر مراتب تلك الأعمال لا يبلغ التفاوت بوحدة تامة من تلك المرتبة ولا يعتد إلى آخر مراتب العمل^{١٢} الأخير أيضا لأن آخر مراتب العمل الأول كان سبعة وخمسين ومرو ناقص بعشرين من المرتبة التي تليده^{١٣} اعني من المرتبة التاسعة عشرة لأن باقي الحساب كان حـ نوكر فاذا قسمناه على ما بين المربعين الذي كان حـ كرن منه مخرج نرم واخذناه نر جبر الكسر فيكون مربع العمل الثاني ناقصا بثلاثة اعني بعشرين لكن من المرتبة الثامنة عشرة فاذا نقصناه عن باقي العمل الثاني الذي هو ب نره بقي ب نه منه وقسمناه على ما بين المربعين الذي كان حـ قام منه مخرج منه كج وقد قسمنا هناك ب نره على ما بين المربعين ومخرج مـ ومرو ناقص باثنين وثلاثين من المرتبة التاسعة عشرة وعلى هذا القياس علم أن آخر مراتب العمل الثالث ناقص بستة من المرتبة التي تليده^{١٤} والرابع زايد بخمسة عشر وللخامس ناقص بثمانية وعشرين والسادس ناقص بخمسة عشر وبسبع زايد باثنين^{١٥} وعشرين والثامن ناقص بستة والتاسع ناقص بأربعة وعشرين والعاشر زايد بثمانية عشر وللحادي عشر ناقص بـ^{١٦} عشرة واثني عشرة واثني عشر زايد باثني عشرة^{١٧} والثالث عشر ناقص بخمسة والرابع عشر ناقص بستة عشر وللخامس عشر ناقص بسبعة عشر والسادس عشر بـ تسعة والسابع عشر بـ ستة عشر والثامن عشر زايد بثمانية والتاسع عشر ناقص بثلاثة والعشرين ناقص بأربعة عشر والثاني والعشرين زايد بسبعة وعشرين والثالث والعشرين ناقص بأربعة عشر والرابع والعشرين بـ واحدة وللخامس والعشرين بـ ثمانية عشر والسادس والعشرين بـ خمسة عشر والسابع والعشرين بـ عشرة والثامن والعشرين بـ ستة^{١٨} وعشرين كلنا من المرتبة التاسعة عشرة للجذر والثامنة عشرة^{١٩} مربع^{٢٠} العمل الذي يليه وهذه السبعة الزوائد بتلك المقادير

فيكون مربع عمل الثامن والعشرين وزيدا بعشرة لكن من المرتبة الثامنة عشرة فيكون آخر مراتب فصل مربع القطر عليه اعني رقم نر وهو من المرتبة السابعة عشرة ناقصا بعشرة من المرتبة الثامنة عشرة فيكون آخر مراتب جذره الذي اخذناه خمسة وعشرين ناقصا باثنين وخمسين من المرتبة الخامسة عشرة وآخر مراتب حاصل الضرب اعني لقيط الذي اخذناه ستة واربعين من المرتبة التاسعة ناقصا بأربعة وخمسين من المرتبة العاشرة والاولى ان نأخذ آخر مراتب الضلع أربعة وعشرين وآخر مراتب لقيط في الدائرة خمسة واربعين وحيثئذ يكون الجبر خمس عشرة تسعة ولجذف أربع عشرة وقد اصبحت الكلام فيه ليعلم ان أعمال الكسور الزائدة والناقصة^{٢١} في آخر مراتب هذه الأعمال لا يعتد إلى

^{١٠} Die jetzt im Original folgende Vielfachen-Tafel ist als unwesentlich fortgelassen worden. Vgl. ihre Übersetzung S. 19 ^{١١} Hs: الباقية ^{١٢} Hs: عمل ^{١٣} Hs: يليه ^{١٤} Hs: يليه ^{١٥} Hs: بالثنتين

والباقية: Hs: ^{١٦} التسريع Hs: ^{١٧} عشر Hs: ^{١٨} ويستند Hs: ^{١٩} باسمي عشرو H: ^{٢٠}

تسعة واحدة ثمانية في مقدار الخيط وقد وضعنا هذه التقدير⁴⁷ في الجدول أيضا ليقل وقوع غلط المتقنين والجدول هذا

Tafel
Blatt 20 a

[illegible]

الفصل الثامن في تحويل مقدار الخيط الى الرغيم الهندية على ان نصف القطر واحد ولا كان الخيط

ستة أمثال نصف القطر

وكرر بلغده الى التسعة فاختذا ذلك الكسر من مخرج عو عشرة آلاف مكررة خمس مرات لان جزءا واحدا منه لا يزيد على تسعة واحدة بنصف عشرة (وليسبولن العمل به ابتداء) ووضعنا مضروبها في كل واحدة من القوم التسعة في الجدول ليسهل العمل به والجدول هذا

T a l e l
20 b . 4 f f .

[illegible]

هذا المقادير: H₅)⁴⁷⁾

Zur Tafel 20 b, 4ff.: Weibliche und männliche Formen stehen in der H₂ durcheinander

Tafel 19 a
Mitte

الاعداد		العمل بالرقوم الهندية									
الاحاد	الف الف	١									
	مئات الف	١٠									
	عشرات الف	١٠٠									
	الف	١٠٠٠									
	المئات	١٠٠٠٠									
	العشرات	١٠٠٠٠٠									
	الاحاد	١٠٠٠٠٠٠									
	الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠									
	ثاني الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠٠									
	ثالث الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
الكور	رابع الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
		١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									
الاعداد	الف	١									
	مئات الف	١٠									
	عشرات الف	١٠٠									
	الف	١٠٠٠									
	المئات	١٠٠٠٠									
الاعداد	العشرات	١٠٠٠٠٠									
	الاحاد	١٠٠٠٠٠٠									
	ثاني الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠									
	ثالث الاعشار	١٠٠٠٠٠٠٠٠									
	للمعدل وهو المحيط	١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠									

نوع آخر بالرقوم الهندية ايضا وانعمل فيه ان نمدا باليمين ونرفع مرتبة مرتبة من اليمين الى اليسار
كل واحدة تحت اخرى *

*) Diese 2. Art der Rechnung mit indischen Ziffern ist hier fortgelassen. Vgl. Übersetzung nebst Tafel 19 a (unten) auf S. 24 oben

برقوم للجل				
الصحيح				الفسور
مربع ثلاث مرات	مربع مرتين	مربع مرة	الدراع أو الفرسخ	
٧	٥	٣	٢	١
ل	ر	ك	د	هـ

فإن أردنا عبراً عن هذا أنسر بأند الفين مكررين ست مرات وأربعمائة وأربعة وثلاثين ألفاً مكرراً خمس مرات إلى آخره من مخرج عشرات ألف مكررة^{١٢} ست مرات وإن أردنا عبراً عند بأند عشرون وأربعة من ثلثي الأعداد وثلاثة من رابعها وهكذا إلى آخره وهذا غيبه^{١٣} وقت العمل

Blatt 10 a
2. Zeile v.u.

والأصل أن يحذف بعض المراتب من أواخرها ويبقى ما لم يقدح في مقدار نريد أن لا يميل مثلاً أن كن القياس فرسخاً ونريد أن لا يميل أصبعاً في الحاصل والأصبع ثلثة أرباع ثالثة من فرسخ وترب ثلث خامس الأعداد منه فإذا حسبنا الروابع أو سلس الأعداد واسقطنا ما بعدنا يحصل المطلوب وإن كن الدائرة صغيرة مثلاً كن نصف قطرها مائة وسبعة وعشرين ذراعاً ونصف ذراعاً^{١٤} يكتفى أن نعمل غيب هكذا

Blatt 10 b

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٢	٦	٦	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
٣	٨	٦	٣	٤	٣	٢	١	٠	٠
٤	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
٥	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
٦	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
٧	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
٨	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
٩	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
١٠	١٠	٦	٣	٣	٢	١	٠	٠	٠
الفسور					الصحيح				

فحصل ثمانمائة ذراع وذراع واحد وعشر ذراع وهو مقدار الخيط وأما أن كن مقدار الخيط معلوماً وأردنا معرفة انقصر فنضعه ونقسمه على نسبة الخيط بأن نطلب في الجدول أكثر عدد يكون أقل منه بصورته فإذا وجد فإن كن في سطر يكون أعلى المراتب^{١٥} صفراً فنضع صفراً في أعلى الخيط الموضوع أيضاً أعلى يمين رقوم للجل ويسار البنددية ونكتب ما وجد تحت بحيث يكون الصفوان متخالفين وكذا سائر الأرقام على الولاة وننقصه منه ونكتب الباقي تحت ونكتب ما كن في حاشية الجدول أعلى في سطر العدد بإزاء ذلك العدد في موضع ونسب سطر الخارج ويكون ذلك من مرتبة في تالي أعلى مراتب الخيط ولو كن الصفر الذي للحقاه به لم نطلب أكثر عدد يكون أقل من الباقي بصورته وننقصه منه ونكتب ما وجد في الحاشية بإزاء ذلك العدد تالي ما وضع أولاً في سطر الخارج أعلى يسار ما كتب أولاً أن كن من رقوم للجل ويبين أن كن البنددية هذا إذا كن عدد أعلى مراتب الباقي محطاً عن أعلى مراتب ما فرق صفراً كن أو عدداً بمرتبة واحدة وأما أن كن احتياطاً أكثر من مرتبة

مراتب: Hs: ^{١٢} غايث Hs: ^{١٣} مكره Hs: ^{١٤} ونصف ذراع: In Hs fehlt: ^{١٥}

Am rechten Rand der zweiten Tafel ist statt الصحيح das sonst angewandte الفسور zu lesen.

196
Tafel
un ten rechts

العمل جساب للجل						
ل	ر ⁽¹⁾	كد	مر	ن	ب	نقيض
مد	د	مد	ند	ند	ب	ما طلبناه
مر	ب	نط	نا	د		الباقى
كط	لد	ا	مط	د		ما طلبناه
نر	كر	نر	ب ⁽²⁾	د ⁽³⁾		الباقى
مر	د	نر	ب			ما طلبناه
ل	كب	ن				الباقى
نا	نح	ن				ما طلبناه
نط	د					الباقى
						ما طلبناه

Tafel
un ten links

بالرقوم البندية											٢٠١٠
٠	٦	٥	٠	١	٢	٣	٤	١	٢	٥	نقيض
٠	٦	٢	٨	٣	١	٨	٥	٣	٤	١	ما طلبناه
		٢	٢	٥	٦	٥	٥	١	٤		الباقى
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠		ما طلبناه
		٢	٢	٥	٢	٥	٥	١	٢		الباقى
		١	٨	٨	٢	١	٥	٥	١		ما طلبناه
			٢	٦	٧	٦	٠	٣	٨		الباقى
			٢	١	٢	١	٥	١	٣		ما طلبناه
			٥	٣	٢	٢	٢	٥	٥		الباقى
			٥	٠	٢	٦	٥	٥	٥		ما طلبناه
				٢	١	٧	١	١	٠		الباقى
				٢	١	٢	١	١	٦		ما طلبناه
						٣	٧	٢	٠		الباقى
						٠	٠	٠	٠		ما طلبناه
						٣	٧	٢	٠		الباقى
						٣	٧	٢	٠		ما طلبناه

⁽¹⁾ Ha: د

⁽²⁾ Ha: ل

⁽³⁾ Ha: ب

⁽⁴⁾ Ha: ١

Blatt 19 b واحدة فنضع في قالي ما كتب في سطر الخارج صفرا او اصفارا عددها اقل بواحدة من عدد المحيط
اعلى مراتب الباقي عما فوقه ونضع تحت الباقي صفرا من الاصغار او صفرا بعدد الاصغار المذكورة بحيث
15 يكون اعلى مراتب النصف الاول محاذيا لاعلى²⁶ مراتب الباقي ونو كن صفرا وللتالي محيطا منه بمرتبة
وللتالي بمرتبتين هكذا الى ان يتم الدفع وقوع الغلط وسهولة الضبط لا للوجوب ونكتب الباقي
تحت الاصغار مرة اخرى محاذيا للاول ثم نطلب اكثر عدد بالصفة المذكورة ونقصه من الباقي على
القياس المذكور وهكذا نعمل الى حيث شئنا فما حصل في سطر الخارج فهو المطلوب وان شئنا نضع
20 ارقام سطر الخارج على حاشية نستمر العمل محاذيا لاعداد²⁷ الطولية مثله اردنا ان نعرف قطر دائرة
يكون لزوج محيطيا بقدر العدد²⁸ الذي فرضناه من قبل قطرا فعلنا به هكذا*)

الفصل العاشر في معرفة التفاوت بين ما هو المشهور والمستعمل عند القوم وبين ما حصلناه اعلم ان
اصحاب هذا الفن اخذوا المحيط ثلثة امثال القطر وسبع مثله فيكون ستة امثال نصف القطر وسبعي
مثله فاذا وضعناه برقوم الجمل واخذنا التفاوت بينه وبين ما حصل لنا حصل هذا

نسبة المحيط الى نصف القطر بالحساب ²⁹ المشهور								
د	نر	ح	لد	نر	ح	لد	نر	ح
د	نر	نظ	كج	ا	لد	ثا	مر	ند
د	نر	ث	و	د	لح	مب	ل	بح
مد								

فعلم منه ان التفاوت في دائرة يكون نصف قطرها ثلثة آلاف وستمائة ذراع يكون تسعة اذرع
5 وعشر ذراع تقريبا وقد اورد صاحب النخبة الشافية ان نصف قطر محدب الترابيت سبعون الفا
وثلثة وسبعون مثلا لقطر الارض ونصف مثله واستخرج المحيط منه على انه ثلثة امثال وسبع مثله

الأخوذة بالارقام الثلثة	٧	٩٧	٢٢٩٣٤
العددية	٧	٨٢	٢٣٩١
ورقم الكسر	٥	١٤	٨٥١٨٣
الحاصل	٧٨		٢٨٤٢٠٤٤
ما كان في النخبة			٢٢٩١٠٤٤
التفاوت بينهما			١٧٧

Tafel 8 ff.

وهو اربعمائة واربعون الفا واربعمائة واثنان وستون مثلا لقطر الارض فاذا حسبناه بسا حصل لنا
هكذا فيكون التفاوت بينهما مائة وسبعين مثلا لقطر الارض وكسرا اقل من الربع فيكون في درجة
واحدة من محدب الترابيت مثل نصف قطر الارض تقريبا والد اعلم ومن هذا علم اذا ضرب نصف القطر

حساب: Hs: ²⁹ العدد Hs: ²⁸ لاعداد Hs: ²⁷ على Hs: ²⁶

*) Es folgen die beiden Tafeln 19 b [S. 90] — Die Tafel hat irrtümlicherweise den Strich vor ٣١٤٥

- في ستة وسبع عشرة دقائق يحصل لحيض اقرب الى الصواب من ضرب القطر في ثلثة وسبع واسهل منه Bint 22^a 10
- الثالثة في اثنتي عشرة غلط ابي اليزيد وابي الرحمان فقد اوردتا الشكل الاول من المقالة الاولى من 11
- الحجسطي وليكن ⁽⁵⁰⁾ ا ب د نصف دائرة على قطر ا ب د ومركز د و ب د عمودا على القطر وننصف د 12
- على د ونصل د ه ونجعل د ه مساويا ل د ه ونصل د ه فيكون د ه ضلع المربع د ه ب ونصل د ه فيكون د ه 13
- د نصف على د ويزيد فيد د ه فمستقيم د ه في د ه مع مربع د ه يسوي مربع د ه بالشكل السادس من الثانية 14
- الاصول فيساوي مربع د ه بل يساوي مربعي د ه د ه ويلقى مربع د ه اشتراك يبقى سطح د ه في د ه مساويا 15
- لمربع د ه اعني مربع د ه فسطح د ه مقسوم بنسبة ذات الوسط والطرفين على نقطة د لان ضرب 16
- الحظ كله في قسمة الاصغر ⁽⁵¹⁾ يساوي مربع قسمة الاطول ⁽⁵²⁾ ولذا يستلزم ان نسبة د ه الى د ه 17
- كنسبة د ه الى د ه بالشكل السابع عشر من سدسة الاصول و د ه الاطول وتر سدس الدائرة بالشكل 18
- الخامس عشر من رابعة الاصول ف د ه يكون وتر عشر الدائرة بستبانه الشكل الثاني عشر من الثالثة 19
- عشرة من الاصول و د ه القوس عليهما وتر خمس الدائرة بالشكل الثالث عشر من المقالة الثالثة عشر 20
- من الاصول واذا اتوا ان د ه يساوي وتر تسعة ضلع المربع اعني وتر ثلثة اعشار لحيض لان قد 21
- عرفت مما سبق ان مجموع مربعي وتر القوس وتر تمامها يساوي مربع القطر وقد يساوي مجموع 22
- مربعي د ه د ه مربع القطر وذلك لان مربع القطر يساوي اربعة امثال مربع نصف القطر ومربع 23
- د ه يساوي مجموع مربع د ه نصف القطر ومربع د ه وضعف سطح د ه في د ه ومربع د ه يساوي 24
- مجموع مربعي د ه نصف القطر و د ه فيكون مجموع مربعي د ه د ه يساوي مجموع ضعف مربع 25
- نصف القطر وضعف مربع د ه وضعف سطح د ه في د ه وقد عرفت مما سبق ان مربع نصف القطر 26
- يساوي سطح د ه في د ه فيساوي مجموع سطح د ه في د ه ومربع د ه فيكون مجموع ضعف سطح 27
- د ه في د ه وضعف مربع د ه مساويا لضعف مربع نصف القطر فمجموع مربعي د ه د ه يساوي اربعة Blat 22^b 1
- امثال مربع نصف القطر فيساوي مربع القطر فاذا كان د ه ضلع ⁽⁵³⁾ المربع يكون د ه وتر ثلثة 28
- الاعشار و هو المطلوب وقد بين بطليموس في الشكل الثالث من المقالة الاولى من الحجسطي ان الفصل 29
- بين سطح وتر احد القوسين في وتر تمام الآخر وبين سطح وتر تمام ذلك القوس في وتر الآخر يساوي 30
- سطح القطر في وتر الفصل بين القوسين وايضا بين في الشكل الرابع منها ان مجموع سطح وتر احد 31
- القوسين في وتر الآخر وسطح وتر تمام ⁽⁵⁴⁾ مجموعهما في القطر يساوي سطح وتر تمام احد القوسين في 32
- وتر تمام الآخر فيكون مجموع مربع وتر قوس وسطح وتر تمام ⁽⁵⁵⁾ ضعفيها في القطر يساوي مربع وتر 33
- تمام تلك القوس فاذا تبين هذه القوانين نشرع في استخراج وتر جزء ونصف وامتحان ما يحسد ابر 34
- الوفاء انه وتر نصف جزء واطليار غلطه في الحساب وايراد وتر نصف جزء وامتحان فحتمه وللساب هذا 35

⁽⁵⁰⁾ Fehlt in Ha ⁽⁵¹⁾ وتر ضلع Ha ⁽⁵²⁾ قسمة الاطول Ha ⁽⁵³⁾ قسمة الاصغر Ha ⁽⁵⁴⁾ لكن Ha ⁽⁵⁵⁾ Fehlt in Ha

شرح العمل										العمل الاول في امتحان ما حسبه ابو الوفاء انه وتر لنصف جزء										العمل الثاني في امتحان ما ذكرنا انه نصف جزء									
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
اذا كان وتر قوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
يكون مربعه	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر تمامها	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
وتر تمامها	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
نقصنا مربع وتر تلك القوس عن مربع وتر تمامها بقي	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
مسطح القطر في وتر تمام ضعف تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
قسناه على القطر خرج وتر تمام ضعف تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
مربعه	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
نقصناه عن مربع القطر يبقى مربع وتر ضعف تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
اخذنا جذره حصل وتر ضعف تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
مسطح وتر تلك القوس في وتر ضعفها	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
مسطح وتر تمام احدهما في تمام الاخر	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
التفاضل	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
قسناه على القطر خرج وتر تمام ثلاثة امثال تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
مربعه	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
نقصناه عن مربع القطر بقي مربع وتر ثلاثة امثال تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥
فيكون وتر ثلاثة امثال تلك القوس	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥	٥	لا	كد	ند	ند	ند	لا	٥	٥

Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik. II

P. LUCKEY (†) – Gönningen (Württemberg)

Rechnen und Algebra

Von den zahlreichen Lehrbüchern des Rechnens, die im Mittelalter in arabischer und persischer Sprache geschrieben wurden, scheint zwar eine Anzahl, und darunter leider gerade manche von den ältesten, unwiederbringlich verloren gegangen zu sein. Aber vieles ist zum Glück erhalten, und davon hat das Or 17 (1948), 492 erwähnte Verzeichnis von Krause mancherlei ans Licht gebracht. Die bisher den Mathematikhistorikern zugänglich gemachten Rechenbücher geben nur ein unvollkommenes Bild der Rechenkunst im islamischen Mittelalter und ihrer Entwicklung. Ziemlich gut untersucht wurde bisher das in islamischen Rechenbüchern dargestellte Rechnen mit ganzen dekadischen Zahlen, die im Positionssystem mit den sogenannten indischen Ziffern ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ und der Null ٠ geschrieben wurden, und das zugehörige Rechnen mit gemeinen Brüchen. Für die sexagesimalen Rechnungen hatte man früher kein grosses Interesse. Man beobachtete zwar, dass die Sinus- und Tangententafeln, mit denen die Astronomen rechneten, und die eigentlichen astronomischen Tabellen, wie die des Almagest, sexagesimal geschrieben waren, und zwar mit den abgekürzten Summalbuchstaben ط ح ر و د ح ب ا für die Einer und ن م ل ك ي für die Zehner, Buchstaben, die in ihrer Verwendung genau den griechischen Buchstaben $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta$ und $\iota \kappa \lambda \mu \nu$ entsprachen, ebenso wie das für leere Stellen verwandte Nullzeichen چ dem griechischen Zeichen $\varnothing$ entsprach, aus dem es hervorgegangen zu sein scheint. Aber wie diese Tabellen auf oft viel mehr Sexagesimalstellen als die griechischen praktisch berechnet wurden, das blieb von der Forschung zum Teil kaum beachtet, und Wichtiges hierüber gelangte nicht in die Darstellungen der Geschichte der Mathematik und der Astronomie. So konnte es denn geschehen, dass die beiden Zeitgenossen, denen wir in erster Linie die Er-

forschung der alten Mathematik des Zweistromlandes verdanken, als sie sich getrieben fühlten, das Schicksal und Weiterleben babylonischer Sexagesimalrechnung, deren Trümmer die griechischen Sexagesimalbrüche sind, im Mittelalter zu verfolgen, von der mathematikgeschichtlichen Literatur im Stiche gelassen wurden. O. Neugebauer äussert sich bei einer kurzen Erörterung des "allmählichen Rückschritts" der Sexagesimalrechnung seit den altbabylonischen Texten über das Mittelalter folgendermassen: "Das Mittelalter kehrt dann zum Fingerrechnen zurück, wie es nur an vorgeschichtlichen Spuren in Mesopotamien und Ägypten erkennbar ist" (¹). F. Thureau-Dangin sagt: "Abgesehen von einigen seltenen und späten Ausnahmen ist dieses System, angefangen bei den Griechen, immer nur angewandt worden, um Brüche auszudrücken" (²). Was er mit den seltenen und späten Ausnahmen meint, zeigt sein Hinweis auf die *Algebra* von Wallis (³) und auf Tropske (1³, 1930, S. 61 ff.).

Demgegenüber ist festzustellen: Die islamischen Astronomen besaßen für ihre Rechnungen eine Methode reiner Sexagesimalrechnung, die sich schon jetzt bis vor das Jahr 1000 n. Chr. zurückverfolgen lässt und bis in die Neuzeit weiterlebte. Unter reiner Sexagesimalrechnung verstehe ich eine Rechnungsweise mit folgenden Kennzeichen: Sowohl die Ganzen wie die Brüche wie allgemein die aus Ganzen und Bruchteilen zusammengesetzten Zahlen werden nach fallenden Potenzen von 60 entwickelt und im Positionssystem geschrieben. Alle Koeffizienten der Entwicklung, d. h. alle "Ziffern" der Sexagesimalzahlen, sind Zahlen der Menge 0, 1, ..., 59. Der absolute Stellenwert wird, besonders in späterer Zeit, und wenn die Deutlichkeit es erfordert, gekennzeichnet, z. B. dadurch, dass die Einer von den Sechzigsteln durch einen Strich geschieden werden. Entsprechend der beim dekadischen Rechnen üblichen Verwendung des Kleinen Einmaleins, das im Mittelalter bekanntlich von Leuten schwachen Gedächtnisses aus einer geschriebenen Tabelle mit zwei Eingängen abgelesen wurde, wird eine geschriebene Tabelle mit zwei Eingängen für die sexagesimal ausgedrückten Produkte von 1 mal 1 bis 59 mal 59 benutzt. Aus dieser Einmaleinstafel oder Produktentafel der Sexagesimalrechnung, wie man sie in der abendländischen

(¹) *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math.* B, 4, 1938, S. 356.

(²) F. Thureau-Dangin, *Sketch of a History of the Sexagesimal System. Osiris* 7, 1939, S. 95-141. S. 95 und 138 Anm. 101.

(³) *Joh. Wallisii op. math.* II, Oxford 1657, S. 25-28.

Literatur z. B. in der erwähnten *Algebra* von Wallis abgedruckt findet, entnimmt man z. B., dass 28 mal 39 gleich 18 12 ist, d. h. gleich $18 \cdot 60 + 12$.

Eine der wertvollen Stambuler mathematischen Handschriften ist Aya Sofya 4857,⁷ (Krause S. 472-73): *Über die Elemente des Rechnens der Inder* (*fī uṣūl ḥisāb al-Hind*) von Kūšyār b. Labbān, der in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts lebte und, wie sein Herkunftsname al-Ġilī anzeigt, aus Ġilān in Persien stammte. Die Schrift⁽¹⁾ zerfällt in zwei Bücher. Das erste behandelt in der Hauptsache das dekadische Rechnen mit ganzen Zahlen, die in gewöhnlicher Weise mit "indischen" Ziffern geschrieben sind. Knapp, aber deutlich und lebendig wird die Ausführung der elementaren Rechenoperationen und der Wurzelausziehung an Beispielen vorgeführt. Die Rechnungen werden auf der Staubtafel vollzogen. Der Verfasser beschreibt, welche Ziffern bei den jeweiligen Rechenschritten auszulöschen und welche an ihre Stelle zu setzen sind. Auch hält er einzelne Phasen der Rechnung durch Wiedergabe der auf der Staubtafel entstandenen Schriftbilder fest. Inhaltlich gehört noch zum ersten Buch die dem zweiten angehängte, an einem Beispiel erläuterte dekadische Ausziehung der Kubikwurzel. Hervorgehoben sei, dass Kūšyār Wurzeln nach einem in der Neuzeit von Ruffini und Horner wiedergefundenen Verfahren auszieht, natürlich in einer dem Staubtafelrechnen angemessenen Ausführungsweise. Bekanntlich wurde dieses Verfahren auch in der chinesischen Mathematik festgestellt. Für die islamische ist die Feststellung neu⁽²⁾.

Das erste Buch des Werkes von Kūšyār deckt sich im grossen und ganzen mit dem Inhalt der Oxforder hebräischen Handschrift *ʿIyūn ḥāʾiqqārīm* (Bodl. Oppenh. 272 A. Qu.), einer von Schalom b. Josef verfassten hebräischen Übersetzung. Schon der Inhalt dieses ersten Buches rechtfertigt, wie mir scheint, die Herstellung einer mit

(¹) Ausführlicher ist über den Inhalt dieser Schrift und anderer bisher noch nicht oder wenig erschlossener Werke über das Rechnen berichtet in der Abhandlung: P. Luckey, *Die Rechenkunst bei Ġamšūd b. Masʿūd al-Kāšī, mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens* (163 Schreibmaschinenseiten und 18 Seiten arabische Textstellen). Die Arbeit wurde 1943 von der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft für die *Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes* angenommen.

(²) Näheres in P. Luckey, *Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik*, *Mathematische Annalen* 120 (1948), 217-274.

Übersetzung und Erläuterungen versehenen Textausgabe der zum Glück nur 31 Seiten mit je 17 Zeilen umfassenden Schrift von Kūšyār, die hinsichtlich der Darstellung einen frischen, originellen Eindruck macht und zu den ältesten uns in arabischer Sprache erhaltenen Rechenbüchern gehört. An-Nasawī, dessen Rechenbuch Suter untersucht hat⁽¹⁾, erweist sich als stark abhängig von seinem Lehrer Kūšyār. Auch er radiziert, was Suter nicht bemerkte, nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren.

Mehr soll uns aber hier das zweite Buch beschäftigen. Es enthält eine Anleitung zur reinen Sexagesimalrechnung. Dass auch dieses zweite Buch, obwohl sein wesentlicher Inhalt in der Oxforder hebräischen Handschrift fehlt, und auch an-Nasawī diesen Gegenstand nicht behandelt, zur Originalschrift des Kūšyār gehört, glaube ich schon aus einer Bemerkung an-Nasawī's schliessen zu können. Er kennzeichnet das Lehrbuch Kūšyār's dahin, dass es vorwiegend auf die astronomischen Rechnungen abziele.

Das zweite Buch sagt einleitend, in Anlehnung an das vorausgehende Einfache (die dekadischen Rechnungen des ersten Buches) solle jetzt die Ausführung der Rechenoperationen "nach der Weise der Zusammensetzung vermittelt einer Tafel, die unter dem Namen 'Sechzigertafel' (*šadwāl as-sittīn* = Tafel der Sechzig) bekannt ist", behandelt werden. Diese Sechzigertafel — auch spätere Mathematiker gebrauchen diese oder eine ähnliche Bezeichnung — ist die oben von uns erwähnte Tafel des sexagesimalen Einmaleins. In II, 1 beschreibt Kūšyār sie kurz, in II, 13 sollte sie nach Angabe der Überschrift dieses Kapitels enthalten sein, doch fehlt sie in unserer Handschrift. In Handschriften späterer Werke finden wir die Tafel, die gewöhnlich in Teiltafeln zerlegt wurde, wiedergegeben. Sie war für den rechnenden Astronomen ein ebenso wichtiges Rechenhilfsmittel, wie es heutzutage die Logarithmentafel oder die Rechenmaschine ist. Nach Kūšyār's Beschreibung besteht die Sechzigertafel aus 60 Spalten, deren jede er eine 'Tafel' oder 'Tabelle' (*šadwāl*) nennt. An der Spitze dieser 60 Tabellen (Spalten) stehen die Kopffzahlen 1 bis 60, und unter jeder dieser Kopffzahlen stehen ihre sexagesimal geschriebenen Vielfache bis zum 60fachen. Die Kopffzahlen heissen "Breitenzahlen"; entsprechend heissen die am vorderen Rande (d. i. wegen der arabischen Schreibrichtung am rechten Rande) von oben nach unten laufenden Zahlen 1 bis 60 "Län-

⁽¹⁾ *Bibliotheca Mathematica* (3) 7, 1906, S. 113-119.

genzahlen". In der Tabelle (Spalte), an deren Spitze die Breitenzahl 18 steht, findet man auf der Höhe der Längenzahl 25 die Zahl 7 30. Sie ist die sexagesimale Schreibung des Produkts 25 mal 18 = 450 = 7 · 60 + 30 · 1. Weil jedes der Produkte dieser Art (mit Ausnahme des grössten 60 mal 60 = 1 0 0 eine oder zwei Sexagesimalstellen besitzt, sind sie "in zwei Reihen" (*fī saṭrain*) geschrieben. Von dem eben genannten Produkt 7 30 steht 7 in der ersten und 30 in der zweiten Reihe. Da der Text unmittelbar aus der Sechzigertafel entnommene Zahlen in Gummalbuchstaben schreibt, werden die Sexagesimalzahlen in der dem Rechner vorliegenden Tafel wohl in Gummalbuchstaben geschrieben gewesen sein, wie wir das bei allen in Sexagesimalzahlen geschriebenen Tabellen gewohnt sind und insbesondere auch bei den in späteren Werken wiedergegebenen Sechzigertafeln beobachten.

In II, 2 wird das "Erhöhen" (*raf*) behandelt, d. h. die Verwandlung einer ganzen dekadischen Zahl, die grösser als 60 ist, wie z. B. 15621, in eine Sexagesimalzahl. Man dividiert 15621 durch 60 und erhält 260, Rest 21, dann 260 durch 60 und erhält 4, Rest 20. Also ist $15621 = 4 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 21$. Kūšyār schreibt dieses Ergebnis im Positionssystem mit untereinander gesetzten "indischen" Ziffern so:

o 7		04
r o	, d. i.	20
r i		21

In unter islamischem Einfluss abgefassten Scholien zu Euklids Elementen sehen wir Sexagesimalbrüche ebenso in Kolonnen mit indischen Ziffern geschrieben. Treten zu Kūšyār's ganzer Sexagesimalzahl Brüche hinzu, so ist die Entwicklung entsprechend sexagesimal nach unten fortzusetzen. So ist z. B. der vierte Teil der oben niedergeschriebenen Zahl:

o i		01
o g		05
o g	, d. i.	05
i g		15

Die Stellenwerte dieser Zahl werden von oben nach unten folgendermassen benannt: "zweimal Erhöhtes" (*marfū marratain*), einmal Erhöhtes" (*marfū marrat^m*), "Grad" (*daraġa*), "Minute" (*daqīqa*). Nach oben würden sich anschliessen: "dreimal Erhöhtes" (*marfū talāla marrāt*) usw., nach unten: "Sekunde" (*ṭāniya*) usw.

Die sexagesimale Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Quadratwurzelausziehung ganzer Zahlen auf der Staubtafel lehrt Kūsyār in den folgenden Abschnitten in einer Ausführungsweise, die in allen einzelnen Schritten der im ersten Buche beschriebenen dekadischen Ausführung dieser Operationen entspricht. Als Beispiel gebe ich den Abschnitt II, 5 über die Multiplikation mehrstelliger Sexagesimalzahlen wieder ⁽¹⁾. In der Übersetzung behalte ich bei den Rechenbildern die der arabischen Schreibrichtung entsprechende Reihenfolge der Spalten bei; im ersten Bilde ist also die Spalte $\begin{smallmatrix} 25 \\ 42 \end{smallmatrix}$ die zuerst hingeschriebene. Zur Unterscheidung von den indischen übersetze ich die Gummaziffern des Textes durch die entsprechenden griechischen Zeichen, deren Zahlenwert ich in Klammern beifüge. Zur Erläuterung der Rechnung, die man auf einer Schiefertafel vollziehen möge, gebe ich die Phasen des sich wandelnden Rechenbildes am Rande ausführlicher als der Verfasser durch die Bilder I, Ia, Ib, II, IIa, III wieder, von denen I, II und III mit denen des Verfassers übereinstimmen. Man beachte übrigens, wie die Null als eine Zahl behandelt wird, die man zu einer anderen addiert.

Istanbul, Aya Sofya 4857 7, 272b3 - 273a8.

الفصل الخامس فى الضرب

نريد ان نضرب خمسة وعشرين درجة واثني واربعين دقيقة فى ثمانية عشر درجة وستة وثلاثين دقيقة فنضعها على ما فى الصورة الاولى

$$\begin{array}{c|c} 18 & 25 \\ \hline 36 & 42 \end{array}$$

المنزلة الاولى من المضروب هو التى على يمين الحاسب بازاء المنزلة الاولى من المضروب فيه والثانية بازاء الثانية وفرجة ما بينهما للمبلغ ⁽²⁾ ثم نقصد جدول ثمانية عشر من اعداد العرض وناخذ منه ⁽³⁾ ما بازاء خمسة وعشرين

⁽¹⁾ Eigentümlichkeiten der Handschrift hinsichtlich Wortschreibung und Grammatik lasse ich unverändert.

⁽²⁾ Hs in der Zeile $\begin{array}{c|c} 18 & 25 \\ \hline 36 & 42 \end{array}$. Am Rande so verbessert, dass zwar der Zwischenraum vorhanden ist, aber die Zahlen 18 und 25 in die erste und die Zahlen 36 und 42 in die vierte Zeile geraten sind. - ⁽³⁾ Am Rande als Einfügung ⁽⁴⁾ كذلك وضعناه صفرا. Dies gehört nicht hierher, sondern ist eine etwas andere Formulierung der bald folgenden Stelle ⁽⁵⁾ خذ. in der Zeile verbessert aus ⁽⁶⁾ وان لم نجد..... صفرا ابدا.

من اعداد الطول وهو زل^١ فنضع ز فوق بازاء الخمسة والعشرين ونضع ل^٢ بازاء خمسة وعشرين وان لم نجد في السطر الاول شيئاً^٣ نضع مكان الزاء صفراً ابداً ثم نأخذ من هذا^٤ الجدول ايضاً ما بازاء اثنين واربعين وهو يب^٥ لو فنزيد يب^٥ على ما فوق بازاء الاثنين والاربعين ونضع لو بازاء اثنين واربعين وننقل المضروب الى اسفل بمرتبة على ما في الصورة الثانية

	٥٧	
١٨	٣٦	
٣٦	٣٦	٢٥
		٣٦

ثم نقصد^٦ جدول ستة وثلاثين من اعداد العرض ونأخذ منه بازاء خمسة وعشرين من اعداد الطول وهو يه^٧ فنزيد يه^٧ على ما فوق بازاء الخمسة والعشرين والصفراً لما بازاء خمسة وعشرين ثم نأخذ من هذا الجدول ايضاً بازاء اثنين واربعين وهو كه^٨ يب^٥ فنزيد كه^٨ على ما فوق بازاء الاثنين والاربعين ونضع يب^٥ بازاء اثنين واربعين فيحصل من الضرب على ما في الصورة الثالثة

	٥٧	
١٨	٥٨	
٣٦	٥١	٢٥
	١٢	٣٦

وذلك ما اردنا ان نعمل

Übersetzung:

"Fünfter Abschnitt. Die Multiplikation.

Wir wollen fünfundzwanzig Grad zweiundvierzig Minuten mit achtzehn Grad sechsunddreissig Minuten multiplizieren. Zu diesem Zwecke schreiben wir sie (die vier Zahlen) so hin, wie es im ersten Bilde

18	25
36	42

I.

18	25
36	42

من هذا (١) - شيئاً كما Hs^٩. زلب^{١٠} in der Zeile verbessert aus زل^{١١} am Rande. - ٩) Hs نقص.

[dargestellt] ist. Die erste Stelle des Multiplikanden ist diejenige, welche zur Rechten des Rechners gegenüber der ersten Stelle des Multiplikators [steht]; die zweite [steht] gegenüber der zweiten, und zwischen beiden ist ein Zwischenraum für das Ergebnis. Dann gehen wir in die Tabelle (Spalte) der Breitenzahl achtzehn ein und entnehmen aus ihr, was gegenüber der Längenzahl fünfundzwanzig [steht], nämlich $\zeta \lambda$ (7 30), schreiben ζ (7) über [die Stelle] gegenüber fünfundzwanzig und schreiben λ (30) gegenüber fünfundzwanzig. Falls wir in der ersten Reihe nichts finden, setzen wir anstelle des ζ (7) stets eine Null. Dann entnehmen wir aus dieser Tabelle (Spalte) auch das, was gegenüber zweiundvierzig [steht], nämlich $\imath \beta \lambda \varsigma$ (12 36) addieren $\imath \beta$ (12) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber der zweiundvierzig [steht], schreiben $\lambda \varsigma$ (36) gegenüber zweiundvierzig und verschieben den Multiplikanden um eine Stelle nach unten, wie es im zweiten Bilde

	07	
18	30	25
36		42
I a.		
	07	
18	42	25
36	36	42
I b.		

	07	
18	42	
36	36	25
		42

	07	
18	42	
36	36	25
		42
II.		

[dargestellt] ist. Dann gehen wir in die Tabelle der Breitenzahl sechsunddreissig ein und entnehmen aus ihr [, was] gegenüber der Längenzahl fünfundzwanzig [steht], nämlich $\imath \epsilon \circ$ (15 0), addieren $\imath \epsilon$ (15) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber fünfundzwanzig [steht], und die Null zu dem, was gegenüber fünfundzwanzig [steht]. Dann entnehmen wir aus dieser Tabelle auch [das, was] gegenüber zweiundvierzig [steht], nämlich $\kappa \epsilon \imath \beta$ (25 12), addieren $\kappa \epsilon$ (25) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber der zweiundvierzig [steht], und schreiben $\imath \beta$ (12) gegenüber zweiundvierzig. Dann kommt [es] aus der Multiplikation so heraus, wie es im dritten Bilde

	07	
18	58	
36	01	25
	12	42

	07	
18	58	
36	01	25
	12	42
III.		

[dargestellt] ist. Und dies ist das, was wir ausrechnen wollten".

In dem auf diesen Abschnitt folgenden sechsten Abschnitt wird gelehrt, wie der Stellenwert des Produktes zweier Sexagesimalstellen

aus den Stellenwerten der beiden Faktoren unter Verwendung einer besonderen Tabelle gefunden wird. An ihrem rechten Rand stehen "in der Länge" die Stellenwerte des Multiplikanden, sowohl die der Ganzen (Grade, einmal Erhöhtes, zweimal Erhöhtes,...), wie auch nach der anderen Seite von den Ganzen die der Brüche (Minuten, Sekunden,...). Ebenso stehen am oberen Rande "in der Breite" die Stellenwerte des Multiplikators. Ist nun z. B. "einmal Erhöhtes" mit "Quarten" zu multiplizieren, so trifft sich die Zeile, an der "einmal Erhöhtes" steht, mit der Spalte, die mit "Quarten" beschriftet ist, in einem Kleinquadrat, in das der Stellenwert des Produktes hineingeschrieben ist, und zwar bemerkenswerterweise in Form einer mit roter Tinte geschriebenen 3. Sie bedeutet "Terzen". Eine schwarze 3 würde "dreimal Erhöhtes" bedeuten. Das, was wir als den positiven Stellenzeiger $+3$ bezeichnen, ist also hier durch eine schwarz geschriebene 3, und das, was wir als den negativen Stellenzeiger -3 bezeichnen, ist durch eine rot geschriebene 3 wiedergegeben. Die ganze Hilfstafel ist mathematisch weiter nichts als eine Tabelle für die Summen zweier kleiner positiver und negativer ganzer Zahlen unter Hinzunahme der Null. Als schwarz oder rot geschriebene Zahlen treten also hier in der islamischen Mathematik, der man eine ausdrückliche Einführung der negativen Zahlen absprechen muss, die Zahlen auf, die wir als positive oder negative ganze Exponenten in der Entwicklung nach Potenzen von 60 bezeichnen. Noch heute trägt der Kaufmann in Abrechnungen die Vermögensbeträge schwarz, die Schuldsommen aber rot ein. Umgekehrt malten im Mittelalter die Chinesen positive Zahlen rot, negative schwarz.

Für diese Tabelle zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes, die auch zur Bestimmung des Stellenwertes des Quotienten verwandt werden kann, hat Kūšyār den Abschnitt II, 14 ausersehen. Er ist in unserer Handschrift ebensowenig wie der für die Sechzigertafel bestimmte Abschnitt II, 13 ausgefüllt, und so wissen wir in Ermangelung von Angaben des Verfassers nicht, wie der Stellenwert der Grade in der Hilfstafel gekennzeichnet sein soll. Wir erwarten: durch eine Null.

Auf die Ausführungsweise der übrigen Rechenoperationen kann ich an dieser Stelle nicht eingehen. Sie ist, wie gesagt, derjenigen beim dekadischen Rechnen genau nachgebildet mit der Massgabe dass alle Stellen, die beim dekadischen Rechnen nebeneinander geschrieben werden, beim sexagesimalen untereinander zu schreiben sind. Da Kūšyār jede Sexagesimalstelle zweistellig mit indischen Ziffern

schreibt, würde ja auch das Nebeneinanderschreiben der Stellen Verwirrung anrichten.

Kūšyār versucht auch, aber ungeschickt und mit schlechtem Erfolg, die Nennerprobe der Rechnungen mit dekadischen Zahlen auf die sexagesimalen Rechnungen zu übertragen. Wir sehen hier, dass er zwar ein geschickter Lehrer, aber kein erfinderischer Mathematiker ist, und das ist uns für die Beantwortung der Frage wichtig, in welchem Umfange diese Sexagesimalrechnungsmethoden etwa sein geistiges Eigentum sind. Nichts gibt er als neu oder gar von ihm selbst erfunden aus. Insbesondere erscheint "die Tafel, die unter dem Namen Sechzigertafel bekannt ist", ihre Einrichtung und Verwendung ebenso wie das Rechnen mit Erhöhten, d. h. ganzen Sexagesimalzahlen, als übernommenes Gut. Wir halten also nach Kūšyār's vermutlichen Konkurrenten oder Vorläufern Ausschau.

Dabei stoßen wir auf einen Mathematiker ersten Ranges. Es ist Kūšyār's Zeitgenosse Abul-Wafā' al-Būzāǧānī, der 998 starb, und den wir oben (Or 17, 510) schon als den mutmasslichen Hauptfinder der eigentlichen Kugeldreieckrechnung und Entdecker des sphärischen Sinussatzes nannten. Er, dessen algebraische Schriften uns leider nicht erhalten sind, schrieb unter anderem den in Paris noch vorhandenen, trigonometrisch und astronomisch bedeutsamen *Almagest* und berechnete sehr genau trigonometrische und astronomische Tafeln, die in der üblichen Weise sexagesimal geschrieben waren. Er verfasste auch eine *Schrift über das Rechnen mit der sexagesimalen Tafel* (*kitāb al-ʿamal bil-ǧadwal as-sittīn*). Diese Angabe des Ibn al-Qifṭī (ed. Lippert S. 288) missverstand Suter⁽¹⁾, da er sich unter der sexagesimalen Tafel, die nichts anderes sein kann, als die von Kūšyār als "Sechzigertafel" (*ǧadwal as-sittīn*) bezeichnete 'sexagesimale Einmaleinstafel, eine trigonometrische oder astronomische Tafel vorstellte. Hier liegt der Schlüssel zu der Frage, wie Abul-Wafā' seine genauen Tabellen berechnete. Es ist sehr schade, dass uns diese Schrift nicht erhalten ist. Denn hier wäre vielleicht ein Hebel zur Lösung des Problems anzusetzen, ob etwa die reine Sexagesimalrechnung eine Neuschöpfung der islamischen Mathematiker ist.

Hat sie vielleicht Abul-Wafā', dieser erfindungsreiche Rechner, aus der trümmerhaften griechischen Sexagesimalrechnung neu geschaffen? Wer wollte das voreilig behaupten? Nur Quellenforschung kann

⁽¹⁾ H. Suter, *Die Mathematiker u. Astron. d. Araber*. Leipzig. 1900, S. 72. — Man beachte hier übrigens S. 66 Anm. c).

hier weiterhelfen. Der Titel von Kūšyār's Schrift über das Rechnen der Inder richtet unseren Blick auf die indische Mathematik. Aus dieser ist bisher keine Spur von reiner Sexagesimalrechnung bekannt geworden. Wie in der Algebra, so ist auch in der Rechenkunst mit der Möglichkeit einer nicht über Alexandrien gehenden Tradition von den Babyloniern etwa über die vorislamischen zu den islamischen Persern zu rechnen.

Zunächst ist noch in den Schriften Abul-Wafā's, seiner Zeitgenossen und Vorgänger zu forschen. Hier ein kleiner Beitrag: Abul-Wafā' verfasste eine *Schrift über das, was die Schreiber und die Rechner von der Wissenschaft des Rechnens nötig haben* (*kitāb fīmā yahtāǧ ilaihi 'l-kuttāb wal-'ummāl min 'ilm al-ḥisāb*) ⁽¹⁾. Woepcke hat aus dem Inhaltsverzeichnis der Leidener Handschrift, die von den 7 "Stationen" (*manāzil*) des Werkes nur die drei ersten enthält, die Kapitelüberschriften aller 7 Stationen übersetzt ⁽²⁾. Vom Inhalt der beiden ersten Stationen sagt er an einer anderen Stelle ⁽³⁾: "Les deux premiers livres forment un traité complet d'arithmétique pratique. On y trouve une théorie fort développée des fractions, de la conversion des nombres entiers et des fractions en quantités sexagènes et sexagésimales, de la multiplications des nombres entiers et des fractions" ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Bei einem Teil der in Leiden, Kairo, im Escorial und in Rampur befindlichen Handschriften ist noch unsicher, ob es sich um dasselbe Werk handelt.

⁽²⁾ *Journal asiatique* (5) 5, 1855, S. 246-251. Die Kapitelüberschriften lassen erkennen, womit sich die *kuttāb* und *'ummāl* zu befassen hatten, und hiernach ist bei den *'ummāl*, die Suter in seinem vorhin genannten Buche (S. 71) durch "Geschäftsleute" wiedergibt, wohl besonders auch an Steuer-einnehmer zu denken.

⁽³⁾ Fr. Woepcke, *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident*. Rom 1856, S. 53.

⁽⁴⁾ Dies ist eine der wenigen Stellen, an denen Woepcke im Vorbeigehen auf ein Kennzeichen der islamischen reinen Sexagesimalrechnung hinweist. Auch gelegentlich der Erörterung des Gebrauchs der indischen Ziffern erwähnt dieser Forscher die ganzen Sexagesimalzahlen: "... le calcul sexagésimal, de même qu'il avait subdivisé le degré en minutes, secondes, tierces, etc., avait conçu des ordres ascendants, supérieurs au degré, de sorte que, si on voulait, on n'était jamais obligé de dépasser, dans la notation, le nombre 59". (*Journal asiatique* (6) 1, 1863, S. 465). Auf die Sechzigertafel macht Woepcke in der in der vorhergehenden Fussnote angeführten Abhandlung (S. 70) ebenfalls aufmerksam, indem er zur Überschrift von Kapitel 3 der *Feinheiten* von Sibṭ al-Māridīnī bemerkt: "C'est la table de multiplication

Dieses Werk von Abul-Wafā' enthält zwar keine vollständige Darstellung der Sexagesimalrechnung, die ja eine Angelegenheit der Astronomen und nicht der Schreiber und Rechner war. Die Sechzigertafel wird nicht behandelt, und auch die von Woepcke erwähnte Verwandlung ganzer dekadischer Zahlen in ganze Sexagesimalzahlen, wie wir sie bei Kūšyār feststellten, habe ich in der Leidener Handschrift nicht entdecken können. Dennoch erscheint mir das, was hier an sexagesimaler Rechnung vorkommt, sehr bemerkenswert.

In der ersten Station werden die Brüche ausführlich und so eigenartig behandelt, dass zur genauen Untersuchung dieses Gegenstandes die Herausgabe des Textes mit Übersetzung und Erläuterungen erwünscht und lohnend erscheint. Hier sei nur angedeutet, dass verschiedene Darstellungen der Brüche, insbesondere auch Stammbruchsummen und Sexagesimalbrüche vorkommen, und dass der Verfasser in ihrer Art erschöpfende Tabellen für die Umrechnung der einen Form in die andere darbietet. Ich begnüge mich damit, vier von den vielen Tabellen, deren Zahlen in Worten geschrieben sind, zu übersetzen. Von den Zwecken, zu denen der Verfasser sie verwandt wissen will, sei nur gesagt, dass die vierte Tabelle ebenso wie die babylonischen Reziprokentabellen dazu dienen soll, Divisionen als Multiplikationen auszuführen. Gibt man der ersten Spalte dieser Tabelle die Überschrift n , so muss die zweite die Überschrift $\frac{60}{n}$ erhalten. Die beiden ersten Tabellen

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
30	20	15	12	10	6	$8\frac{4}{7}$	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$

gehören zusammen. Ihre erste Zeile bilden die *Häupter* (*ru'ūs*).

sexagésimale". Ausser bei Woepcke und Carra de Vaux (*Bibliotheca Mathematica* (2) 13, 1899, S. 33-36), der durch Woepcke auf Sibṭ al-Māridīnī aufmerksam wurde, ist mir nur bei E. Wiedemann (*Beitr. z. Gesch. d. Naturw.* XIV, S. 20-21, Sonderabdr. aus d. *Sitzgsber. d. Phys.-Med. Soc. in Erlangen* 40, 1908) ein Hinweis auf die islamische reine Sexagesimalrechnung begegnet. Wiedemann weist in al-Bīrūnī's *Chronologie* (Text v. Sachau S. 135 u. 137, Übers. S. 132 u. 133) ganze Sexagesimalzahlen nach und beschreibt eine Sechzigertafel, ohne aber ihre Bedeutung als Einmaleinstafel zu würdigen.

Von der dritten und vierten Tabelle gebe ich nur Ausschnitte.
Die erste Spalte der dritten Tabelle ist die geordnete Folge

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$$

aller echten, nicht kürzbaren Brüche $\frac{m}{n}$ für $n = 3, 4, \dots, 10$.

$\frac{2}{3}$	40	$\frac{2}{3}$	2	30
$\frac{3}{4}$	45	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	3	20
$\frac{2}{5}$	24	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$	4	15
...	...	...	...	...
$\frac{2}{7}$	$17\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$	7	$8\frac{4}{7}$
...	...	...	8	$7\frac{1}{2}$
...	...	...	...	...
$\frac{4}{9}$	$26\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	42	$1\frac{3}{7}$
...	...	...	45	$1\frac{1}{3}$
			48	$1\frac{1}{4}$
			49	$1\frac{1}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7}$
			...	...
			120	$\frac{1}{2}$

In der vierten Tabelle, die der Verfasser dem Gedächtnis einzu-
prägen empfiehlt, durchläuft die Zahl der ersten Spalte von den
Zahlen von 2 bis 120 alle diejenigen, die keine anderen Primfaktoren
als 2, 3, 5, 7 besitzen.

Hier sieht man eine grossartige Vereinigung von Formen der
Bruchrechnung vollzogen, die eine lange Vorgeschichte und örtlich
verschiedene Herkunft haben. Die Tabellen erinnern uns sowohl an

die altägyptischen Stammbruchsummen wie an die babylonischen Reziprozentafeln. Eine gründliche Prüfung dieses und anderen Materials wird erforderlich sein, um der Entscheidung näher zu kommen, wie die Fäden von der ältesten orientalischen Rechenkunst bis zur arabischen gelaufen sein mögen.

Von den mancherlei uns erhaltenen arabischen Schriften, die durch ihre Titel den Wunsch nach Untersuchung ihres auf Sexagesimalrechnung bezüglichen Inhalts erwecken, nenne ich hier zwei:

1. *Das Buch der Vollendung über das Rechnen* (*kitāb at-takmilat-il-ḥisāb*, Istanbul, Lafeli 2708, ₁), das den 1037 verstorbenen 'Abdalqāhir b. Tāhir al-Baġdādī zum Verfasser hat. Krause gibt in seinem Verzeichnis (S. 474) an, dass der dritte der sieben Teile des Werkes die Überschrift hat: *Darlegung der Kenntnis der Vorschriften des Verfahrens bei der Rechnung der Grade, Minuten und dem, was in dieser Richtung liegt*.

2. Eine Schrift von Abū Naṣr, der, wie Or 17 (1948) S. 510 erwähnt, ebenfalls um das Jahr 1000 lebte. Sie führt nach einem von seinem Schüler al-Bīrūnī angelegten Verzeichnis (¹) den Titel *Lehrbrief über die Minutentafel* (*risāla fī ḡadwal ad-daḡā'iq*) und ist uns in zwei Handschriften erhalten (Bodl. I, 940, ₆; Bankipore 2468, ₁₄, vgl. Katalog 22 S. 70).

Neben der reinen Sexagesimalrechnung, deren Anwendung wohl auf astronomische Kreise beschränkt blieb, gab es eine unreine und uneigentliche. Sie rechnete nicht mit ganzen Sexagesimalzahlen, sondern nur mit Sexagesimalbrüchen und bediente sich nicht der Sechzigertafel. Um z. B. zwei Sexagesimalbrüche miteinander zu multiplizieren, verwandelte man jeden in Einheiten der niedrigsten Sexagesimalstelle, also den einen etwa in lauter Sekunden und den anderen in lauter Terzen. Man multiplizierte dann die erhaltene dekadische Zahl der Sekunden mit der erhaltenen dekadischen Zahl der Terzen und erhielt das Produkt als dekadische Zahl der Quinten, die dann in einen aus Quinten, Quarten usw. bestehenden Sexagesimalbruch zurückverwandelt wurde. Diese schwerfälligen Operationen finden wir in den gewöhnlichen Darstellungen des indischen Rechnens behandelt, so bei an-Nasawī und im ersten Teile von Kūṣyār's Rechenbuch, an das an-Nasawī sich stark anlehnt. Allerdings kommen bei Kūṣyār im ersten Teil an einer Stelle Erhöhte vor. Sie treten als Ergebnis

(¹) Vgl. al-Bīrūnī, *Chronologie orientalischer Völker*, herausgeg. von E. Sachau, Leipzig 1878, Neudruck Leipzig 1923, S. XXXVII.

der Division auf, wenn die höchste Stelle des Divisors von niedrigerem Grade als die des Dividenden ist, also z. B. bei der Division von Graden durch Quartan. Der Verfasser erklärt hier, was Erhöhte sind und verwandelt sie in dekadisch ausgedrückte Grade.

Selbst ein Astronom wie al-Bīrūnī vollzieht die sphärischen Rechnungen mit Sexagesimalbrüchen in seinem Werk über geographische Ortsbestimmung, dem *Tahdīd* (Fatih 3386), nach dieser unbeholfenen und unreinen Methode und bereitet dem, der diese zahlreichen Rechnungen in allen ihren Schritten nachprüft, viel Arbeit. Dass al-Bīrūnī so rechnete, aber seinen Lehrer Abū Naṣr veranlasste, über die "Minutentafel" — das dürfte die Sechzigertafel sein — eine Schrift zu verfassen, legt die Vermutung nahe, dass die reine Sechzigerrechnung, von Abul-Wafā' ausgehend, damals Raum gewann. Auch zu der von Abul-Wafā' ausgehenden neuen Kugeldreiecksrechnung nahm Abū Naṣr in einer im Namen al-Bīrūnī's geschriebenen Abhandlung Stellung, wie wir Or 17 (1948), 510 sahen. In einer Tabelle seiner Chronologie gibt al-Bīrūnī grössere ganze Zahlen zwecks sicherer Festlegung auch rein sexagesimal an.

Von den meisten der ältesten in arabischer Sprache geschriebenen Rechenbücher sind uns leider nur die Titel und die Namen ihrer Verfasser erhalten. Unser Blick richtet sich mit besonderer Spannung auf die Schrift *Algoritmi de numero Indorum* ⁽¹⁾ und den *Liber Algorismi*, der in einer Handschrift dem Johannes von Sevilla zugeschrieben wird ⁽²⁾. Den ersten dieser beiden Traktate erklärte Woepcke ⁽³⁾ mit guten Gründen für eine Übersetzung eines Rechenbuches von al-Hwārizmī, und der zweite steht in engem Zusammenhang mit dem ersten. Beide führen die von ihnen dargebotene Sexagesimalrechnung ausdrücklich auf die Inder zurück (S. 17, Z. 8 v. u. ff., S. 49, Z. 4 v. u. ff.). In beiden sind die Sexagesimalbrüche wie bei Kūṣyār und an-Nasawī vertikal in indischen Ziffern geschrieben. Beide lehren aber diejenige Art der Sexagesimalbruchrechnung, die wir soeben als unreine und uneigentliche gekennzeichnet haben, und von ganzen Sechzigerzahlen und Sechzigertafel sagen sie nichts.

⁽¹⁾ *Trattati d'aritmetica* pubbl. da B. Boncompagni, Rom 1857, S. 1-23: I, *Algoritmi de numero Indorum*.

⁽²⁾ *Trattati*, S. 25-136: II, *Ioannis Hispalensis liber Algorismi de practica arismetrice*.

⁽³⁾ S. die S. 174, Anm. 3 zitierte Schrift, S. 17-19.

Nach Behandlung der Multiplikation zweier Sexagesimalzahlen gemäss dem Verfahren der Zurückführung auf dekadische Multiplikation heisst es jedoch in der ersten Schrift (S. 19, Z. 1 v. u.): "et est ei alius modus breuior: set hic ordo est, quo usi sunt indi, super quem figurare numerum suum".

War dieser andere, kürzere Multiplikationsmodus, den al-Hwārizmī kennt, aber neben dem von ihm dargestellten indischen nicht mitteilt, etwa das Verfahren der reinen Sexagesimalrechnung? Sicher ist das nicht. Man kann auch an das Verfahren des Theon von Alexandrien denken, der zwar jede Sexagesimalstelle des einen Faktors mit jeder Sexagesimalstelle des anderen Faktors multipliziert, die Teilprodukte aber in dekadischer Form ausrechnet und niederschreibt, und erst bei ihrer Addition zur sexagesimalen Schreibweise, aber nur der Bruchstellen, übergeht. Besonders nahe kommt Theon der reinen Sexagesimalrechnung bei einer im vierten und einer im neunten Buch seines Kommentars zum Almagest ausgeführten Division. Den Mangel, der darin liegt, dass ihm die ganzen Sechzigerzahlen fehlen, umgeht er hier künstlich, und die ihm ebenfalls fehlende Sechzigertafel ersetzt er durch einen für den vorliegenden Zweck hergestellten unvollkommenen Behelf.

Woepcke erklärte die reine islamische Sexagesimalrechnung, insbesondere die Einführung der ganzen Sexagesimalzahlen, für eine spätere Vervollkommnung, deren Anfänge sich bei Theon befinden⁽¹⁾. Er verweist dabei auf das erste der beiden von uns genannten Divisionsbeispiele Theons. Aber können wir, die wir um das vorgriechische Rechnen mit Sexagesimalzahlen von relativem Stellenwert unter Verwendung von Produktentabellen wissen, dieser Annahme ohne weiteres folgen?

Die reine Sexagesimalrechnung lässt sich auch in der späteren islamischen Mathematik feststellen. In den İlhānischen Tafeln von at-Tūsī (1201-74) kommen Erhöhte, also ganze Sexagesimalzahlen vor⁽²⁾. Näheres darf man aus der Untersuchung seiner beiden uns erhaltenen Rechenbücher erhoffen. Das eine derselben: *Zusammenfassung des Rechnens mit Tafel und Staub* (Verzeichnis von Krause, S. 496) bringt im dritten Kapitel zwei Arten der Bruchrechnung nach dem Verfahren der Astronomen, nämlich erstens "ihr Verfahren vermittle der Rechnung der Inder" und zweitens "ihr Verfahren vermittle der Ġummal-

⁽¹⁾ *Journal asiatique* (6) 1, 1863, S. 466.

⁽²⁾ Vgl. C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... al-Bīrūnī*. Hannover 1927, S. 108.

rechnung". Das andere ist persisch geschrieben, heisst *Schrift über die Multiplikation und die Division* (Krause S. 497) und handelt im dritten Buche "über die Rechnung der Grade und Minuten".

In reifer, vollendeter Form finden wir die reine Sexagesimalrechnung angewandt und dargestellt bei Ġamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī, einem der Gelehrten um Uluġ Beg. In seinem 1427 abgeschlossenen *Schlüssel der Rechner* (*Miftāḥ al-ḥissāb*), einem Lehrbuch des Rechnens und der praktischen Geometrie, das ich eingehend untersucht habe ⁽¹⁾, bringt er im dritten Buch das Rechenverfahren der Astronomen, d. i. das Rechnen mit Sexagesimalzahlen. Die hier gelehrten Rechenoperationen und ihre Ausführungsformen entsprechen denjenigen, die er im ersten Buche für das dekadische Rechnen mit ganzen Zahlen ausführlich mitgeteilt hat. (Das zweite Buch behandelt die Bruchrechnung.) Um einen Einblick in seine Sexagesimalrechnung zu geben, begnüge ich mit der Wiedergabe einer der Formen, in der er die Multiplikation zweier Sexagesimalzahlen auszuführen lehrt. Nachdem er (Leiden Nr. 185 Gol., 38a) das Vorgehen allgemein beschrieben hat, bringt er als Beispiel die

Multiplikation von

20 42 35 Sekunden (ثانية) mit 55 26 48 40 Minuten (نه كوسم م دقيقة).

ح ح سو ح	18	8	16	13				
ك م ح ك		20	40	0	20			
ح ح ح ح			38	18	33	28		
ل ب ل و ح				30	12	36	0	
ل ب ح ح					32	15	28	23
ه و ح ك						5	10	0 20
ط ح ر ك ب ك ك	19	8	17	20	2	23	20	
مثالث	Dreimal							
مثنى	Zweimal							
مرة	Erhöhtes							
دقيقة	Grad							
ثانية	Minuten							
ثالثة	Sekunden							
	Terzen							

(1) S. oben S. 166, Anm 1.

Die äussere Form der Rechnung ist ganz anders als bei Kūšyār. Die Stellen einer Sexagesimalzahl werden in Ġummalziffern mit fallendem Stellenwert von rechts nach links nebeneinander geschrieben. Bezeichnen wir wie oben (S. 165) die in einer Stelle einer Sexagesimalzahl stehende, der Menge 0, 1, 2, ..., 59 angehörige Zahl als 'Sexagesimalziffer', so kommt durch die verbundene Schreibung der Ġummalzeichen auch bei denjenigen dieser Sexagesimalziffern, deren Schriftbild aus zwei Buchstaben zusammengesetzt ist, mehr oder weniger der Eindruck eines einzigen Zifferzeichens zustande, wie z. B. bei $\text{𐤆} = 13$. Der absolute Stellenwert wird bei einer im laufenden Text vorkommenden Zahl durch Angabe des Stellenwertes der niedrigsten Stelle gekennzeichnet. *20 42 35 Sekunden* bedeutet also *20 Grad 42 Minuten 35 Sekunden*. In Rechnungen und Tabellen pflegt al-Kāšī aber die Stellenwerte über, oder, wie hier, unter den Spalten anzugeben. Für "zweimal Erhöhtes", "dreimal Erhöhtes" usw. sehen wir hier neue, neben den alten aufgekommene Kunstwörter (مثالث, مثاني usw.) angewandt. Die Übersetzung gebe ich in unseren Ziffern und in der bei uns wie bei den Griechen üblichen rechtsläufigen Niederschrift der Sexagesimalzahlen, bei der die höchste Stelle links steht.

Da nicht mehr auf der Staubtafel gerechnet wird, können Ziffern nicht ausgelöscht und durch ein neues Zwischenergebnis oder ein Endergebnis ersetzt werden: jedes Teilergebnis ist niedergeschrieben und nachprüfbar.

Dem Wesen nach rechnet aber al-Kāšī noch fast genau so wie Kūšyār. Er multipliziert die Stellen des einen Faktors nacheinander mit jeder Stelle des anderen, wobei jedes der entstehenden Teilprodukte als Produkt zweier Sexagesimalziffern aus der wie bei Kūšyār eingerichteten Sechzigertafel entnommen wird, soweit der Rechner es nicht durch Kopfrechnung findet oder auswendig weiss. Zuerst multipliziert er die höchste Stelle 20 des ersten Faktors mit den einzelnen Stellen des zweiten Faktors 55 26 48 40, bei der höchsten beginnend. In der Sechzigertafel liest er aus der Spalte mit der Kopfszahl 20 die Teilprodukte $20 \cdot 55 = 18\ 20$, $20 \cdot 26 = 3\ 40$, $20 \cdot 48 = 16\ 0$, $20 \cdot 40 = 13\ 20$ ab. (Man findet diese auch im Kopf, da der Multiplikation mit 20, vom Stellenwert abgesehen, eine Division durch 3 gleichkommt.) Diese Teilprodukte schreibt er nacheinander in zwei Zeilen gestaffelt nieder, wie es aus dem Rechenbild zu ersehen ist, dessen beide ersten Zeilen wir hier wiederholen, indem wir das erste Teilprodukt durch Umrahmung kennzeichnen:

18	8	16	13
20	40	0	20

An diese Teilprodukte schliessen sich diejenigen der zweiten Stelle 42 des ersten Faktors mit den einzelnen Stellen des zweiten Faktors an. So entsteht im Rechenschema die zweite Doppelzeile, deren erstes Teilprodukt $42 \cdot 55 = 38\ 30$ um eine Stelle (im Urtext nach links, in der Übersetzung nach rechts) einzurücken ist. Erst nachdem alle 12 Teilprodukte niedergeschrieben sind, vollzieht al-Kāṣī die Addition, während wir Kūṣyār im Verlaufe der Staubtafelrechnung fortwährend Teiladditionen vornehmen sahen. Zur Bestimmung des Stellenwertes der niedrigsten Stelle des Produktes aus den Stellenwerten der niedrigsten Stellen der Faktoren dient eine Hilfsstafel, die im wesentlichen ebenso wie bei Kūṣyār angelegt ist.

Zur Nachprüfung der Rechnung bedient sich al-Kāṣī der 59-er Probe, die das Gegenstück der Neunerprobe der dekadischen Rechnung ist. Für das soeben wiedergegebene Beispiel würde diese Probe, wenn wir uns der Kürze halber moderner Ausdrucksweisen bedienen, so lauten:

$$20 + 42 + 35 \equiv 38 \pmod{59}, \quad 55 + 26 + 48 + 40 \equiv 51 \pmod{59}, \\ 19 + 8 + 17 + 20 + 2 + 23 + 20 \equiv 50 \pmod{59}, \quad 38 \cdot 51 \equiv 50 \pmod{59}.$$

Zu jeder seiner Rechnungsmethoden in ganzen dekadischen Zahlen gibt al-Kāṣī als Gegenstück die Ausführung mit ganzen Sexagesimalzahlen. Bemerkenswert sind in dieser Hinsicht seine Wurzelausziehungen. Er zieht sowohl dekadisch wie sexagesimal Wurzeln zweiten, dritten und höheren Grades nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren in einer Weise aus, die noch die Herkunft aus der Staubtafelrechnung verrät und deshalb zwar äusserlich, aber nicht wesentlich verschieden von der modernen Ausführungsart dieses Verfahrens ist. Er lehrt aber auch die Ausziehung solcher Wurzeln auf Grund des binomischen Lehrsatzes, den er für beliebige ganze positive Exponenten formuliert. An anderer Stelle ⁽¹⁾ habe ich al-Kāṣī's und anderer islamischer Mathematiker Methoden zur Ausziehung der Wurzeln und seine Lehre vom binomischen Lehrsatz und den Binomialkoeffizienten, deren Anordnung in Form des sogenannten Pascalschen Dreiecks er nach eigener Erklärung von seinen Vorgän-

⁽¹⁾ Vgl. S. 166, Anm. 2.

gern übernommen hat, ausführlich dargestellt. Den abendländischen Mathematikhistorikern blieb das Vorkommen des binomischen Lehrsatzes in der islamischen Mathematik bisher fast unbekannt. Erst nach dem Studium al-Kāšī's bemerkte ich den Hinweis, den der Tübinger Mathematiker und Mathematikhistoriker H. Hankel (1839-1873) ⁽¹⁾ auf einen Artikel von J. Tytler ⁽²⁾ gab. In diesem Artikel wird das Auftreten des binomischen Lehrsatzes bei al-Kāšī und dem anscheinend von al-Kāšī abhängigen Muḥammad Bāqir Zainal'ābidīn al-Yazdī (Anfang des 17. Jahrh.) mitgeteilt.

An die Methoden der Wurzelausziehung, d. h. die Methoden der numerischen Auflösung der reinen Gleichungen, schliessen sich in natürlicher Weise die Methoden der numerischen Auflösung der gemischten Gleichungen an. Eine hervorragende Leistung al-Kāšī's auf diesem Gebiet, die in überaus genauer sexagesimaler Rechnung nach einem geschickten Iterationsverfahren vollzogene Auflösung der kubischen Gleichung für eine Winkeldreiteilung hat Hankel (S. 289-293) gebührend gewürdigt. Da Hankel nur aus einer sekundären Quelle schöpfen konnte, habe ich mich bemüht, auf Grund eines ursprünglicheren und ausführlicheren Berichts in einer Handschrift (Kairo¹ V, S. 210) das Verfahren al-Kāšī's darzustellen und zu erläutern. Zugleich suchte ich nach al-Kāšī's Vorbildern, als welche al-Bīrūnī's numerische Auflösungen kubischer Kreisteilungsgleichungen und al-Bīrūnī's Behandlung der Winkeldreiteilung in Frage kommen. Der so entworfene Beitrag zur Geschichte der numerischen Auflösung gemischter Gleichungen im Mittelalter — auch Leonardo Pisanos unter arabischem Einfluss numerisch gelöste kubische Gleichung gehört hierher — bedarf der Ergänzung durch eine Arbeit, die die chinesischen Lösungsmethoden gemischter Gleichungen aus den Quellen darstellt ⁽³⁾.

Wie gross sein Geschick und seine Übung in der Sexagesimalrechnung ist, zeigt al-Kāšī in seinem *Lehrbrief über den Kreisumfang* (*ar-risāla al-muḥīṭiyya*), den ich nach dem in Berlin (Mss.

⁽¹⁾ H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1874, S. 269.

⁽²⁾ J. Tytler, *Essay on the Binomial Theorem; as known to the Arabs*, Communicated by R. Tytler, *Asiatic Researches* 13, Calcutta 1820. S. 456-466.

⁽³⁾ Die in japanischer Sprache veröffentlichten Arbeiten von M. Fujiwara, *Miscellaneous Notes on the History of Chinese Mathematics*, *Tōhoku Math. Journ.* 46, 1940, S. 295-308; 47, 1940, S. 35-48; S. 49-57 lernte ich nur aus dem Bericht im *Zentralbl. f. Math.* 23, 1941, S. 195 kennen.

simul. or 60) befindlichen Photogrammen der Handschrift des Stambuler Armeemuseums übersetzt und ausführlich erläutert habe ⁽¹⁾. Auf Grund eines flüssigen elementargeometrischen Verfahrens, das, modern trigonometrisch gesprochen, auf die immer wiederholte Anwendung einer Halbwinkelformel hinausläuft, bestimmt al-Kāšī durch eine Folge von übersichtlichen sexagesimalen Tabellenrechnungen den Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen und eines ihm umbeschriebenen regelmässigen Vielecks von $3.2^{28} = 800335168$ Seiten und schliesst damit den Kreisumfang in viel engere Grenzen ein als irgend einer seiner Vorgänger. Er erhält so für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Halbmesser den in allen niedergeschriebenen Sexagesimalstellen richtigen Wert

$$2\pi = 6.16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50.$$

Um dieses Ergebnis auch für Leute nutzbar zu machen, die nicht wie die Astronomen seiner Zeit mit Sexagesimalzahlen umgehen können, kommt er auf den Gedanken, diese Sexagesimalzahl in eine Dezimalzahl zu verwandeln. Er gibt Anleitungen, mit dem von ihm richtig berechneten und im dezimalen Positionssystem geschriebenen Wert

$$2\pi = 6.28318\ 53071\ 795865$$

zu gegebenen Halbmessern die Umfänge und zu gegebenen Umfängen die Halbmesser zu berechnen und erweist sich hierbei nach unseren bisherigen Kenntnissen als der erste unter den Erfindern der Dezimalbrüche, (*al-kusūr al-a'sārīya*), der Vorschriften zu deren Schreibung im Positionssystem und zum praktischen Rechnen mit ihnen gab. Er nimmt die Einführung dieser Brüche als eigene Leistung in Anspruch und sagt, dass er nach Analogie der Sexagesimalzahlen, bei denen es eine aufsteigende Kette (*silsila*) der Ganzen und eine absteigende Kette der Brüche gebe, auch bei den indischen Zahlen eine absteigende Kette der "Zehntel" (*a'sār*), "Dezimalsekunden" (*ṭānī al-a'sār* = zweites der Zehntel), d. h. Hundertstel usw. einführe

In Rechnungen kennzeichnet er bei den Dezimalzahlen den Stellenwert wie bei Sexagesimalrechnungen durch Über- oder Unterschriften der Spalten, zuweilen aber auch dadurch, dass er, wenn

⁽¹⁾ Der Lehrbrief über den Kreisumfang (*ar-risāla al-muḥīṭīya*) von Ḡamṣūd b. Ma'sūd al-Kāšī. Übersetzt und erläutert von P. Luckey. 112 Seiten Maschinenschrift, 1943, unveröffentlicht.

Ganze und Bruchstellen vorkommen, die Ganzen von den Bruchstellen durch einen Strich trennt.

Aus der Zahl der zum Teil umfangreichen Dezimalbruchrechnungen al-Kāšī's gebe ich ein kleines Beispiel, das zugleich zeigt, welches Verständnis dieser oft so überaus genau rechnende Mathematiker auch für abgekürzte Rechnungen hat. Er sagt (19 b), um den Umfang eines Kreises vom Halbmesser $127 \frac{1}{2}$ Ellen zu finden, reiche es aus, folgendermassen zu rechnen ⁽¹⁾.

٥	٦	٢	٨	٣	٢	١	الصحاح
	١	٢	٧	٦	٦	٢	
		٢	٣	٩	٨	٥	
			٢	١	٢	٧	الكسور
٥	٨	٥	١	١	٥		
الصحاح			الكسور				

0	6	2	8	3	2	1	Ganze
	1	2	5	6	6	2	
		4	3	9	8	7	
			3	1	4	5	Bruch
0	8	0	1	1	0		
Ganze				Brüche			

Im wesentlichen wird man heute die abgekürzte Multiplikation

$$127,5 \text{ Ellen mal } 6,2832 = 801,15 \text{ Ellen}$$

genau so ausführen.

In dem nach der *Muḥīṭiyya* erschienenen *Schlüssel der Rechner* kommt al-Kāšī auf die Dezimalbrüche zurück. Er behandelt unter anderem die Verwandlung ganzer und gebrochener sexagesimaler Zahlen in dezimale und umgekehrt. Auch die Ergebnisse mit gegebenen Masszahlen gestellter geometrischer Aufgaben drückt er mit Hilfe von Dezimalbrüchen aus.

Bekanntlich findet man den Gedanken, dass an die Stelle der den Sexagesimalbrüchen zugrunde liegenden Zahl 60 auch eine andere Grundzahl treten könne, im Mittelalter vereinzelt theoretisch

⁽¹⁾ Das in der Textwiedergabe Überstrichene und in der Übersetzung kursiv Geschriebene ist in der Handschrift rot geschrieben. In der Handschrift erscheint nur der die Einer von den Zehnteln trennende wagrechte Gitterstrich kräftiger als die übrigen.

ausgesprochen. Der Begriff der Dezimalbrüche wurde am deutlichsten etwa 70 Jahre vor al-Kāšī von Immanuel Bonfils aus Tarrascon entwickelt⁽¹⁾, von dem al-Kāšī nichts zu wissen scheint. Dass Bonfils den Gedanken aber praktisch im Positionssystem durchgeführt hätte, ist nicht bekannt.

Übrigens zeigt al-Kāšī neben der Kunst, umfangreiche Rechnungen in übersichtlicher tabellarischer Form anzulegen, die Fähigkeit, seine Gegenstände lebendig und mit didaktischen Geschick darzustellen. Um die Genauigkeit seiner Kreisberechnung zu veranschaulichen, sagt er an der Spitze des Lehrbriefs über den Kreisumfang, er wolle so genau rechnen, dass bei einem Kreis, dessen Durchmesser 600 000 Erddurchmesser beträgt, der Fehler weniger als die Dicke eines Haars ausmacht, die ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns ist. Er rechnet dann vor, auf wieviel Sexagesimalstellen 2π zu berechnen ist, um diese populär formulierte Genauigkeitsforderung zu erfüllen. In derselben Schrift bringt er für die Ziffernfolge der sexagesimalen Entwicklung von 2π einen arabischen Merkvers, für diejenige der dezimalen einen arabischen und einen persischen. Damit erweist er sich als Vorläufer der Dichter, die später im Abendlande die Zahl π in mehr oder weniger schönen Merkversen besungen haben.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob al-Kāšī in seiner Sexagesimalrechnung von Šihābaddīn abhängt, der unter dem Namen Ibn al-Mağdī bekannt ist und von 1365 bis 1447 lebte, oder ob umgekehrt Ibn al-Mağdī von al-Kāšī abhängt. Ibn al-Mağdī stand im 62. Lebensjahre, als al-Kāšī's *Schlüssel* erschien. Seine Schrift über die Sexagesimalrechnung hat den Titel *Enthüllung der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten* und ist uns in Oxford und Algier erhalten. Dieses Werk, das ich noch nicht einsehen konnte, hat für uns besonderes Interesse, da der Verfasser in ihm ausführliche Hinweise auf das Verfahren der Vorgänger gibt. Wir erfahren das aus der Schrift seines Schülers Sibṭ al-Māridīnī (1423-1506) über die Sexagesimalrechnung *Feinheiten der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten*, ein Werk, über dessen Inhalt ich in meiner Abhandlung über die Rechenkunst bei al-Kāšī berichtet habe. Auch auf die späteren arabischen Schriften über Sex-

⁽¹⁾ S. Gandz, *The Invention of the Decimal Fractions and the Application of the Exponential Calculus by Immanuel Bonfils of Tarrascon (c. 1350)*. *Isis* 25, 1936, S. 16-45.

gesimalrechnung kann ich hier nicht eingehen. Aus dem Werk des Sibṭ al-Māridinī sei aber hier eine Anweisung zur Kennzeichnung des absoluten Stellenwertes wiedergegeben: "Du musst aber die Stelle der Grade durch ein Zeichen (*ʿalāma*) markieren, wenn bei ihnen Erhöhtes steht, und wenn der Name der letzten der Stellen vermerkt wird, so ist das gut". (Gotha 1390, 4b 10-20).

AL-KĀSHĪ'S ITERATION METHOD FOR THE DETERMINATION OF $\sin 1^\circ$.

By ASGER AABOE

1. The subject of the present paper, an algorithmic method of solving a special cubic equation, stems from the construction of trigonometric tables to be applied in astronomical computations. A central problem in this construction is that of determining $\sin 1^\circ$. The standard Islamic method¹ for approximating $\sin 1^\circ$, which in its essential part goes back to Ptolemy,² proceeded from certain inequalities which, however, themselves set a limit to the accuracy of the result. In order to obtain better approximations by these procedures one would have to perform unreasonably long computations. Ptolemy was well aware of the shortcoming of his method and deploras that the chord of the third of an arc with known chord cannot be found by means of geometrical construction ($\delta\iota\alpha\ \tau\omega\nu\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\omega\nu$), stating that otherwise one could find $\text{crd } 1/2^\circ$ from the known $\text{crd } 1 1/2^\circ$.³

However, the Iranian astronomer and mathematician Jamshīd Ghiāth ud-Dīn al-Kāshī (d. 1429⁴) set up the trisection equation and succeeded in devising an ingenious method to solve it which yields $\sin 1^\circ$ with any desired accuracy. Al-Kāshī was an eminent computer as is witnessed by his works, in particular his computation of 2π to 10

¹ See f. ex. L. Sédillot, *Prolégomènes des tables astr. d'Olong-Beg* (Paris, 1853), p. 75 ff.

² *Almagest*, I, 10, IV, see f. ex. K. Manitius: *Des Cl. Ptolemæus Handbuch der Astronomie*, I (Leipzig, 1912), p. 32 ff.

³ *Ibid.*, p. 32-33.

⁴ According to a marginal note on the last folio of the India Office copy (MS 430, Ethé 2232) of al-Kāshī's astronomical tables, the *ṣij-i Khāqānī*. Dr. E. S. Kennedy, who is preparing an edition of this work, has kindly given me this new date, for which I wish to thank him as well as for his explanation of Sédillot's misreading and his translation of the marginal glosses from the *ṣij-i Khāqānī* which appear in sec. 5 of this paper. The text is available through the courtesy of India Office, London.

⁵ (a) P. Luckey, "Der Lehrbrief über den Kreisumfang . . . von . . . al-Kāshī," herausgeg. v. A. Siggel, *Abh. d. deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin, Kl. f. Math. u. allg. Nat.*, Jg. 1950 Nr. 6 (Berlin, 1953).

For other works of al-Kāshī see:

(b) P. Luckey, *Math. Annalen*, 120. Bd., 1948, p. 217-274.

(c) P. Luckey, "Die Rechenkunst bei . . . al-Kāshī . . .," *Abh. f. die Kunde des Morgenlandes*, v. XXXI, 1 (Wiesbaden, 1950).

correct sexagesimal, or 17 correct decimal, digits⁵—he gives both representations, the consistent use of decimal fractions being an invention of his.⁶

The method is described by Miriam Chelebi⁷ (d. 1524/25), a grandson of ar-Rūmi,⁸ al-Kāshī's successor as director of the observatory at Samarkand, in his commentary to the tables of Ulugh Beg.⁹ It has been treated by Woepcke,¹⁰ who rather obscures its structure by employing infinite series in his discussion, by Hankel,¹¹ who undoubtedly understood the method, but fails to justify it, and who does not compute sexagesimally, and by Braunmühl,¹² who follows Hankel.

2. In the following all numbers will be written in the sexagesimal system, unless otherwise stated, the digits being separated by commas and the integral and fractional parts by semicolons, e. g., 1,58; 0,32 means $1.60 + 58 + 0.60^{-1} + 32.60^{-2}$.

Furthermore, the sine function of an arc A used in Islamic astronomy—we shall denote it by Sin A—is $1,0 \cdot \sin A$, thus exhibiting the same sequence of sexagesimal digits as $\sin A$ but with the semicolon moved one place to the right, or Sin A is $\sin A$ "once elevated" as it is called. Sin A is therefore the length of half the chord of the arc 2A measured with a unit which is 0;1 times the radius of the circle.

Our method proceeds from the identity:

$$\sin 3A = 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A,$$

or rather:

$$\text{Sin } 3A = 3 \cdot \text{Sin } A - 0; 0,4 \cdot \text{Sin}^3 A,^{13}$$

or specially:

$$\text{Sin } 3^\circ = 3 \cdot \text{Sin } 1^\circ - 0; 0,4 \cdot \text{Sin}^3 1^\circ.$$

$\text{Sin } 3^\circ = \text{Sin } (18^\circ - 15^\circ)$ can be determined with any desired accuracy by operations the most complicated of which is extraction of

(d) E. S. Kennedy, "A Fifteenth Cent. Lunar Eclipse Computer," *SCRIPTA MATH.*, v. XVII, 1951, p. 91-97.

(e) E. S. Kennedy, "An Islamic Computer for Planetary Latitudes," *Journ. Am. Or. Soc.*, v. 71, 1951, p. 13-21.

⁵ See f. ex. Luckey, *loc. cit.* (in note 5(a)), Vorwort des Verfassers.

⁷ H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig, 1900), p. 188.

⁸ *Ibid.*, p. 174.

⁹ Sédillot, *loc. cit.* (in note 2), p. 77-83.

¹⁰ F. Woepcke, *Journ. de Math. pure et appl.*, Tome XIX, 1854, p. 153-176 and p. 301-303.

¹¹ H. Hankel, *Zur Geschichte d. Math. in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), p. 289-293.

¹² A. v. Braunmühl, *Vorl. u. Geschichte der Trigonometrie*, I (Leipzig, 1900), p. 72-75.

¹³ For the derivation of this formula, or its equivalent, see Sédillot, *loc. cit.* (in note 2), p. 81 ff.

square roots. The problem of finding $\sin 1^\circ$ therefore reduces to that of solving the cubic equation:

$$\sin 3^\circ = 3 \cdot x - 0;0,4 \cdot x^3$$

or:

$$x = \frac{x^3 + 15,0 \cdot \sin 3^\circ}{45,0}.$$

Substituting the previously found value for $\sin 3^\circ$, namely $3;8,24,33,59,34,28,15$ (Chelebi has erroneously $3;8,24,33,59,32,28,15^{14}$), we get:

$$x = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}. \quad (1)$$

x must be less than 1,0—indeed we know from cruder methods¹⁵ that $\sin 1^\circ \sim 1;2, \dots$ —so let $x = a_1; a_2, a_3, \dots$. Using but the fact that x must satisfy (1) we now proceed to determine the a 's successively. We have:

$$a_1; \dots = \frac{a_1; \dots^3 + 47,6; \dots}{45,0}.$$

However, if we are interested only in the integral part a_1 of the solution it seems plausible that we can disregard $a_1; \dots^3 \sim 1$ since we have to divide it by 45,0. Postponing for the moment the accurate justification of this—or rather the similar steps below—we obtain:

$$a_1; \dots = \frac{47,6; \dots}{45,0}.$$

This division gives the quotient 1 and the remainder $r_1 = 2,6;8,29, \dots$. Thus $a_1 = 1$. We now have:

$$1; a_2, \dots = \frac{1; a_2, \dots^3 + 47,6;8, \dots}{45,0}$$

or:

$$0; a_2, \dots = \frac{1; a_2, \dots^3 + 2,6;8, \dots}{45,0} = \frac{1; a_2, \dots^3 + r_1}{45,0}.$$

Since we now are concerned with the first place after the semicolon we can replace $1; a_2, \dots^3$ by 1^3 and obtain:

¹⁴ *Ibid.*, p. 81.

¹⁵ E. g., Ptolemy gives in the table of chords, *Almagest*, I, 11 (Manitius, *loc. cit.* (in note 3) p. 37) $\text{Crd } 2^\circ \sim 2;5,40$, or see any of the Islamic astron. tables.

$$0;a_2, \dots \sim \frac{1^3 + r_1}{45,0} = \frac{2,7;8, \dots}{45,0}.$$

This division gives the quotient 0;2 and the remainder $r_2 = 37;8,29, \dots$

Thus $a_2 = 2$.

Going one step further we find:

$$1;2,a_3, \dots = \frac{1;2,a_3, \dots^3 + 47,6;8, \dots}{45,0}$$

or:

$$0;0,a_3, \dots \sim \frac{1;2^3 + 47,6;8, \dots - 45,0 \cdot 1;2}{45,0} = \frac{r_2 + (1;2^3 - 1^3)}{45,0}.$$

This division gives the quotient 0;0,49 and the remainder $r_3 = 0;29,42, -1,37,3,45$. Thus $a_3 = 49$.

The above enables us to verify immediately Chelebi's rule: "Then one takes the cube of the n quotients (i. e., forms $a_1; \dots, a_n^3$) then the difference between this cube and that of the first $n - 1$ quotients (i. e., $a_1; \dots, a_{n-1}^3$). This is added to the remainder of the n th division. One has now the $n + 1$ 'st quotient (i. e., a_{n+1})." Chelebi makes this statement for the cases $n = 1, 2, 3, 4$ and then adds: "and one may continue the computation in the same manner as far as desired." Thus he obtains $\sin 1^\circ = 1;2,49,43,11$.

3. That we are justified in replacing $a_1; a_2, \dots, a_{n-1}^3$ for $a_1; \dots, a_{n-1}, a_n, \dots^3$ when we are only concerned with the n th digit of the solution of (1) may be seen as follows: Let us take the worst possible case where we use $1,0^{-n+2}$ for $0;0, \dots, 0, a_n, \dots$, and let us use the too large value $1;3$ for $a_1; \dots, a_{n-1}$ (this is justified by other ways of approximating $\sin 1^\circ$, as stated above). We get then:

$$(1;3 + 1,0^{-n+2})^3 = 1;3^3 + 3 \cdot 1;6,9 \cdot 1,0^{-n+2} + 3 \cdot 1;3 \cdot 1,0^{-2n+4} + 1,0^{-3n+6} < 1;3^3 + 4 \cdot 1,0^{-n+2} \text{ for } n \geq 3.$$

Fortunately this has to be divided by $45,0 = \frac{3}{4} \cdot 1,0,0$ (see (1)) so that the final influence of disregarding everything beyond the first $n-1$ digits is less than $6 \cdot 1,0^{-n}$, or 6 in the $n + 1$ 'st digit.

Yet, this may from time to time change a_n to a value which is 1 too low. But if we for a moment think of the method as an iteration process for approximating a solution of the equation $x = f(x)$, noticing that $|f'(x)|$ is much less than 1 in the neighborhood of the point of inter-

section between $y = x$ and $y = f(x)$, the convergence of the approximants becomes evident. Thus the error in a_n will eventually be compensated, and it will happen by one of the subsequent a 's, usually a_{n+1} , assuming a value greater than 60.

4. That this elegant method is due to al-Kāshī seems quite certain. Chelebi mentions as its inventor a person whose name Sédillot transliterates as *Atab-Eddin-Djemshid*. This was doubtlessly a misreading of the Arabic characters of the MS for *Ghāth ud-Dīn Jamshid*, al-Kāshī's given name and honorific title. For a missing dot over the initial *ghain* makes it an '*ain*', hence Sédillot's *A*. The only way of distinguishing between a *ya* and a *ta* (Sédillot's *t*) is by the presence of two dots under or over the letter, and probably the dots were missing in the MS. In the same manner *tha* and *ba* are distinguishable only by dots. The other variants in the transliteration are vowels, not normally indicated in Arabic script.

Further, al-Kāshī describes in his astronomical tables, the *siġ-i Khāqānī*, the then standard method of approximating $\sin 1^\circ$. On folio 32 recto of the India Office copy of this work, mentioned already in note (4), he arrives at his final result, $\sin 1^\circ \sim 1;2,49,43,13,5$. But opposite this, and running down the left hand margin of the folio, is a series of glosses. They are apparently all in the same hand, but it must be presumed that they were entered successively in some previous copy of the work by various individuals, beginning with al-Kāshī himself. In the following translation¹⁶ of these glosses the italicized material is in Arabic in the MS, the remainder in Persian:

"The ancients found no method for obtaining accurately the sine of the third of an angle whose sine is known. We have developed a method and have written an essay explaining it to its limit. We have extracted the sine of one degree by that method; it is 1,2,49,43,11,14,-44,16,19,16 ninths. *This is an annotation of the author; may God forgive him.*"

"Mostly (?) the successful completion of this essay was not attained. After the death of the author, *upon him (be) forgiveness!*, this weak person (i. e., the present scribe) saw his book in which he had commanded the extraction (i. e., he had extracted) this sine of one degree by the method of algebra without question. . . (word illegible), and on its margin a writing that, '*This is the sine of one degree; we extracted it by inspired strength from the Eternal Presence.*'"

"Our master, Mu'in ud-Dīn, the (astronomical) observer."

"This indigent destitute person Muḥammad. . . (word illegible) after the martyrdom of the martyred Sultan Ulugh Beg (saw, or found?) in

¹⁶ My thanks are also due to Dr. Ahmad Fakhri for help with the translation.

the portfolio of that presence (i. e., honorable person) a scrap (of paper?) in the handwriting of our forgiven (i. e., deceased) master."

The above-mentioned essay, whether completed or not, is mentioned in the preface to al-Kāshī's *Key to Arithmetic*,¹⁷ and the value of $\sin 1^\circ$ determined by this method is used in his computation of π .

¹⁷ See Luckey, *loc. cit.* (in note 5(c)), p. 6.

TÜRK TARİH KURUMU YAYINLARINDAN
VII. SERİ—No. 39

ULUĞ BEY VE SEMERKANDDEKİ İLİM
FAALİYETİ HAKKINDA GİYASÜDDİN-İ
KÂŞÎ'NİN MEKTUBU

(Ghiyâth al Dîn al Kâshî's Letter on Ulugh Bey
and the Scientific Activity in Samarqand)

DR. AYDIN SAYILI
İlim Tarihi Kürsüsü Ordinaryüs Profesörü
Dil ve Tarih - Coğrafya Fakültesi
Ankara Üniversitesi

TÜRK TARİH KURUMU BASIMEVİ—ANKARA

1 9 6 0

361

İ Ç İ N D E K İ L E R

Gıyasüddin Cemşid el Kâşî'nin Uluğ bey ve Çevresindeki İlim Hareketi Üzerinde Babasına Mektubu ...	7
Ghiyâth al Dîn al Kâshî's Letter on Uluğ Bey and the Scientific Activity Patronized by Him	32
Farsça Metin (Persian Text)	55
Türkçe Tercüme : Merhum Gıyasüddin-i Kâşî'nin Merhum Babasına Semerkandden Yazdığı Mektubun Sureti	76
İngilizce Tercüme (English Translation) : Copy of the Letter Which the Late Ghiyâth al Dîn al Kâshî Wrote From Samarqand to His Late Father	93
Dizin	111

GIYASÜDDİN CEMŞİD EL KÂŞİ'NİN ULUĞ BEY VE
ÇEVRESİNDEKİ İLİM HAREKETİ ÜZERİNDE
BABASINA MEKTUBU

Giyaşüddinin aşağıda Farsça metni ile Türkçe ve İngilizce tercümesi sunulan mektubu, Uluğ Bey (1392-1449) hakkında ve onun teşvik ve himayesi altında Semerkandde cereyan eden ilmi faaliyet etrafında birçok yeni ve ilgi çekici tafsilatı ihtiva etmektedir. Bu önemli belgeyi İranın Ankara Büyük Elçiliği Kültür Müşaviri Profesör Mojtaba Minovi'den öğrenmiş bulunuyorum. Mektup, Tahranda Sipehsâlâr Camii Kütüphanesinde 2916 numaralı bir mecmua içinde bulunmakta ve mecmuanın 510a-517b sayfelerini işgal etmektedir. Mecmuada bu mektuptan hemen sonra, sahife 517b-518b'de, Giyaşüddinin başka bir mektubundan bir kısım olduğu tahmin edilen ikinci bir yazı görülüyor. Konusunun farklılığı dolayısıyla bu ikinci mektuba burada temas edilmemiştir.

Aşağıda tahlili, metni, ve tercümesi verilen bu vesikadan Barselona ve Madridde toplanan Dokuzuncu Milletlerarası İlim Tarihi Kongresinde (Eylül 1959) sunduğum bir tebliğde bahs etmiş ve muhtevasının bazı kısımlarını özetlendirmiş, ayrıca, bu mektuptan çeşitli kısımları *The Observatory in Islam*¹ adlı kitabımda söz konusu ederek değerlendirmiş bulunuyorum.

¹ Ankara 1960. Bu yazı yayımlanmaya hazır bir durumda iken, Giyaşüddinin mektubunun E. S. Kennedy tarafından yapılmış bir İngilizce tercümesinin az önce neşr edilmiş olduğunu öğrendim (*A Letter of Jamshîd al Kâshî to his Father, Orientalia*, cilt 29, 1960, S. 191-213). Fakat Profesör Kennedy'nin makalesini gözden geçirince, tercümelerimizin birçok noktalarda birbirine uymadığını ve ayrıca, eserin tahlilinde hemen tamamen farklı noktalar üzerinde durmuş olduğumuzu gördüm. Bu sebeble, hazırladığım tercüme ve tahlilin olduğu gibi bastırılmasının faydalı ve hatta lüzumlu olacağı kanaatına vardım. Tercümeler arasında kıyaslamalar yapmak yazının hacmini çok arttıracığından ve pratik olmadığından, hazırlanmış olan metni bu istikamette genişletmeye de gidilmemiştir.

Profesör Kennedy'nin yazısı ile, Giyaşüddinin mektubunun, epey zaman önce, Bay Muhammed Mühit-i Tabâtabâi tarafından neşr edilmiş olduğuna

Profesör Minovi bu mektubun bir fotoğrafını bana vermek lûtfunda bulundu. Metnin incelenmesi sırasında karşılaştığım bazı güçlüklerin veya tereddütlü noktaların çözülmesinde de kendilerinden, ve yine aynı suretle Profesör Necati Lugal'in yardımından istifade ettim.

Yazmanın başlığından anlaşılacağı üzere, bu mektup Gıyâsüddinin el yazısı ile değil, ilmî ve teknik terimlerin yazılışında yaptığı yanlışlardan astronomi bilmediği anlaşılan bir müstensih'in yazısı ile bize intikal etmiş bulunuyor. Yazı nestaliyk olup hayli güzeldir. Müstensih'in iyi bir hattat olduğunu söyleyebiliriz.

Noktalı harflerin yazmada bazan noktasız olarak bırakıldığı görülmektedir. Aşağıda yayımlanmış olan metinde bu gibi nokta ilâveleri taban notlarında gösterilmeden yapılmış, ve yine harf noktalarında yapılan tashihlere umumiyetle notlarda işaret edilmemiştir. Taban notları hususiyle âşikâr olmayan tashihleri ve bir de müstensih için karakteristik gibi görünen hataları ihtiva etmektedir. *Hemze*, *med*, ve *g*'lerin ikinci keşideleri gibi hususlarda da buna benzer bir durum mevcuttur. Müstensih *hemze*, *vav*, ve *y* arasında umumiyetle bir tercih yapmamakta, yine, *ân*, *în*, *est* gibi kelimeleri bazan ayrı bazan bitişik yazmaktadır. Metnimizde de bu gibi yazılışların tevhidî yoluna gidilmemiştir. Şayanı kabul iki yazılış tarzı olan bazı kelimelerin yazmada her iki imlasına raslanmaktadır. Bunlar da olduğu gibi bırakılmıştır. Ayrıca, yazmada, her ikisi de mümkün iki varyant arasında bir seçme yapmayı gerektiren bazı misallerle karşılaşılmıştır. Bu gibi nadir hallerde, metne alınan kelimeler

vâkıf oldum (*Gıyâsüddin Cemşid-i Kâşânî, Âmlâziş ve Perveriş*, yıl 10, No 3, 1319 Hs., s. 1-16, 57-62). Bu metin daha önce de, Mutemiduddevle tarafından *Zenbîl* adlı dergide yayımlanmış (Tabâtabâî, aynı eser, s. 58). Tabâtabâî, Sipehsâlâr yazması ile birlikte Mutemiduddevle metnini de kendi metnine esas olmak üzere kullanmış bulunuyor, fakat Mutemiduddevle metninin ayrı bir yazma nüshasının mevcudiyetine delâlet edip etmediği sarahatle anlaşılmıyor. Tabâtabâî metninde Sipehsâlâr nüshası ile olan farklara hemen hiç işaret edilmemiş olduğu görüldüğünden, naşirin arada metne tasarruf etmekte tereddüt göstermemiş olduğu anlaşılmaktadır. Bu sebeple aşağıda sunulan Farsça metinde Tabâtabâî edisyonuna işaret edilen notlar yazma ile ilgili notlardan ayrı olarak verilmiş ve bunlar sadece rakamlarla değil, rakamların sonuna harflerin de ilâvesiyle gösterilmiştir.

bir tercihi tazammun etmekten ileri gitmeyip taban notundaki şekillerin mutlak ve zarurî birer tashihini ifade etmemektedir.

Yazma metnindeki bazı düzeltmelerden ve haşiyelerdeki ilâvelerden görüleceği üzere, müstensih kendi metnini dikkatle tashih etmiştir. Fakat buna rağmen, ilim terimleri dışında da yazmada epeyce yanlışın kalmış olduğu görülüyor. Yazmada bir, ve belki de üç yerde fâsıla, yani boş yer bırakıldığı müşahede ediliyor.² Bundan müstensih'in kopya ettiği yazma metninin bazı yerlerini okumakta güçlük çekmiş olduğu neticesi çıkarılabilir. Yazmada raslanan hatalardan bazısı da aynı ihtimali akla getirecek mahiyettedir.

Yazma iyi muhafaza edilmiş durumda. Sadece bir iki yeri kirlenmiş veya rütubetlenmiş, birkaç yerde de yazının okunmasını güçleştirecek şekilde mürekkep lekesi veya ince çizgiler şeklinde kalem izleri bulunmaktadır. Basılı metinde görülen paragraf ve noktalamalar yazmaya ait değildir.

Mektubun ifadesi konuşma diline kaçıyor. Fiillerin ve hatta tümü ile ibarelerin bazan atlandığı ve bazı ek edatlarının fazlaca tekrarlandığı görülüyor. Fiillerin tekil ve çoğul üçüncü şahısları ile kiplerin arada dikkatsizce kullanılması misallerine raslandığı gibi, arada sırada, kelimelerin avamî şekilleri ile, yani bu şekilde telâffuzlara tekabül eden imlâ örnekleri ile de karşılaşılıyor.

Aşağıda sunulan metinde mektup sahibinin üslûbunu değiştirecek müdahalelerden esas itibariyle kaçınılmıştır. Bununla beraber, bunda istisnâlar yapıldığı gibi, konuşma veya halk dili üslûbu ile gramer hataları veya müstensih'ten gelme yanlışlar arasında kesin bir sınır çizmek veya tefrik yapmak da her zaman kolay olmamıştır.

Fakat şunu da kayd edelim ki mektubun yer yer konuşma dilinde olan üslûbunu değiştirmenin doğru olmayacağı görülüyor. Çünkü bâzı cümlelerin kitabî dille tefsirleri, manâlarında değişiklikler meydana getiriyor. Halbuki, meselâ mektubun sonunda bulunan uzunca cümlede görüldüğü üzere, karine ile doğru çıkan mânâ konuşma dilindeki mânâyâ tekabül etmektedir.³

² Aşağıda, metin, s. 66 (514b) ile 53 ve 78 numaralı notlara bakınız.

³ Farsça Metinde 44 numaralı notu taşıyan ifade de buna benzer ikinci bir sarîh misal olarak gösterilebilir.

Yazmada karşılaşılan meselâ “felekü'l-a'lâ” gibi ifadelerle gelince, bunların umumiyetle Fars dili selikasına uygun düştüğü söylenebilir. Halbuki bu gibi ifadeler Arapça gramer kaidelerine göre yanlıştır ve herhangi bir Farsça gramer kaidesiyle de haklı gösterilemezler. Ayrıca, bunlar konuşma veya halk diline de sarih bir şekilde bağlanıp mal edilemezler. Bu gibi misallerde takip edilecek üç hareket tarzı var: Bunlar oldukları gibi bırakılabilirler; Arap dili gramer kaidelerine göre tashih edilebilirler; yahut da küçük değişikliklerle Farsça terkipler haline sokulabilirler. Yazmada karşılaşılan bu tipten misallerin hepsine şamil olmak üzere en elverişli bir tek hareket tarzının seçilmesi ve kabulü şayanı arzu olurdu. Fakat misallere ayrı ayrı bakılınca bunların tabi tutulmaları gereken muamelelerin bir tek kaideye pek kabili irca olmadığı görülmüştür. Bu sebeple, mektubun üslûbu gözönünde bulundurularak, bunların bazıları olduğu gibi bırakılmış, bir takımları tashih edilmiş, geri kalanları da Farsça tabirler şekline sokulmuştur. Bu sonuncu hareket tarzı bir dereceye kadar keyfî olarak vasıflandırılabilir.

Yazmada “galebe” kelimesinin Farsçada mutata olmayan bir mânada kullanıldığı görülüyor.⁴ Dikkate değer ki, bu kelimenin yazmada karine ile çıkan mânası Türkçedeki bir kullanılışına uygun düşüyor. Bu misal, yazmada, normal, şekli ile mânası yadırganan bir ifadenin açıklanması için bize bir ilham verebilir, yani bir ipucu hizmetini görebilir. Gıyasüddin, söz konusu ibarede, Farsça normal mânası ile, Batlamyus'un bir oğlu olduğundan bahsetmektedir. Karineye göre, Batlamyus'un bu oğlunun ona astronomi çalışmalarında yardımcı olmuş olması gerekiyor. Halbuki Batlamyus'un böyle bir oğluna ve yardımcısına diğer kaynaklarda temas edilmiyor. Bu sebeple, doğru mânanın, küçük bir nokta tashihi ile, haşiyede gösterilen varyanta, yani bu varyantın Türkçe bir ifade karşılığı olarak yorumlanması ile elde edilen mânaya tekabül etmesi ihtimali akla gelmektedir.⁵ Çünkü, bu suretle, bu ifade “o tek başına idi”, yani “yardımcısız çalışıyordu” mânasına gelmektedir ve bu mâna gerçek durumla tevafuk halindedir.

⁴ Bak, aşağıda s. 57, 66, 78, 85 (511a, 514b).

⁵ Bak. metin, s. 67, not 56, s. 85, not 13.

Metinde bir cümleinin okunuşu takribî ve şüphelidir.⁶ Profesör Minovi'ye göre, bu kısım hatalı olarak iktibas olunmuş bir beyit olmalıdır. Bu ihtimal, bu kısımda karşılaşılan bir ifade tarzına dayanmaktadır. Metinde bu cümle, karineye göre, tashih edilerek tesbit edilmiştir. Tercümesinde verilen mâna da bu sebeple takribî olarak kabul edilmelidir.

Mektup 7 Zilkade tarihini taşıyor, fakat sene tasrih edilmiyor. Bu bilginin tamamlanmasında, yani mektubun yazıldığı yılın tayininde bize yardımcı olabilecek bir ipucuna sahibiz ki, o da mektubun yazıldığı sırada rasathane inşası işinin yaridan fazla tamamlanmış olduğu hususunda Gıyasüddinin verdiği bilgidir.⁷ Başka kaynaklardan öğrendiğimize göre, rasathane inşası işine 823 (1420) yılında başlanmıştır; bu tarihte bitmiş olması da muhtemeldir. Çünkü kaynaklarda bu husus iyice tasrih edilmiyor. Eldeki mektuptan ve diğer kaynaklardan edinilen intibadan rasathane inşasının süratle yürütülerek nisbeten kısa bir zamanda sona erdirildiği neticesini çıkarmak gerekiyor. İnşaat 823 de başlamış ve 824 de tamamlanmış olabilir.⁸ Eldeki mektuptan inşaata sıcak bir mevsimde, yani muhtemelen yaz aylarında başlanmış olduğunu öğreniyoruz.⁹ Bu sıralarda Zilkade ayı güneş yılının onbirinci ayına raslıyordu. Şu halde mektubun 823 veya 824 yıllarından birinde yazılmış olması gerekir.

Takriben beş bin kelimelik, yani oldukça uzun olan bu mektupta Gıyasüddin aradabir kendi şahsî hislerini belirten tafsilata kaçıyor. Kâşanda bulunan Bedrüddin adlı birine karşı duyduğu antipatiyi bir iki vesile ile açığa vuruyor, ve gerçekte bilmedikleri şeyleri bilmek iddiasında bulunan kimselere sinirlendiğini de bir vesile ile ifade ediyor. Fakat bunlar dışında mektup hemen tamamen Semerkanddeki ilim adamları gurununun ilmi faaliyeti konusunda bilgi vermeye hasredilmiş bulunuyor. Anlaşıldığına göre, mektubun bu özel vasfını, kısmen olsun, Gıyasüddinin babasının bu konulara karşı ilgi göstermiş olmasına borçluyuz. Çünkü verilen tafsilatın oldukça büyük bir kısmı onun sorularına cevap teşkil etmektedir.

⁶ Metin, not 80, 81.

⁷ Bak. aşağıda s. 71, 74, 88-89, 91 (516a, 517b).

⁸ A. Sayılı, *The Observatory in Islam*, s. 270-271, 279.

⁹ Aşağıda s. 64, 83 (513b).

Mektubun böyle bir mahiyet taşımasında diğer bir âmilin de payı olduğu tahmin edilebilir. Bu mektubu Gıyasüddinin babasının birçok Kâşanlı akraba ve tanıdıklara okumuş olacağını kolayca tasavvur edebiliriz. Şu halde Gıyasüddinin de mektubunu bu gibi mülâhazalarla böyle tafsilatlı ve adeta yeni muhitindeki ilmi faaliyet ve başarılarını sayıp döken bir rapor şeklinde kaleme almış olduğu düşünülebilir. Nitekim, Gıyasüddinin bir ifadesi, mektubunun muhtevasının Kâşanda geniş bir çevreye duyurulacağı kanaatinde olduğunu göstermektedir. Kadızade hakkında verdiği bazı tafsilattan sonra, sözlerinin, bazı kimselerde, Kadızade ile arasının iyi olmadığı zehabını uyardırması ihtimalinden bahsederek böyle bir intibain yanlış olacağını söylemesi ve Kadızadenin bizzat kendisinin de aynı hususları muterif olduğunu ve aralarında çok güzel ve arkadaşça münasebetlerin hüküm sürdüğünü ilâve etmesi bunun bir delili sayılabilir.¹⁰

Eldeki mektubun hiç olmazsa bir kısmı daha önceki bir mektubun tekrarını teşkil ediyor. Gıyasüddin, ilk mektubunun kayıp olması ihtimali karşısında böyle hareket etmeye karar verdiğini açıklıyor.¹¹ Ayrıca, bu mektubun Semerkandi ve oradaki ilmi faaliyeti tasvir etmeye ve anlatmaya hasredilmiş olması, Gıyasüddinin Semerkande gelişi üzerinden hênüz uzun bir zaman geçmemiş olduğunu ve sözkonusu iki mektubun evine gönderdiği ilk tafsilatlı mektuplar arasında bulunduğunu gösteriyor. Aşağıda rasathanenin inşası ile ilgili olarak üzerinde durulan bazı tafsilattan, mektubunu yazdığı sıralarda Semerkande geleli takriben bir yıl kadar bir zaman geçmiş olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Mektupta Uluğ Beyin, Gıyasüddinin kendisinin, Kadızadenin, ve Uluğ Bey etrafındaki diğer ilim adamlarının ilmi faaliyeti hakkında ve ayrıca çeşitli ve münferit durum ve meseleler üzerinde ilgi çekici bilgilerle karşılaşılacaktır. Aşağıdaki sahifelerde bu malûmatın çoğu tahlil edilerek değerlendirilecektir.

Uluğ Beyin iyi kalbli bir insan olduğu hakkında diğer kaynaklarımızda da kısa işaretler mevcuttur. Yine, onun bir

¹⁰ Aşağıda s. 73, 90 (51b-517a).

¹¹ Aşağıda s. 55, 76 (510b).

ilim adamı olduğunu hususiyle zicinden biliyoruz. Fakat bu mektupta Uluğ Beyin şahsiyeti, karakteri, ve ilmi hakkında bol miktarda tafsilat bilgisi ile karşılaşılmaktadır. Gıyasüddinin verdiği tafsilattan, sadece Uluğ Beyin zarif ve iyi huylu bir insan olduğunu değil, fakat onun ilmi zihniyetinin kendisinin şahsi vasıflarını şekillendirmekte büyük rol oynamış olduğunu, alçak gönüllülüğü ve nezaketinin temelinde dürüstlük ve ciddiyetinin yer aldığını öğreniyoruz.¹²

Eldeki mektup Uluğ Beyi bize bir devlet ve idare adamı olarak değil, fakat bir araya getirdiği ilim adamları arasında bir bilgin, bir ilim adamı olarak tanıtmaktadır. Uluğ Bey himayesindeki ilim adamları gurubu, umumiyetle resmî bir mahiyet taşımadığı anlaşılan ilmî toplantılarını çok sık bir şekilde yapıyor, Uluğ Bey de bu toplantıların hemen hepsinde hazır bulunuyordu. Gıyasüddin bir de Uluğ Beyin *Tuhfe* ve *Tezkire* üzerinde verdiği derslerden bahsediyor.¹³ Bundan şu sonucu çıkarmak gerekiyor ki, Semerkandin en önemli ilmî faaliyet merkezlerinden biri olan medresede Uluğ Bey ders veya konferans dahi veriyordu. Çünkü bu gibi ders ve konferansların saraydaki ilmî toplantılarda değil, medresede verildiğini görüyoruz. Yine, Gıyasüddin, Uluğ Bey ile hatta medrese öğrencileri arasında yer alan uzun münakaşalara temas ediyor.¹⁴ Demek ki Uluğ Beyin medresede verilen bu yüksek seviyedeki ders veya konferansları takip eden tartışmalara katıldığına muhakkak nazariyle bakılabilir.

Mektubun yazılışı sıralarında Uluğ Bey yirmi altı veya yirmi yedi yaşlarında idi. Verilen tafsilattan Uluğ Beyin, daha bu yaşlarında, geniş bir kültüre ve gerek akli ve gerekse nakli ilimlerde oldukça derin bilgiye sahip olduğu, ayrıca, matematik ve astronomideki bilgisini arttırmak ve mükemmelleştirmek için büyük bir gayret sarf ettiği görülüyor. Gıyasüddin, muhtelif vesilelerle, ilmî toplantılarda görüşülen meselelerin Uluğ Bey tarafından ortaya atılmış olduğunu haber veriyor.

¹² Aşağıda s. 73-74, 91 (517a). Sayılı, *The Observatory in Islam*, s. 261-264.

¹³ Aşağıda s. 57, 77-78 (511a).

¹⁴ Aşağıda s. 74, 91 (517a).

Gıyasüddin, Uluğ Beyin katıldığı medrese konferanslarında tercihan matematik üzerinde çalışıldığını söylüyor.¹⁵ Bu, Uluğ Beyin hususiyle matematik ve teorik astronomi ile ilgilendiğini gösteriyor. Gıyasüddin Uluğ Beyin matematik ilimlerle meşgul olduğunu da ayrıca tasrih ediyor.¹⁶ Mektupta Uluğ Beyin zihnî hesaptaki mahareti üzerinde önemle duruluyor.¹⁷ Başka bir kaynakta da Uluğ Beyin istisnâî hafıza kudretine işaret olunuyor ve bu husus bir misalle tevsik ediliyor.¹⁸

Mektupta Gıyasüddinin Uluğ Beyden bir hükümdar olarak bahs ettiği dikkati çekiyor. Aslına bakılırsa bu doğru değildir. Çünkü Uluğ Bey resmen 1447 de kiral olmuştur. Mamafih kendisi daha önceleri de filî olarak müstakil bir kiral durumuna sahip bulunuyordu. Nitekim, diğer bazı kaynaklarda da kendisinden aynı şekilde hükümdar olarak bahs edildiği görülmektedir.¹⁹

Mektubun yazılışı sırasında Semerkanddeki sistemli ve plânlı ilmi çalışmanın on oniki senelik bir mazisi olduğunu Gıyasüddinden öğreniyoruz.²⁰ Demek ki bu ilmi faaliyet takribî olarak 1408-1410 yıllarında başlamış olmalıdır. Bu yıllar, Uluğ Beyin aşağı yukarı onbeş yaşlarında olduğu bir zamana raslar. Böyle olunca, bu mütekâsif ve sistemli ilmi faaliyetin ilk defa olarak Uluğ Bey tarafından başlatılmış ve harekete getirilmiş olması çok zayıf bir ihtimal olarak kalıyor. Diğer taraftan da, bu durum karşısında, Uluğ Beyin ne dereceye kadar Semerkandde kendisinden önce mevcut bulunan bir kültürel ve ilmî atmosferin malı ve mahsulü olduğu, onun ilmî şahsiyetini hangi mikyasta Semerkand çevresinin entellektüel iklimine borçlu olduğu meselesi önemli bir soru olarak meydana çıkmış oluyor.

Böylece, önemli bir ilim ve kültür cereyanının ilk belirme tarzı ile ilgili bir meseleye dokunmuş oluyoruz. Bu hareketin

¹⁵ Aşağıda s. 57, 78 (511a).

¹⁶ Aşağıda s. 68, 86 (515a).

¹⁷ Aşağıda s. 56-57, 77 (510b-511a).

¹⁸ Devletşâh, *Tezkiretü'sşuarâ*, E. G. Browne neşri 1901, s. 262-263; Sayılı, *The Observatory in Islam*, s. 280-281.

¹⁹ W. Barthold, *Ulug Beg und Seine Zeit, Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes*, cilt 21, No 1, 1935, s. 105.

²⁰ Aşağıda s. 68, 86 (515a).

büyüyerek verimlileşmesinde ve sağlam temeller üzerinde teşkilâtlandırılarak geliştirilmesinde Uluğ Beyin rolünün önemli olduğu hususunda, ve gelişmiş şekli ile bu hareketin geniş ölçüde ondan kuvvet aldığı şüphemiz olmaması gerekir. Fakat bu ilim hareketinin tekevvünü ve ilk inkişaf vetireleri meselesi kendi başına ve ayrı bir konu teşkil eder. Eldeki mektupta ise bu hususî konu ile ilgili malumatla karşılaşılıyor.

Uluğ Beyin ilme karşı duyduğu samimî ve kalbî bağlılığın menşe ve kaynakları konusu şüphesiz ki güç ve kompleks bir takım meseleleri ihtiva eder. Fakat bunda, genel olarak Semerkand çevresinin kültürel temayüllerinin ve özel olarak o ilim atmosferini temsil eden bir takım ilim adamlarının hiç olmazsa bazı tesirleri olduğunu tabii telakki etmek akla geliyor. Bu bakımdan, hususiyle Kadızadenin Uluğ Bey üzerindeki muhtemel tesirini ön plânda olarak mütalâa etmek gerekir. Çünkü kendisi Uluğ Beyin hocası idi.²¹

Eldeki mektupta bu konunun tümü ile doğrudan doğruya ilgili olarak sadece tek bir kalem bilgi ile karşılaşmaktadır. Gıyâsüddinin mektubundan öğrendiğimize göre, Uluğ Bey Merâğa Rasathanesini çocukluğu sırasında ziyaret etmiş ve gördüğü rasathane kalıntıları onda müphem olmakla beraber oldukça derin bir intiba uyandırmıştı.²² Buna göre, astronomiye karşı duyduğu ilginin onun çocukluk çağına kadar geri gitmesi ihtimali mevcuttur.

Bu münasebetle şunu da zikretmek yerinde olur ki, Kadızade, bilgisini arttırmak arzusu ile uzun bir yolculuğu ihtiyar ederek Bursadan Horasan bölgesine göç etmiş ve Semerkandde karar kılmıştı.²³ Şu halde Semerkand'in daha Uluğ Bey çağından bir zaman önce önemli bir ilmî merkez vasfını taşımakta bulunduğu akla geliyor. Fakat diğer taraftan da, bu münasebetle, Ali Kuşçu'nun misali zikr olunabilir. Ali Kuşçu, Semerkanddeki ilim hareketinin Uluğ Beyin teşvik ve himayesi altında gelişerek daha büyük önem kazanmış olduğu bir sırada, gizlice Semerkandden ayrılarak matematik ve astronomi bilgisini arttırmak

²¹ Sayılı, aynı eser, s. 265, 266, 267.

²² Aşağıda s. 60, 80 (512a).

²³ Aşağıda s. 19-20, not 40.

için Kirmana gitmişti.²⁴ Demek ki ilmi bilgi edinmek uğrunda yapılan seyahatler her zaman daha önemsiz çevrelerden daha münkeşif merkezlere gitme şeklinde oluyordu.

Anlaşıldığına göre, Kadızade, elinde kâfi derecede para bulunmamasına rağmen Semerkand bölgesine gitmeye karar vermişti. Bu sebeple, son dakikada, kız kardeşi bazı kıymetli mücevherlerini Kadızadenin beraberinde götüreceği kitaplar arasına koymuştu.²⁵ Buradan görülüyor ki Kadızade ilme karşı derin ilgi ve heyecan duyan bir idealistti. Ayrıca, Gıyasüddinden öğrendiğimize göre, kendisi çok ciddî, dürüst, ve mütevazî bir insandı.²⁶ Onun bütün bu vasıfları Uluğ Beyi hatırlatıyor. Bu her halde tesadüfî olmasa gerektir. Kadızade Uluğ Beyin hocası olduğuna göre, bu benzerlik onun Uluğ Beyin ilmi şahsiyetinin meydana gelip şekillenmesinde oldukça önemli ölçüde müessir olmuş olduğu intibasını uyandırıyor.

Diğer taraftan da, pek muhtemel olarak, Kadızadeyi Semerkand bölgesinin ilmi ve kültürel ikliminin bir mahsulü olarak kabul etmek hatalı olur. Bir defa, Semerkande göç etmezden önce Bursada tahsilini ikmal ettiği veya hayli ilerlettiği söylenmektedir.²⁷ Esasen onu Semerkande getiren kuvvetin onun hasbî ilim sevgisi olduğu görülüyor. Sonra, Semerkanddeki en meşur hocası Seyyid Şerîf-i Cürcânî'nin Kadızadeden, 'tabiatı riyâziyâta fazlasıyla maildir' diyerek şikâyet ettiği rivayet edilmektedir.²⁸ Bunlara bakılırsa, Semerkand bölgesinin Kadızadeyi müsbet ilim zihniyetine yöneltmiş olduğunu düşünmenin gerçeğe pek uygun düşmeyeceği söylenebilir. Tersine olarak, Kadızadenin Semerkand ilim muhitini hazırlamakta önemli bir paya sahip olduğu düşünülebilir.

Bailly'ye nazaran Uluğ Beyin etrafında toplanan ilim adamlarının sayısı yüzü aşıyordu.²⁹ Bu beyanın hangi kaynağa dayandığını tesbit etmiş değilim. Fakat verilen rakam doğruya

²⁴ A. S. Ünver *Ali Kuşci*, İstanbul 1948, s. 11; Sayılı, aynı eser, s. 268.

²⁵ Aşağıda s. 19.

²⁶ Aşağıda s. 73, 90 (516b-517a).

²⁷ A. Adnan-Adivar, *Osmanlı Türklerinde İlim*, İstanbul 1943, s. 4; aşağıda s. 19.

²⁸ Aşağıda s. 19.

²⁹ J. S. Bailly *Histoire de l'Astronomie Moderne depuis la Fondation de l'Ecole d'Alexandrie jusqu'à l'Époque de MDCCXXX*, cilt 1, Paris 1785, s. 259.

benziyor. Çünkü Gıyasüddin, Uluğ Beyin yanında altmış yetmiş matematikçinin mevcudiyetinden bahsediyor ve ayrıca da hesaplama uzmanlarının ve astrologların bulunduğunu haber veriyor. Bu matematikçiler hakkında Gıyasüddinin yüksek bir fikre sahip olmadığını görüyoruz. Çünkü bunların matematikçi adı ile anılmaya gerçekten lâyık olmadıklarını tazammun eden bir telmihte bulunuyor. O bunlara, daha fazla bilgilerini arttırmaya gayret eden müptediler nazarı ile bakıyor.³⁰ Matematik kelimesini Gıyasüddinin günümüzde mutad olandan daha geniş bir mânada kullandığına ve bununla meselâ teorik astronomiyi de kast ettiğine burada işaret etmek herhalde yerinde olur.

Guruptaki ilim adamlarından bir kısmı Semerkanddeki bir medreseye bağlı bulunuyordu. Bunlar orada ders veriyorlar ve çeşitli ilim dallarını temsil ediyorlardı. Aralarında ekserisi matematikle meşguldü.³¹ Fakat guruptaki ilim adamlarının hepsi medresede değildi. Gıyasüddin medreseliler ile medresede olmayanlardan iki ayrı zümre teşkil ediyorlarmış gibi bahsediyor ve hususiyle medresedeki konferans veya hususi dersleri takip eden tartışmalara temas ettiği zaman bu şekilde idarei kalam ediyor.³²

Mektuptan öğrendiğimize göre, medreseden olmıyan ilim adamları, ve anlaşıldığına nazaran Uluğ Beyin kendisi de, birkaç günde bir medresedeki konferanslarda hazır bulunuyorlar ve bu konferansları ilmî münakaşalar takip ediyordu. Eldeki vesikada bu münakaşaların oldukça ciddi ve etraflı olduğunu ve bunlara büyük önem verildiğini gösteren deliller var.

Yine Gıyasüddinin verdiği malumattan anlıyoruz ki medresedeki kollokiyum adını verebileceğimiz bu ilmî faaliyete ilâve olarak, ve muhtemelen Uluğ Beyin sarayında olmak üzere, biraz farklı mahiyette ilmî toplantılar yapılmakta idi. Bunların bir dereceye kadar ilmî çalışma ve araştırma mahiyetini taşıdığı görülüyor. Modern bir ad bulmak icap ederse bunlara da olgunlaşma seminerleri diyebiliriz. Bu kabilden toplantılar münasebetiyle mektupta meselâ Uluğ Beyin muayyen bir

³⁰ Aşağıda s. 68, 86 (515a).

³¹ Aşağıda s. 57, 78 (511a).

³² Aşağıda s. 58, 78 (511a).

ilmî problem üzerinde çalışmakta olduğundan ve Gıyasüddin ile Kadızadenin de orada mevcut ilim adamları arasında yer almış olduklarından bahsedildiğini görüyoruz.³³ Bu gibi toplantıların Uluğ Beyin huzurunda yapıldığına muhtelif vesilelerle işaret ediliyor. Her iki tip toplantıya yukarıda da, Uluğ Beyden bahsederken, temas etmiş bulunuyoruz.

Gıyasüddin gerek kendisinin ve gerekse diğer ilim adamlarının hemen hemen devamlı olarak Uluğ Beyle birlikte bulunduklarını verdiği misal ve tafsîlâtla ifade ediyor.³⁴ Bu sebeple, medresede yer alanlar dışındaki ilmî toplantıların sarayda yapıldığını tahmin edebiliriz. Bunların pek resmî bir mahiyet taşımadığı da anlaşılıyor. Bunlarda devam mecburiyeti olmadığı ve her toplantıya guruptaki ilim adamlarının hepsinin ve hatta ekseriyetinin iştirak etmediği sonucunu da çıkarabiliriz. Çünkü Gıyasüddin, bir vesile ile, ekseriyetin mevcut olduğu bir toplantıdan bahsediyor ve bu durumdan istifade ederek hususi önem verdiği bir problemi bu toplantıda ele aldığını ilâve ediyor.³⁵

Sarayda yer aldığını tahmin ettiğimiz bu toplantılara medrese profesörlerinin de iştirak ettiği görülüyor. Meselâ bu toplantılar vesilesiyle adı sık sık geçen Kadızade daha önce zikr olunan Semerkand medresesinde ders veriyor ve belki de bu medresenin başında bulunuyor,³⁶ Gıyasüddin ise medresede vazifeli bulunmuyordu. Nitekim, Gıyasüddin, kullandığı ifade tarzları ile, kendisini medrese mensuplarından sarîh bir şekilde ayırıyor.³⁷ Kadızade bir hücrede, yani anlaşıldığına göre medrese avlularını çevreleyen odalar tipinde bir yerde yaşıyordu.³⁸ Gıyasüddinin ise ayrı bir evi vardı.³⁹

Taşköprüzâde, Semerkanddeki ilmî hareketin meydana gelişinde Kadızade ile Uluğ Beyin hizmet ve tesirleri meselesini önemli ölçüde aydınlatan bazı tafsîlât veriyor. Taşköprüzâdenin

³³ Aşağıda s. 61-63, 81-82 (512b-513a).

³⁴ Aşağıda s. 69, 70, 87 88 (515b).

³⁵ Aşağıda s. 63, 82 (513a).

³⁶ Sâlih Zeki, *Asâr-i Bâkiye*, cilt 1, İstanbul 1329 H., s. 187; Adıvar, aynı eser, s. 5.

³⁷ Aşağıda s. 58, 78 (511a).

³⁸ Aşağıda s. 62, 81 (512b).

³⁹ Aşağıda s. 62, 65, 81, 84 (512b, 514a).

bu tafsilâtı ihtiva eden metni biraz sâdeleştirilmiş ve kısaltılmış olarak aşağıda sunulmuştur:

'Musa Paşa ibn Muhammed ibn Mahmud kendi yurdunda tahsilini hayli ilerlettikten sonra bilgisine yeni bilgi katmak maksadiyle Acem diyarına gitmeye karar verdi. Fakat akrabasının buna rıza göstermeyip seyahatine mani olacaklarından korktuğu için bu kararını gizli tutuyordu. Kadızadenin böyle bir seyahat yapacağını kız kardeşi duydu ve gurbet diyarında sıkıntı çekmesin diye kıymetli bazı mücevherlerini onun beraberinde götüreceği kitapların arasına yerleştirdi. Kadızade Horasan ve Maverâünnehir bölgesinde bilgisini arttırmak için büyük gayretler sarf etti ve yeni yatanında ilimde yüksek mertebelere erişti.

'Kadızade bu yeni diyarda büyük şöhret kazandı ve ünlü padişah Uluğ Beyin hocası oldu. Kendisi burada, Anadoluya mensubiyetini ifade etmek üzere, Kadızade-i Rûmî lakabı ile anılmaya başlandı. Uluğ Beyin matematiğe karşı çok ilgi duyması dolayısıyla Kadızade de diğer ilimlerden fazla matematikle meşgul olmaya başladı. 814 yılında Çāğmîni'nin astronomi kitabına, 815 de de geometride *Eşkal-i Tesis* adlı kitaba birer şerh yazdı.

'Söylendiğine göre, Kadızade, Seyyid Şerîf-i Cürcânî'nin talebesi idi ve ondan çok şey öğrendi. Fakat araları iyi değildi ve münasebetleri devam etmedi. Kadızade Seyyid Şerîf için "matematigi iyi öğretemez" derdi, Seyyid Şerîf de Kadızadeyi "tab'-ı lâtifî riyaziyâta mağlup ve felsefiyâta menkûptur" diyerek tenkid ederdi.

'Eski padişahlardan biri Semerkandde büyük ve birçok hücreli bir medrese inşa ettirdi ve medresenin her (dört) cephesine ayrı birer dershanec ve her dershaneye ayrı birer müderris tayin etti. Kadızade bu medreseye müderris oldu ve diğer müderrislerden daha yüksek bir mertebeye erişti. Diğer müderrisler, öğrencileri ile birlikte Kadızadenin derslerine gelirler, ondan sonra da kendi derslerini ayrıca verirlerdi. Uluğ Bey de arada sırada Kadızadenin derslerinde hazır bulunurdu.

'Günün birinde Uluğ Bey medresenin dört müderrisinden birini işten çıkardı ve onu ders vermekten men etti. Bunun

üzerine Kadızade protesto mahiyetinde olmak üzere, derslerini keserek inzivaya çekildi. Uluğ Bey ilkin Kadızadenin hastalandığını zannetti ve kendisine geçmiş olsun demek için ziyaretine gitti. Fakat böylece meselenin iç yüzünü öğrenince Kadızadeden özür diledi. Böyle keyfi bir muamelenin bir daha tekrerrü etmiyeceği hususunda ona vaidde bulundu ve Kadızadeden derslerine tekrar başlamasını rica etti. Bunun üzerine Kadızade medresedeki işinin başına döndü.

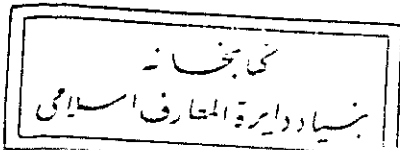
'Uluğ Bey eski zîçlerin tatmin edici olmadığını müşahede ettiğinden yeni rasatlar yapılmasına karar verdi ve bu maksatla Semerkandde bir rasat kuyusu inşa ettirdi. Bu rasatlara ilkin Gıyasüddin Cemşidle başladı. Fakat Gıyasüddin az zaman sonra öldüğünden bu işe Kadızade-i Rûmî ile devam edildi. Kadızadenin ömrü de bu işe vefa etmedi ve rasadı Ali Kuşçu tamamladı.'⁴⁰

Seyyid Şerîf Alî ibn Muhammed el Cürçânî'nin ölümü 1413 yılına raslar.⁴¹ Taşköprüzadenin, Uluğ Beyin matematiğe karşı duyduğu ilgi dolayısıyla Kadızadenin de bu konuya daha büyük önem vermeye başladığını haber verdiğini görüyoruz. Bu malumatı şimdi zikrolunan kronolojik bilginin ışığı altında mütalaa etmek faydalı olur. Seyyid Şerîf Kadızadenin matematiğe fazla meyli olduğundan bahisle onu tenkid etmiş olduğuna göre, demek ki Kadızadenin Uluğ Beydeki matematik sevgisi dolayısıyla bu konu ile ilgisini arttırmış olduğu yolundaki ifadeden, onun ilk defa olarak bu vesile ile matematikle ciddi bir şekilde meşgul olmuş olduğu mânasını çıkarmak doğru olmaz.

Taşköprüzadenin verdiği bu tafsilatı Gıyasüddinden öğrendiklerimize ilâve edince, Semerkanddeki ilim hareketinin başlamasında ve onun ilk inkişaf merhalelerinde sözü geçen medresenin ve Kadızadenin şahsının mühim rol oynamış olduğu sarih olarak meydana çıkıyor. Fakat bu hareketin büyük çapta gelişme ve verimlileşmesinde Uluğ Beyin payı muhakkak ki çok büyük ve önemli olmuştur.

⁴⁰ A. Taşköprüzâde, *Şakaik-i Numâniye*, Türkçe tercümesi (M. Mecdi tarafından), İstanbul 1269 H., s. 37-40; Sâlih Zeki, aynı eser, s. 187-189.

⁴¹ G. Sarton, *Introduction to the History of Science*, cilt 3, kısım 2, Baltimore 1948, s. 1461.



Semerkinddeki ilmi faaliyetin ilk nüvesini teşkil etmiş olan ve Uluğ Beyin teşvik ve himayesi altında çok daha da gelişen bu ilim hareketinin daha münkeşif safhalarında da önemini muhafaza eden bu medresenin Semerkandin hangi medresesi olduğu hususu burada tesbit edilmeden bırakılmıştır. Bu özel konuda ve zamanın Semerkand medreseleri hakkında kaynaklarımızda munzam bilgi mevcuttur.⁴² Demek ki bu gibi kaynakların incelenmesi suretiyle çok ilgi çekici olan bu konunun daha önemli ölçüde aydınlanacağı umulabilir.

Bu kaynaklardan hiç olmazsa bir tanesinde, Uluğ Bey Rasathanesinin kuruluşunun doğrudan doğruya bu medresedeki ilmi çalışmaya bağlandığı, medresenin rasathanenin menşei olarak gösterildiği anlaşılmaktadır.⁴³ Umumiyetle, İslâm medreselerinin öğretim programlarında müsbet ilimlere önemli yer verilmesi mutad olmadığına göre, Uluğ Bey zamanında sözü geçen Semerkand medresesinde matematik ve astronomi sahalarına mensup birçok müderrisin bulunmuş olmasında Uluğ Beyin şahsen büyük tesiri olduğundan şüphe etmemek icap eder.

Uluğ Beyin etrafındaki ilim adamlarının bilgi derecelerine gelince, Gıyasüddinin mektubu bu mesele üzerinde önemli bir kaynağımızı teşkil ediyor, fakat onun bu hususla ilgili olarak verdiği malumattan sarih bir netice çıkarmak pek okadar kolay olmuyor. Gıyasüddin, mektubunda, bu ilim adamları arasında kendisinin mütemayiz durumunu tebarüz ettirmek, ve aynı zamanda, aralarına yeni katılmış olmasına rağmen, üstün ilmi sayesinde, yeni muhitinde kolayca hak etmekte olduğu bir hürmet ve itibar gördüğünü ve el üstünde tutulduğunu haber vererek babasını sevindirmek istiyor. Bunu yaparken de meseleyi iki ayrı yönden ele alıyor.

Semerkinddeki ilim adamları arasında istisnaî bir mevkie sahip olduğunu ve hürmet ve itibar gördüğünü belirtirken, her ilim dalının en ünlü mümessillerinin Semerkandde toplanmış bulunduğuna, bu itibarla bunların takdir ve hürmetini kazan-

⁴² Barthold, aynı eser, s. 149 ve devamı; Sayılı, aynı eser, s. 271, 272, 273.

⁴³ T. H. Kari-Niiazov, *Astronomischeska Shkola Ulugbeka*, Moskova 1950, s. 55-60; Sayılı, aynı eser, s. 272.

manın gerçek bir mâna ve değer taşıdığına dikkati çekiyor.⁴⁴ Yani bu gibi münasebetlerle buradaki ilim adamlarının bilgisini öğüyor, fakat bunu umumî şekilde ifade ediyor. Sadece bir yerde bu çevre mensuplarının yazdıkları bazı kitapları adlandırmak suretiyle hususi teferruata giriyor.⁴⁵

Buna mukabil, Semerkand ilim adamlarının bilgilerinin derecesi konusuna bir de kendini medih sadedinde temas ediyor. Bu gibi vesilelerle kendi ilminin üstünlüğünü göstermek sözü konusu olduğundan, onların bilgisizliklerine ve onların aciz gösterdiği meseleleri kendisinin ne kadar büyük başarı ile ele almış olduğuna dair misaller veriyor. Bu misallere bakılırsa, bu ilim adamları Gıyasüddine nazaran matematik ve astronomide hayli yaya kalıyorlardı ve esasen bilgilerinin pek öyle medhe değer bir tarafı yoktu.

Gıyasüddinin verdiği bu misallerin esas itibariyle doğru olduğundan şüphe etmemek gerekir. Uluğ Bey zîcine Mirem Çelebinin yazdığı şerhin yazma nüshalarından birinin haşiyesinde, birçok yüksek şahsiyetler huzurunda, Gıyasüddinin, güneş tadil cetvelinin günöte ve günberi noktalarında sıfır olacak şekilde tanzim edilip edilmemesi meselesi üzerinde Uluğ Beyle yaptığı münakaşadan bahsedilmektedir ki,⁴⁶ bu da Gıyasüddinin eldeki mektupta zikrettiği misalleri ve bu ilim çevresinde oynadığını söylediği rolü hatıra getiriyor.

Sonra, Uluğ Bey, zîcinin başında, Gıyasüddinden 'evâil ilimlerinin mükemmelleştiricisi' ve 'meselelerin çetrefil noktalarının çözücüsü' diye bahsediyor.⁴⁷ Eldeki mektupta, Gıyasüddinin de kendisi hakkında Uluğ Bey tarafından söylenmiş bu mealde sözlere misaller verdiğini görüyoruz.⁴⁸ Vakıa kaynaklarımızın umumiyetle Kadızadeyi de çok medh ettiklerine ve belki de onu Gıyasüddinden fazla öğdüklerine şahit oluyoruz.⁴⁹ Fakat buna bakarak, Kadızadenin ilmî bilgisinin Gıyasüddininkinden üstün sayılmış olduğu sonucunu çıkaramayız.

⁴⁴ Aşağıda s. 56, 57, 63, 76-77, 78, 82 (510b, 511a, 513a).

⁴⁵ Aşağıda s. 57, 78 (511a).

⁴⁶ P. Luckey, *Die Rechenkunst bei Gamshîd B. Mas'ûd al Kâshî*, 1951, s. 4-5.

⁴⁷ Sayılı, aynı eser, s. 265.

⁴⁸ Aşağıda s. 68, 87 (515a-515b).

⁴⁹ Sayılı, aynı eser, s. 270, not 28, s. 265.

Maalesef Gıyasüddin Kadızadeden başka hiçbir ilim adamının adını vermiyor. Sadece Kadızadeyi ismen zikrediyor ve aralarında en bilgililerinin o olduğunu söylüyor. Kadızadeden bahsederken bir defasında birbiri arkasına gelen iki cümlede kendi kendisi ile tenakuza düşer gibi oluyor. İlkin Kadızadenin *Almajest*'teki teorik bilgiye sahip olduğunu söylüyor, bundan hemen sonra da Kadızadenin teorik astronomide müptedi olduğunu beyan ediyor.⁵⁰ Bu sonuncu ifadenin mübalâğalı olduğuna hükmedilebilir. Çünkü Gıyasüddin'in kendisinin de bildirdiği gibi, Kadızade mektubun yazılışından önce Çağmîni ve eşkâl-i tesis şerhlerini yazıp bitirmiş bulunuyordu.⁵¹ Onun bu eserleri ise, bilindiği üzere, Kadızadeye bir ilim adamı olarak şöhret kazandırmış kitaplar arasında bulunmaktadır.

Gıyasüddin'in, Semerkand ilim adamlarından, biri bilgilerini öğmesini, diğeri bilgisizliklerini tebarüz ettirmesini gerektiren iki ayrı münasebetle bahsetmesine rağmen, onun bu zıt mahiyetteki beyanlarını uzlaştırmamanın mümkün olacağı düşünülebilir. Çünkü Gıyasüddin'den öğrendiğimize göre, Semerkand ilim adamları umumiyetle dar alanlarda uzmanlaşmış bulunuyorlardı. Buna göre, şöyle düşünebiliriz. Meselâ, Kadızade ile bazı diğerleri hesaplama işlerinde zayıftılar.⁵² Fakat buna mukabil, gurutpa hesaplama uzmanları vardı.⁵³

Mamafih, böyle uzlaştırıcı bir formülün eldeki mektuba tamamen tatmin edici bir şekilde kabili tatbik olmadığını görüyoruz ve neticede Gıyasüddin bizi gerçekten iki zıt ifade tarzı arasında kararsız bırakıyor. Öyle görünüyor ki, Gıyasüddin, verdiği özel misallerin seçilmesi ve anlatılış tarzında veya umumî mahiyetteki beyanlarında, yahut da bunların her ikisinde de, tamamen tarafsız bir zihniyetle hareket edememiştir.

Gurutptaki diğer ilim adamlarının çözmekte güçlük çektikleri meseleler üzerinde Gıyasüddin'in verdiği hususi misallere bakılarak Uluğ Bey etrafındaki şahısların ilmi bilgisi hakkında bir fikir edinmek mümkündür. Fakat Gıyasüddin'in en

⁵⁰ Aşağıda s. 71, 89 (516a).

⁵¹ Aşağıda s. 57, 78 (511a).

⁵² Aşağıda s. 72, 89-90 (516b).

⁵³ Aşağıda s. 57, 78 (511a).

çok kendi işine gelen misalleri seçmek suretiyle durumu biraz mübalağalandırması ihtimali de mevcuttur. Burada bu misallerin çoğuna temas edilecek ve muhtevaları, daha fazla, muhtemel mübalağalıların tesbiti bakımından ele alınacaktır.

Gıyasüddin Kadızadenin çarpma ve bölme işlemlerini şebeke kurmadan yapamadığını ve bunu da ancak kitap yardımı ile başarabildiğini beyan ediyor. Bundan sonra da üçüncü çoğul şahsa geçerek 'satır satır okuyorlar ve şebekeyi adım adım tamamlıyorlar' diyor.⁵⁴ Belki de bu son ifade Kadızadeye kabili tatbik değildi. Herhalde, hesaplama uzmanlarına kabili tatbik olmadığına muhakkak nazarı ile bakılabilir. Fakat cümlelerin ifade tarzı, gurubun en bilgilisi olan Kadızadenin dahi pek az şey bildiği intibasını uyandırıyor.

Buna benzer bir ikinci misalle de, rasathane yerinin tesviyesi işi münasebetiyle karşılaşıyoruz. Burada Gıyasüddin şöyle söylüyor: "onlar itiraz ettiler, fakat iddiamın doğru olduğunu ona (Kadızadeye) anlattım."⁵⁵ Anlaşıldığına göre, Kadızade, Gıyasüddinden sonra, gurubun en bilgili uzvu olduğundan, Gıyasüddin hususiyle ona nazaran bilgi üstünlüğünü tebarüz ettirmeye önem veriyor. Esasen ondan başkalarını ismen zikretmediğine de yukarıda işaret etmiş bulunuyoruz.

Göz ışını ve hakikî ufuk ile ilgili probleme gelince,⁵⁶ teorik mahiyeti ile bu mesele çok basit olduğundan, burada karşılaşılan güçlüğün, istenen sonucu muayyen derecede yaklaşık olarak hesaplama güçlüğü olmuş olması muhtemeldir. Yani buradaki müşkül, herhalde, trigonometrik fonksiyonların değerlerinin hesaplanmasında muayyen bir dakikiyet sınırına ulaşılması ile ilgili olmalıdır.

Gıyasüddin, Uluğ Bey etrafındaki ilim adamlarının, Merâgâda üç metre çapında bir süds-i Fahrî'nin mevcudiyetinden habersiz olduklarına işaret ediyor.⁵⁷ Bu tuhaf bir söz. Çünkü Merâgâ Rasathanesinde süds-i Fahrî bulunmadığını kabul etmemiz gerekiyor. Sonra, orada süds-i Fahrî bulunsa idi dahi,

⁵⁴ Aşağıda s. 72, 89-90 (516b).

⁵⁵ Aşağıda s. 74, 91 (517b).

⁵⁶ Aşağıda s. 68, 80 (512a).

⁵⁷ Aşağıda s. 61, 81 (512b).

bu ilim adamlarının Merâgadaki süds-i Fahrî'yi değil, süds-i Fahrî adlı aleti bilmemeleri önemli olurdu. Halbuki Gıyasüddin onların süds-i Fahrî'yi bilmediklerini ifade etmiyor.⁵⁸

Tesviye işinin neden muayyen bir tip üçgenle yapılabileceğini iki "yıldız saati" süresince izah ettiğini anlatırken Gıyasüddin verdiği tafsîlât da, sözlerinde, ve hiç olmazsa beyanlarının esasını teşkil eden hareketlerinde, mübalağaya kaçtığı ve bilgi üstünlüğünü isbata biraz fazlaca meraklı olduğu intibahı uyandırıyor.⁵⁹

Son olarak, Gıyasüddin bütün astronomi kitaplarında tekrarlandığını söylediği bir yanlış dikkati çekmesi misalini zikrelelim. Gıyasüddin, burada, ayın episikli üzerindeki azamî tadilinin eksantrik bölgesinde vuku bulduğu nokta ile muhazât merkezini birbirlerine birleştiren doğrunun apoleden geçen çapa dik olacağı yolundaki ifadenin ve yine gezegenler için buna mümasil olarak yapılan beyanların yanlış olduğuna işaret ediyor.⁶⁰ Gıyasüddin burada küre tabakaları sistemini sözkonusu etmekte olduğu görülüyor. Bu münasebetle E. S. Kennedy'nin Bîrûnî'de bulduğu nâdir yanlışlardan birinin Gıyasüddin burada bahis mevzuu ettiği tipten bir yanlış olduğuna işaret etmek yerinde olur.⁶¹

Netice olarak, Gıyasüddin meseleyi biraz mübalağa etmiş olması ihtimalini göz önünde bulundursak dahi, on oniki senelik "ciddî" mesailerine rağmen Semerkanddeki bu ilim adamlarının bilgilerinin pek yüksek bir seviyede olmadığını kabul edebiliriz. Esasen, Gıyasüddin verdiği tafsîlattan sarîh olarak şu sonuca varabiliriz ki, bu ilim adamlarının kendileri de her şeyi bilmek iddiasında değillerdi. Toplantılarını da, daha fazla, bilgilerini arttırmak ve noksanlarını tamamlamak maksadiyle yapıyorlardı.

⁵⁸ Sayılı, aynı eser, s. 285-286.

⁵⁹ Aşağıda s. 64-65, 83-84 (513b-514a). Sâlih Zeki, Kadızadenin aksine olarak Gıyasüddin iddialı bir insan olduğunu söylüyor (aynı eser, s. 189), ve Gıyasüddin sin 1°'nin değeri üzerine yazdığı risaleye Kadızade şerhinin hakikatte bir şerhten ibaret kalmadığına işaret ediyor (aynı eser, s. 133).

⁶⁰ Aşağıda s. 62-63, 82-83 (513a-513b).

⁶¹ E. S. Kennedy, *The Sasanian Astronomical Handbook Zîj-i Shah, Journal of American Oriental Society*, cilt 78, 1958, s. 250.

Öyle anlaşıyor ki, Gıyasüddin'in guruptaki diğer ilim adamlarına nazaran üstünlüğü sadece bazı sahalardaki bilgisinin daha derin olmuş olmasından ibaret kalmıyor, fakat aynı zamanda, diğer ilim adamlarının çoğunun durumunun aksine olarak, o matematik ile astronominin bütün dallarında derin vukufa sahip bulunuyordu. Bunun böyle olduğunu mektubunda karşılaştığımız bazı ifadelerden çıkarabildiğimiz gibi,⁶² onun neşriyatına bakarak da aynı hükmü verebiliriz.

Meselâ, Gıyasüddin, pratik astronominin bütün branşlarını iyi bildiğini, halbuki, Kadızadenin durumunun böyle olmadığını söylüyor.⁶³ Mamafih, böyle söylemekle, herhalde, gurupta bu sahaları bilen başka kimsenin de mevcut bulunmadığını ifade etmiş olmuyor. Nitekim, mektubunun başlangıç kısmında, Uluğ Beyin etrafında toplanmış bulunan ilim adamları gurubunda astrologların, hesaplama uzmanlarının ve umumiyetle bütün ilim dallarını temsil eden kimselerin bulunduğunu haber veriyor.⁶⁴

Uluğ Beyin Gıyasüddini medh sadedinde söylediği ve bu mektupta ortaya konan sözlerden sarıh olarak meydana çıkan bir cihet de şudur ki Gıyasüddin bildiklerini çok iyi biliyor ve bunları hiç güçlük çekmeden hatırlayabiliyordu.⁶⁵ Zamanın cari kanaatlerine göre, münferit olguların ve rakamlarla ifade edildiğinden sadece mekanik hafızaya hitap eden hususların aranması veya tahkiki dışında kitaba müracaatın bir ilim adamı için nakîsa sayıldığını, Gıyasüddin'in, babası müsterih olsun diye verdiği tafsillattan çıkarabiliriz.⁶⁶

Gurubun en mütemayiz diğer uzuvları, Uluğ Beyin kendisi, Kadızade, ve Ali Kuşçu idi. Ali Kuşçu ile Uluğ Beyin Gıyasüddinden küçük olduklarını katiyetle biliyoruz. Gıyasüddin'in Ali Kuşçuyu hiç tanımamış olması da muhtemeldir. Kadızadenin ölümü Gıyasüddininkinden daha geç bir tarihe raslıyor. Fakat yaşları arasında bir kıyaslama yapmak için elimizde sarıh bilgi mevcut bulunmuyor.

⁶² Aşağıda s. 71-73, 89-90 (516a-516b).

⁶³ Aşağıda s. 71-72, 89-90 (516a-516b).

⁶⁴ Aşağıda s. 58, 78 (511a).

⁶⁵ Aşağıda s. 68, 86-87 (515a-515b).

⁶⁶ Aşağıda s. 72-73, 90 (516b).

Yukarıda vardığımız neticeye nazaran eldeki mektup 1421 veya 1422 yılında yazılmıştır. Buna göre, Gıyasüddinin Semerkande gelişi 1420 veya 1421 yılına raslıyor. Bazı kaynakların ifadesine nazaran, Gıyasüddin, Kâşanlı bir ikinci ilim adamı ile birlikte ve Kadızadenin tavsiyesi üzerine, Semerkande davet edilmişti.⁶⁷

Mektupta Gıyasüddinin karakteri ve şahsî vasıfları hakkında Uluğ Beyin medihkâr sözleri tekrarlanıyor.⁶⁸ Başka bir kaynağa göre ise, Gıyasüddin biraz kaba bir insandı, fakat bilgisinin çokluğu dolayısıyla Uluğ Bey ona tahammül gösteriyor ve kendisine hürmet ediyordu.⁶⁹

Gıyasüddin mektubunda, eviâden ilk defa olarak Semerkande gitmek münasebetiyle ayrıldığını ifade ediyor.⁷⁰ *Żic-i Hâkaanî* adlı kitabının başlangıcındaki bir sözüne bakılırsa, Gıyasüddinin mektupta geçen bu ifadesi belki de onun ilk defa olarak bir hükümdar hizmetine girmek üzere Kâşandan ayrılarak Semerkande gittiğini tazammun etmektedir. Gerek *Żic-i Hâkaanî*'nin giriş kısmından ve gerekse hemen aşağıda verilecek tafsilâtan Gıyasüddinin bir hükümdar tarafında davet edilmeyi bir zamandır arzu ve ümit etmiş olduğu neticesini çıkarabiliriz.

Gıyasüddin, 818 (1515-1516) yılında rasat aletleri üzerine yazdığı küçük risaleyi, kendi açıkladığına göre, Sultan İskender adlı bir hükümdar için yazmıştır. Bu hükümdar Barthold'un tahminine nazaran Karakoyunlu padişahı Sultan İskender olacaktır.⁷¹ Yukarıdaki malûmata bakılırsa, Gıyasüddinin bu sultan İskender ile şahsen temas etmiş olduğu neticesine varılmamalıdır. Her halde Gıyasüddin bu risaleyi Sultana mektupla göndermiş olacaktır.

Yine, yazılışı 816 (1413-1414)dan daha geç olmayan ⁷² *Żic-i Hâkaanî fî Tekmil-i Żic-i İlhanî fî'n Nücûm* adlı ve az önce zikri

⁶⁷ Barthold, aynı eser, s. 162; Sayılı, aynı eser, s. 271, not 34.

⁶⁸ Aşağıda s. 68-68, 86-87 (515a-515b).

⁶⁹ Barthold, aynı eser, s. 164.

⁷⁰ Aşağıda s. 69, 87 (515b).

⁷¹ Barthold, aynı eser, s. 163.

⁷² Luckey, aynı eser, s. 5.

geçen kitabı da, adında geçen *kâkaan* kelimesinin delalet ettiğine göre, Gıyasüddinin bir padişaha ithaf ettiği görülüyor. Barthold bu hâkaanın muhtemelen Uluğ Beyin babası Şâhruh olduğunu düşünmüştür.⁷³ Mamafih, zîcin başında Gıyasüddin Şahruhtan değil Uluğ Beyin kendisinden bahsediyor. Fakat yukarıdaki bilgiye dayanarak, bu zîcin bir padişaha ithaf edilmiş olmasının da, yine, Gıyasüddinin bu padişah nezdinde hizmette bulunmuş olduğuna delâlet edemeyeceğini söyleyebiliriz.

Elimizdeki mektubunda, Gıyasüddin, *Zîc-i İlîhânî*'de önemli hiçbir ilmi hata bulunmadığını kesin olarak ifade ediyor.⁷⁴ Bundan şu neticeyi çıkarmak gerekiyor ki yukarıda bahsi geçen *Zîc-i Hâkaanî*'nin adında rasladığımız *tekmîl* sözü *Zîc-i İlîhânî*'de ilmi bakımdan ıslaha muhtaç hususlar bulunduğunu tazammun etmemektedir. Bu kelime burada herhalde yeni zîcin muhtevasının daha zengin ve daha çeşitli olduğunu, ve belki de ayrıca, gerek mektupta ve gerekse zîcin başında işaret edildiği gibi, cetvellerin mutad olduğu üzere, zamanın gök yüzü durumuna göre tadil veya yeni baştan tanzim edilmiş bulunduğunu ifade etmektedir.⁷⁵

Uluğ Beyin yanında bulunan ilim adamları gurubunun menşei ve çalışmalarının teşkilâtlandırılarak verimleştirilmesi işi ile Semerkandde yeni bir rasathane kurulması tasavvur ve plânı arasında ne şekilde bir münasebet bulunduğu sarîh olarak bilinmemektedir. Uluğ Bey, kendi çevresinde, önemli bir çalışma hareketini, ileride bir rasathane kurmak için bir hazırlık mahiyetinde olmak üzere plânlaştırarak teşvik ve himaye etmiş olabileceği gibi, bu ilmi çalışmalar sonucunda rasathane kurma kararının verilmiş olması da muhtemeldir. Taşköprüzadeden yukarıda iktibas olunan metinden, Semerkand Rasathanesini kurma kararını bizzat Uluğ Beyin vermiş olduğunu görüyoruz.

⁷³ Barthold, aynı eser, s. 163.

⁷⁴ Aşağıda s. 66-67, 85 (514b).

⁷⁵ Bakınız, E. S. Kennedy, *A Survey of Islamic Astronomical Tables, Transactions of the American Philosophical Society, New Series*, cilt 46, kısım 2, 1959, zîc 20. Gıyasüddinin *Zîc-i Hâkaanî*'sinin çok okunaklı bir nüshası Nahcevanî'nin Tebrizdeki hususi kütüphanesinde mevcut bulunmaktadır. Bu nüshanın umumiyetle tanınmadığı kanaatinde olduğumdan bu bilginin burada dercini faydalı olarak mülâhaza ettim.

Bu husus, Uluğ Beyin zîcînin önsözündeki ifadeleri ile de teyid edilmektedir.⁷⁶

Uluğ Beyin rasathane kurma tasavvurunun, Uluğ Beyin zihninde, bu plânın bilfiil tahakkukundan epey zaman öncesine gittiği muhtemeldir. Çünkü, yukarıda görüldüğü üzere, bu fikrin onun çocukluğu sırasında Merâğa Rasathanesine yapmış olduğu ziyaretten mülhem olması ihtimal dahilinde bulunuyor. Diğer taraftan da, yine yukarıda işaret edildiği gibi, bir kaynağımızın uyandırdığı intibaa göre, rasathane kurma fikri daha önce zikri geçen Semerkand medresesindeki ilmi faaliyet atmosferi içinde doğmuştur. Eldeki tafsîlât çerçevesi içinde, bu iki fikrin birbirleriyle tamamen kabili telif olabileceklerine burada işaret etmekte de fayda mülâhaza edilebilir.

Hâzırda, rasathane kurma kararının, Gıyasüddinin Semerkande gelmesinden önce verilmiş olduğu katıyetle görülmüyor. Çünkü Gıyasüddin daha Semerkande gelmeden bu mesele üzerinde konuşulmuş ve bu maksatla bir alet de yapılmıştı.⁷⁷ Mektubunda bildirdiğine göre, Gıyasüddinin tavsiyesi üzerine bu alet tahrîp edilerek yerine bir yenisi yapıldı.

Gıyasüddin, rasathane binasının kendi tavsiyelerine uygun olarak inşa edildiğini söylüyor,⁷⁸ ve onun bu beyanını kısmen olsun teyid edici bir mahiyette olmak üzere, başka bir kaynak da rasathane plânının Gıyasüddin ile Muinüddin-i Kâşî tarafından hazırlandığını haber veriyor.⁷⁹ Bütün bu tafsîlâtta şu sonucu çıkarabiliriz ki, filî olarak, rasathanenin inşası işi Gıyasüddinin Semerkande gelişinden hemen sonra başlamıştır. Gıyasüddin, başka bir münasebetle, rasathane yerinin tesviyesi ile ilgili tartışma neticesinde kendisine büyük şöhret sağladığını açıklıyor ki,⁸⁰ bu da, Semerkande gelişi üzerinden henüz çok bir zaman geçmeden rasathane inşası işinin başlamış olduğu fikrini teyid eder mahiyettedir.

Gıyasüddinin, rasathane için yapılacak aletler bahsinde büyük ölçüde müessir olduğu anlaşılmakla beraber, tavsiyelerinin

⁷⁶ Sayılı, aynı eser, s. 265.

⁷⁷ Aşağıda s. 60-61, 80-81 (512a).

⁷⁸ Aşağıda s. 61, 73, 81, 90 (512b, 517a).

⁷⁹ Sayılı, aynı eser, s. 264-265.

⁸⁰ Aşağıda s. 64-65, 83-84 (513b-514a).

tadile uğramaksızın kabul edilmiş olmadığı da kendi verdiği tafsilâttan görülmüyor. Mektubunda söylediğine göre, bu tadiller hususiyle Uluğ Bey tarafından yapılmıştır.⁸¹ Gıyasüddinin verdiği bazı tafsilat kendisinin büyük aletler inşasına taraftar olduğunu ve süds-i Fahri adı verilen meridyen aletine hususî önem verdiğini gösteriyor.⁸² Uluğ Bey Rasathanesinin müme-yiz ve mütebariz vasfını onun muazzam boyutta bir meridyen aleti ile cihazlandırılmış olması teşkil ettiğine göre, bu müesseseye bu ana özelliğini Gıyasüddinin kazandırmış olduğu önemli sonucunu çıkarmak gerekir gibi görünmektedir. Mamafih, bu meselede şüpheli bazı noktaların bulunduğu. işaret etmek icap eder. Bu meseleyi daha teferruatlı olarak başka bir vesile ile incelemiş bulunuyorum.⁸³

Gıyasüddinin Semerkand Rasathanesi çalışmaları üzerindeki tesirinin mahiyeti ve derecesi hakkında kesin bir karar vermek için takip edilecek en verimli yolun, *Uluğ Bey Zîci* ile Gıyasüddinin *Zîc-i Hâkaanî*'sinin teferruatlı mukayesesi olacağı tahminen söylenebilir.⁸⁴ Bununla beraber, bu meseleyi, rasathanedeki faaliyette hakim bazı görüşler ve bu müessesede tatbik edilen faaliyet programı bakımından, eldeki mektup yardımı ile de incelemek ve aydınlatmak mümkün olmaktadır. Bunu daha önce adı geçen İslâm Rasathaneleri adlı kitabımda yapmış bulunuyorum. Fakat burada da bu konuya kısaca temas edilecektir.

Gıyasüddin, mektubunda, rasathanedeki ilmî çalışmayı tek başına yapmak arzu ettiğini sarih olarak ifade ediyor, ve ayrıca da, rasathanelerde umumiyetle bir iki kişiden fazlasının çalışmasının zarurî olmadığını beyan ediyor.⁸⁵ Halbuki, Gıyasüddinin bu sözleri İslâm rasathanelerinde cari usullere aykırı düşüyordu, ve anlaşıldığına göre Gıyasüddin Uluğ Beyi bu hususlarda gelenekten ayırmaya tamamen muvaffak olamamıştır. Çünkü onun bu görüşlerinin Semerkand Rasathanesinde pek tatbik mevkiine konmamış olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten,

⁸¹ Aşağıda s. 73, 90-91 (517a).

⁸² Aşağıda s. 61, 81 (512b).

⁸³ Sayılı, aynı eser, s. 285-286.

⁸⁴ Bakınız, E. S. Kennedy, *Parallax Theory in Islamic Astronomy* Isis,, cilt 47, 1956, s. 33-52.

⁸⁵ Aşağıda s. 67, 85-86 (514b).

Semerkind rasathanesine bağlı astronom sayısının Gıyasüddinin arzusuna göre ayarlanmamış olduğu anlaşılıyor. Mamafih, herhalde onun tesiriyle, rasathane ilmi kadrosunun mutaddan küçük olduğunu da söyleyebiliriz. Yine, Gıyasüddin, on onbeş yıllık bir çalışma devresinden bahsediyor.⁸⁶ Halbuki İslâm astronomları umumiyetle rasathanelerdeki ideal çalışma programının asgarî olarak otuz yıl sürmesi gerektiği fikrinde idiler. Uluğ Beyin hususiyle bu bakımdan geleneğe bağlı kaldığı görülüyor.⁸⁷

Gıyasüddinin eldeki mektubu Semerkand Rasathanesi aletleri hakkında mevcut kaynaklarımızın en zenginlerinden biridir ve bu konudaki bilgimizi önemli ölçüde arttırmaktadır.⁸⁸ Astronomi ilminin çeşitli dallarının sınıflandırılması ile ilgili olarak verdiği tafsîlâtın İslâm ilim adamları arasında mevcut uzmanlaşma temayülleri bakımından değerli malûmatı ihtiva etmekte olduğunu da burada kaydedelim.⁸⁹ Mektupta rasat tekniği ve astronomların çalışma metodları hakkında da klasik çerçevede bilgi verilmektedir.⁹⁰

Ayrıca, bu vesikada, Merâa Rasathanesi hakkında⁹¹ ve Semerkand Rasathanesinin kuruluşu ile ilgili olarak yapılan büyük tören üzerinde⁹² ilgi çekici veriler ve teferruat bilgisi ile karşılaşmaktadır. Nihayet, tesviye ve alet yapma gibi bazı teknik hususlarda da bu vesile ile Gıyasüddinden münferit ve müteferrik bazı malumat derlemek mümkündür. Taban notlarında görüldüğü üzere, bu çeşitli konuların ekserisi yönünden eldeki mektubu başka bir vesile ile incelemiş bulunduğumdan, burada bunlara yeniden temas edilmeyecektir.

⁸⁶ Aşağıda s. 70, 88 (515b-516a).

⁸⁷ Sayılı, aynı eser, s. 268-270, 278-280, 319.

⁸⁸ Sayılı, aynı eser, s. 286-287.

⁸⁹ Sayılı, aynı eser, s. 249-252.

⁹⁰ Sayılı, aynı eser, s. 287.

⁹¹ Sayılı, aynı eser, s. 196-197.

⁹² Aşağıda s. 61, 64-65, 81, 83-84, (512b, 513b-514a); Sayılı, aynı eser, s. 277.

GHIYÂTH AL DÎN AL KÂSHÎ'S LETTER ON ULUGH
BEY AND THE SCIENTIFIC ACTIVITY PATRONIZED
BY HIM

The letter of Ghiyâth al Dîn Jamshîd al Kâshî presented here in its Persian text as well as Turkish and English translations contains much information of a detailed nature on Ulugh Bey (1394-1449) and the scientific activity organized and patronized by him.

This interesting and important document was made available to me by Professor Mojtaba Minovi, Cultural Advisor, Embassy of Iran, Ankara. It forms part of a volume consisting of a collection of manuscripts. This "collection" is in the Sipah-sâlâr Mosque Library of Tehran and is registered there under number 2916.

The letter itself occupies pages 510a to 517b of the said volume. It is followed by what seems to be an extract from another letter of Ghiyâth al Dîn, which occupies pages 517b to 518b. As this second letter contains no information on scientific activity in secular fields, I have left it outside the scope of the present work.

I have already announced this manuscript and given a partial account and analysis of it in a paper I read at the IXth International Congress of the History of Science (Barcelona and Madrid, September 1959), and I have quoted and analyzed several passages from it in my book entitled *The Observatory in Islam*.¹

¹ Ankara, 1960. Just when the present work was completed and ready to be sent to the printers, the recently published translation of Ghiyâth al Dîn's letter by E. S. Kennedy (*A Letter of Jamshîd al Kâshî to his Father, Orientalia*, vol. 29, 1960, pp. 191-213) came to my attention. A perusal of Professor Kennedy's work showed that disagreeing points between his translation and mine are quite numerous, and furthermore, in commenting and analyzing this source we happen to have dwelled upon almost entirely different questions. I have therefore decided to proceed with the publication of my

Professor Minovi kindly placed a photographic copy of this letter at my disposal for publication and analysis, and it was to him that I turned for the solution of certain difficulties encountered in the text. Professor Necati Lugal too was helpful in a similar manner.

As its title suggests, this manuscript is not in Giyâth al Dîn's own hand, and the copyist was not familiar with astronomy, as can be seen from a number of mistakes he made in writing scientific and technical terms. The script is *nasta'liq* and quite beautifully written. The copyist was apparently a calligrapher.

In the text given below, in quite a few cases missing dots were added and wrong ones corrected without indicating them in the footnotes. The footnotes contain especially the corrections which are not obvious and the cases which seemed to be characteristic of the copyist. A similar procedure was adopted for such marks as *hamza*, *mad*, the strokes for *g*, etc. The copyist does not seem to have preferences in the choice of *hamza*, *wâw*, and *yâ*, and in attaching *in*, *ân*, *ast*, etc., to the words or in writing them separately. The same is true for the edited text presented here. Certain words for which two spellings are permissible are seen to have been written in both forms. I have not unified such spellings. Occasionally there was merely a question of making a

manuscript, i.e., my translation and analysis, as is, and in doing this I have not gone into any comparisons with Professor Kennedy's translation.

I have learned, in addition, from Professor Kennedy's work that the Persian text of Ghiyâth al Dîn's letter was published some years ago by Mr. M. M. Ṭabāṭabāi (*Ghiyâth al Dîn Jamshîd-i Kāshânî, Âmûzish wa Parwarish*, year 10, No 3, 1319 Hs., pp. 1-16, 57-62). The same text had been published once before by Mu'tamid al Dawla in the journal *Zanbil* (Ṭabāṭabāi, *ibid.*, p. 58), and Mr. Ṭabāṭabāi used this published text as well as the Sipahsâlâr manuscript in editing the text of Ghiyâth al Dîn's letter. Whether this indicates the existence of another manuscript copy of the letter or not, does not come out clearly. Mr. Ṭabāṭabāi is seen generally not to have indicated the differences between his text and the Sipahsâlâr manuscript, although these differences are not small in number; he seems to have felt free to make corrections or small alterations. I have therefore presented separately the notes referring to his text and have indicated them with numbers followed by letters.

choice between two alternatives. In such cases the adopted forms represent preferable variants and not necessarily corrections of the versions indicated in the footnotes.

The copyist corrected his transcription, as may be seen from his few additions on the margins and certain corrections and alterations he made on the text itself. Several serious mistakes, in addition to those made in writing scientific terms, remained uncorrected, however. There is at least one space left blank, and probably three,² and this suggests that the copyist had difficulty in reading parts of the manuscript from which he transcribed. The nature of some of the mistakes also leaves the same impression.

The manuscript is quite well preserved. There are a few soiled and dampened spots, however, and also places with small blots of ink or traces of pen which interfere with the script. Punctuations and paragraphs are mine.

The style of the letter may be described as conversational. Verbs and even whole phrases implied by the rest of the sentence are at times missing, and certain conjunctions are often used too frequently. The third person singular and the third person plural of the verbs, as well as the tenses, are seen to have sometimes been used in a careless manner. One also encounters occasionally certain colloquial forms of words, i. e., spellings corresponding to such pronunciations.

I have, in principle, not made any corrections or alterations which would change the style, although it was not always easy to draw a clear line of demarcation between the conversational style or colloquialism and grammatical error or mistakes due to the copyist. It may be added that interference with the style of the letter is not advisable. For in certain cases the meaning is seen to change if a formal non-conversational interpretation is adopted, and, as in the long sentence near the very end of the letter, it is the meaning given by the conversational style that fits the context well.³

Expressions such as *falak al a'lâ*, as they occur in the manuscript, are more natural in Persian than their correct Arabic forms.

² See below, text, p. 66 (514b), and notes 53, 78.

³ Another clear example of this nature is found in the statement to which note 44 is attached in the Persian text below.

They are not justified by any Persian rules of grammar and are wrong according to Arabic rules, however, and these are not conversational or colloquial. Generally speaking, such cases may be left unchanged, they may be corrected, or they may with little alteration be converted into Persian forms. The different examples of such cases encountered in the present manuscript did not all seem suited to the adoption of one general rule. Some were left unchanged, others were corrected, and a few were converted into Persian forms. The latter treatment may be considered somewhat arbitrary.

The word *ghalaba* in this letter occurs in a sense which is unusual in Persian.⁴ Interestingly enough, however, one of the two meanings indicated by the context is common for this word in Turkish. This may possibly give a clue for the true meaning of another phrase whose sense is somewhat doubtful. Ghiyâth al Dîn mentions a son of Ptolemy, who, as implied by the context, collaborated with him in his astronomical work. As the factual content of such a statement is somewhat strange, it may be wondered if here too, the true meaning is what this expression would mean in Turkish in the version indicated in the footnote.⁵ The variant given there is very close to a Turkish expression meaning "alone", "by himself", and this alternative meaning would seem to fit better into the context of the passage.

One sentence in the text is partly illegible.⁶ According to Professor Minovi this must be an incorrectly reproduced quotation of a verse. I have given an approximate edition and translation for it with the help of the context.

The letter is dated 7 *Dhû'l qa'da*, but the year is not mentioned. It is stated, however, that the observatory was more than half finished at the time.⁷ We know from other sources that the construction of the observatory started or took place in 823 (1420 A. D.), and there is indirect evidence that it did not take very long; it was probably started in 823 and completed

⁴ See below, pp. 57, 66, 95; 103 (511a, 514b).

⁵ See below, p. 67 note 56, p. 103, note 13.

⁶ See below, text, notes 80, 81.

⁷ See below, pp. 71, 74, 106, 110 (516a, 517b).

in 824.⁸ From this letter we learn that the construction started in warm weather, most likely in summer.⁹ In the years 1420 and 1421 *Dhū'l qa'da* fell around the eleventh month of the solar year. The letter must have been written therefore in 823, or perhaps in 824.

In this rather long letter of about four or five thousand words Ghiyāth al Dīn gives vent to some of his personal feelings. The letter reveals his impatience with a certain Badr al Dīn in Kāshān and contains a few salvos against those who pretend to know things they are ignorant of, but otherwise it is devoted almost solely to information concerning the scientific activity of the group assembled around Ulugh Bey. We apparently owe this particular characteristic of the letter to Ghiyāth al Dīn's father's interest in such matters. For a large part of this information is given in answer to his father's queries.

Presumably, the newsy character of the letter was also owing to the fact that it was intended to be read to friends and relations, perhaps according to the custom prevalent at the time. One remark made by Ghiyāth al Dīn, at any rate, suggests that he expected the contents of his letter to come to the knowledge of a circle of interested people in Kāshān. For he warns that his statements concerning Qāḍizāda should not make people think that there is some kind of a lack of good relations between Qāḍizāda and himself.¹⁰

At least part of the present letter was also contained in an earlier letter; the news was repeated in view of the possibility that one of the letters might fail to reach its destination.¹¹ The fact that Ghiyāth al Dīn gives a detailed description of his new environment in this letter suggests that these were the first letters of this nature sent home. Ghiyāth al Dīn was therefore relatively new in Samarqand at the time. Other details dwelled upon below suggest that he had probably been there for about a year or so at the time this letter was written.

⁸ A. Sayılı, *The Observatory in Islam*, pp. 270-271, 279.

⁹ See below, pp. 64, 101 (513b).

¹⁰ See below, pp. 73, 108 (516b-517a).

¹¹ See below, pp. 55, 93 (510b).

The letter contains much new information on Ulugh Bey, on Ghiyāth al Dīn himself, on Qāḍīzāda, on the group of scientists around Ulugh Bey and on their activity in general, and on other miscellaneous matters. In the following pages I shall make a study and analysis of most of this information.

There are brief references in other sources too to Ulugh Bey as a kind-hearted person, but here we have much specific detail concerning his character and personality. We learn from the details given by Ghiyāth al Dīn that Ulugh Bey was not only gentle and good-natured but that his scientific spirit played a major part in shaping his personality, that integrity and seriousness of purpose lay at the bottom of his modesty and courtesy.¹²

The present letter supplies us with a picture of Ulugh Bey not as a statesman and administrator but as a scientist among those brought together and patronized by him. Regular scientific meetings, most of which were apparently of an informal character, were held very frequently, and Ulugh Bey took part in almost all of these. Ghiyāth al Dīn refers also to lectures by Ulugh Bey on the *Tuhfa* and the *Tadhkira*,¹³ so that Ulugh Bey seems to have even given lessons, apparently at the madrasa in Samarqand which was one of the most important scientific centers of the group. There is also mention of long scientific discussions that took place even between the madrasa students and Ulugh Bey.¹⁴ It may be inferred from here that Ulugh Bey too apparently took part in the discussions which followed the lectures given at the madrasa.

Ulugh Bey must have been twenty six or twenty seven years old when the present letter was written. Apparently he was quite an accomplished scientist at the time and was hard at work increasing and perfecting his knowledge of astronomy and mathematics. On several occasions, Ghiyāth al Dīn refers to problems which were proposed by Ulugh Bey.

¹² See below, pp. 73-74, 109 (517a); Sayılı, *The Observatory in Islam*, pp. 261-264.

¹³ See below, pp. 57, 95 (511a).

¹⁴ See below, pp. 74, 109 (517a).

Ghiyâth al Dîn states that when Ulugh Bey was present at the madrasa, lectures on mathematics were given preference,¹⁵ and this indicates that Ulugh Bey was especially interested in mathematics or theoretical astronomy. Again, our author specifically says that Ulugh Bey was busy with the mathematical sciences.¹⁶ Ulugh Bey's skill in mental calculation is in particular emphasized.¹⁷ Another source speaks of Ulugh Bey's memory as extraordinary or even phenomenal and illustrates this with the help of an anecdote.¹⁸

In this letter Ghiyâth al Dîn is seen to refer to Ulugh Bey as king. Strictly speaking, this is not true; for Ulugh Bey became king officially only in 1447. But in practice he acted as an independent king, and other sources too contain similar references to him.¹⁹

We learn from Ghiyâth al Dîn that at the time the letter was written the serious and systematic scientific work at Samarqand had been pursued for a period of ten or twelve years.²⁰ It must have started therefore in the years 1408-1410 approximately. Ulugh Bey was about fifteen years old at that time. This makes it rather doubtful that this scientific activity was actually initiated by Ulugh Bey. Conversely therefore there is also the problem of the extent to which Ulugh Bey himself was a product of the scientific environment existing in Samarqand before his time.

This is a question pertaining to the formative stages of an important scientific activity. There should be no doubt that Ulugh Bey was the major force responsible for the effective development of this activity and that to him goes a big share of the credit for this large-scale organization. The history and genesis of this movement constitute another matter, however, concerning which no information is given in Ghiyâth al Dîn's letter.

¹⁵ See below, pp. 57, 95 (511a).

¹⁶ See below, pp. 68, 104 (515a).

¹⁷ See below, pp. 56-57, 94 (510b-511a).

¹⁸ Dawlatshâh, *Tadhkira al Shu'arâ*, ed. E. G. Browne, 1901, pp. 262-263; Sayılı, *ibid.*, pp. 280-281.

¹⁹ W. Barthold, *Ulugh Bey und seine Zeit, Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes*, vol. 21, No 1, 1935, p. 105.

²⁰ See below, pp. 68, 104 (515a).

The origins and sources of Ulugh Bey's truly genuine and passionate interest in science must undoubtedly be complex. It probably owed something to the general environmental conditions existing in Samarqand and to the personal influences of certain scientists there. The name of Qâdîzâde in particular comes to the foreground. For he was Ulugh Bey's teacher.²¹

The present letter contains only one item which may be of interest appropos of this general question. We learn, namely, from Ghiyâth al Dîn that Ulugh Bey had visited the site of the Marâgha Observatory during his childhood and that this had apparently made an impression on him.²² It may be therefore that his interest in astronomy is partly traceable to that childhood visit.

It may be mentioned in this connection that Qâdîzâda had chosen Samarqand and had traveled a long way to it in order to increase his knowledge.²³ Samarqand was therefore probably a rather important center of scientific work already before Ulugh Bey's lifetime. There is also the example of Qushjî, on the other hand, who, some years later and certainly after the beginning of organized scientific work under Ulugh Bey's patronage, secretly left Samarqand and went to Kirmân to study mathematics and astronomy.²⁴

The story has it that Qâdîzâda had decided to go to Khusasan in quest of knowledge in spite of his lack of the necessary funds, and that at the last moment his sister placed her jewels in Qâdîzâda's travel pack.²⁵ This reveals that Qâdîzâda was an idealist moved with strong passion for the acquisition of scientific knowledge. And we learn from Ghiyâth al Dîn, moreover, that he was a very earnest, honest, and modest person.²⁶ All these traits are strongly reminiscent of those of Ulugh Bey. As Qâdîzâda was Ulugh Bey's teacher, it would appear that he

²¹ Sayılı, *ibid.*, pp. 265, 266, 267.

²² See below, pp. 60, 98 (512a).

²³ See below, pp. 43-44, note 40.

²⁴ A. S. Ünver, *Ali Kuşci*, Istanbul 1948, p. 11; Sayılı, *ibid.*, p. 268.

²⁵ See below, p. 43.

²⁶ See below, pp. 73, 108 (516b-517a).

had an influence of some importance in the formation of Ulugh Bey's scientific personality.

Qâḏizâda should perhaps not be entirely merged with the scientific and cultural atmosphere proper to Samarqand, however. For he is said to have completed his studies in his native city of Bursa, in Anatolia, before going to Khurasan,²⁷ and his renowned teacher in his new environment, Sayyid Sharif-i Jurjâni, complained that he was much more inclined towards mathematical disciplines than toward speculative subjects.²⁸

According to Bailly there were more than one hundred scientists in the group gathered around Ulugh Bey.²⁹ This statement seems to be quite correct. For Ghiyâth al Dîn speaks of the presence of sixty or seventy mathematicians there, and in addition, he mentions the existence of astrologers and calculators. He does not have high regard for these mathematicians, however, and he seems not to consider them worthy of being so designated; he looks upon them as more or less beginners endeavoring to increase and perfect their knowledge.³⁰

A number of the scientists of the group were attached to the Samarqand madrasa. They taught there and represented different scientific fields. The majority among them were busy working on mathematics.³¹ Not all of the scientists of the group were attached to the Madrasa, however. Ghiyâth al Dîn refers to the two groups as if they were distinct and separate, especially when he speaks of the discussions following the lectures at the Madrasa.³²

We learn from this letter that the scientists who were not attached to the Madrasa, and Ulugh Bey himself, attended these lectures rather frequently and that the lectures were followed by discussions, which at least could, and at times were,

²⁷ A. Adnan-Adivar, *Osmanlı Türklerinde İlim*, Istanbul 1943, p. 4; see also below, p. 43.

²⁸ See below, p. 43.

²⁹ J. S. Bailly, *Histoire de l'Astronomie Moderne depuis la Fondation de l'École d'Alexandrie jusqu'à l'Époque de MDCCXXX*, vol. 1, Paris 1785, p. 259.

³⁰ See below, pp. 68, 104 (515a).

³¹ See below, pp. 57, 95 (511a).

³² See below, pp. 58, 95 (511a).

quite elaborate. It is clear that in addition to these lectures and subsequent argumentations, which we may call colloquium, there were also scientific meetings, which were very likely held at the palace. Thus, Ulugh Bey is spoken of as busy working on certain scientific problems, such people as Ghiyâth al Dîn and Qâdîzâda being at his presence.³³ Reference is made on several occasions to such meetings, or sessions of work, or discussions, at the presence of Ulugh Bey.

Ghiyâth al Dîn speaks of himself and other scientists as being constantly in the company of Ulugh Bey.³⁴ There should be no doubt therefore that the scientific meetings, as distinct from the colloquia at the Madrasa, took place in the palace and that they were, partly at least, informal or semi-formal. Attendance apparently varied and was not compulsory, as Ghiyâth al Dîn speaks, e. g., of a meeting where the majority of the scientists were present.³⁵ As he took advantage of this occasion to speak on a subject to which he attached special importance, it may be concluded that the majority was not always present.

The professors of the Madrasa too were among those who took part in these meetings which were presumably held at the palace. Qâdîzâda, e. g., whose name frequently occurs in connection with these meetings, taught at the Madrasa and probably was its director,³⁶ while Ghiyâth al Dîn was apparently not attached to that institution. For he speaks of himself as distinct from "the people of the Madrasa".³⁷ Qâdîzâda lived at a chamber or cell (*withâq*),³⁸ which apparently refers to a room of the kind usually made available around the court-yards of the madrasas, while Ghiyâth al Dîn had a house.³⁹

³³ See below, pp. 61-63, 99-100 (512b-513a).

³⁴ See below, pp. 69, 70, 105, 106 (515b).

³⁵ See below, pp. 63, 100 (513a).

³⁶ Şâlihî Zâkî, *Âthâr-i Bâqîya*, vol. 1, Istanbul 1329 H., p. 187; Adıvar, *ibid.*, p. 5.

³⁷ See below pp. 58, 95 (511a).

³⁸ See below, pp. 62, 99 (512b).

³⁹ See below, pp. 62, 65, 99, 102 (512b, 514a).

A passage of great interest, throwing light on the parts played both by Qâḏîzâda and Ulugh Bey in the formation of the scientific circle at Samarqand, is found in Tashköprüzâda. I reproduce it in a slightly abbreviated form in the following paragraphs.

'Qâḏîzâda (Mûsâ Pâshâ ibn Muḥammad ibn Maḥmûd) decided to go to Khurasan and Transoxiana for completing his education, but he was afraid his relatives would not allow him to leave. So he decided to go away secretly. His sister who knew of Qâḏîzâda's intention hid some of her most valuable jewels inside the books Qâḏîzâda was taking along so that he would not have financial trouble.

'He gained great fame and came to be accepted as the most learned person of his new home. He became Ulugh Bey's teacher. As Ulugh Bey was inclined toward mathematical sciences, Qâḏîzâda too concentrated on these sciences and spent most of his time and energy on these fields. In 814 (1411-1412) he wrote his commentary on Chaghminî and in 815 his commentary on the *Ashkâl al Tasîs*.

'It is related that Qâḏîzâda was a student of Sayyid Sharîf but that they did not keep being on good terms with one another. Their relation as teacher and student was interrupted, and their scientific discussions led them to animosity and harsh words. Qâḏîzâda said concerning Sayyid Sharîf that he was unable to teach mathematics, while the latter used to say that Qâḏîzâda's mind was enslaved by mathematics and that it was turned away from philosophical thought.

'One of the kings of bygone times had built a large madrasa, in Samarqand, with many cells and with (four) separate classrooms, one on each side of the madrasa building, each classroom being under a separate professor. Qâḏîzâda became professor here, and his rank came to be more elevated than the other professors. The other professors would come, together with their students, to listen to Qâḏîzâda's lectures. Occasionally Ulugh Bey too would attend these lectures.

'One day Ulugh Bey dismissed one of the four professors, whereupon Qâḏîzâda stopped lecturing and went into seclusion.

Ulugh Bey thought he was ill and visited him to bid him speedy recovery, and when he discovered the reason for Qāḍīzāda's retirement he rescinded his previous order. He promised Qāḍīzāda that such an arbitrary act would not be repeated and apologized to him and asked him to return to his post. Qāḍīzāda resumed his teaching.

'Ulugh Bey noticed deficiencies in the astronomical tables of earlier times and decided to set up new observations. For this purpose he brought into being an observation well in Samarqand. He started observations first with Ghiyāth al Dīn Jamshīd, but as the latter died after a short time Qāḍīzāda was charged with the work. In his time too this affair could not be completed. For Qāḍīzāda died before finishing it, and it was therefore completed by 'Alī Qushjī.'⁴⁰

Sayyid Sharīf 'Alī ibn Muḥammad al Jurjānī died in 1413.⁴¹ Tashköprüzāda's statement to the effect that Qāḍīzāda concentrated in mathematical sciences because of Ulugh Bey's inclination for them should therefore not be interpreted as a reference to Qāḍīzāda's initial interest in those branches of science but to his resumption or pursuance of such work with renewed vigor.

The Samarqand madrasa in question and Qāḍīzāda in particular were therefore important factors in the genesis of the important scientific movement seen in Samarqand, but Ulugh Bey was undoubtedly the main personality responsible for its remarkable flowering and development.

I have not tried to identify this Samarqand madrasa which served as the nucleus of the Samarqand scientific movement from its very initial stages on and which continued to play the same important part after Ulugh Bey's patronage became the main driving force behind it. Sources contain supplementary information on these topics and on the Samarqand madrasas

⁴⁰ A. Tashköprüzade, *Shaqâiq-i Nu'mânîya*, Turkish tr. by M. Majdî, Istanbul 1269 H., pp. 37-40.

⁴¹ G. Sarton, *Introduction to the History of Science*, vol. 3, part 2, Baltimore 1948, p. 1461.

of the period, so that their study may throw further light of a substantial nature on the subject.⁴²

One source at least seems to assign to this madrasa an important part as an institution which directly led to the foundation of Ulugh Bey's Samarqand Observatory.⁴³ As, on the other hand, the inclusion of the secular sciences in the madrasa curriculum was not usual in Islam, the fact that in Ulugh Bey's time there apparently was a large number of scientists representing various mathematical and astronomical fields on the staff of this Samarqand madrasa must have very likely been due to that patron's initiative and encouragement.

As to the degree of proficiency and knowledge of the scientists making up this Samarqand group found around Ulugh Bey, various factors seem to complicate the relevant statements of Ghiyâth al Dîn. Ghiyâth al Dîn is anxious to demonstrate his own proficiency and skill as a scientist and wishes to give his father the good news that although he is a newcomer in the group he is clearly the superior of them all, and he deals with this subject mainly in two different contexts.

Our author states firstly that at Samarqand he is valued highly as a scientist, and he explains that Samarqand is a place where the greatest authorities in all the sciences are assembled and that the esteem and appreciation of such eminent scientists carry great weight.⁴⁴ On such occasions he often speaks in general terms. In one case at least he goes into details, however, and mentions the various important books written by the most distinguished among them.⁴⁵ The second type of reference occurs when he gives specific examples illustrating the superiority of his own knowledge to that of the others, and for this purpose he dwells upon details showing the deficiencies in the knowledge of the other members of the group.

There should be no doubt concerning the veracity of these statements of Ghiyâth al Dîn, speaking in general terms

⁴² See, e. g., Barthold, *ibid.*, pp. 149 ff.; Sayılı, *ibid.*, pp. 271, 272, 273.

⁴³ T. H. Kari-Niazov, *Astronomicheska Shkola Ulugbeka*, Moscow 1950, pp. 55-60; Sayılı, *ibid.*, p. 272.

⁴⁴ See below pp. 56, 57, 63, 94, 95, 100 (510b, 511a, 513a).

⁴⁵ See below, pp. 57, 95 (511a).

at least. In one of the manuscript copies of Miram Chalabī's commentary on Ulugh Bey's *zīj* there is a marginal note concerning a discussion between Ghiyāth al Dīn and Ulugh Bey in which Ghiyāth al Dīn was speaking, in the presence of highly placed personalities, on whether or not the tables of the equation of the sun should be arranged so that this quantity would become zero at apogee and perigee,⁴⁶ and this is very reminiscent of the examples Ghiyāth al Dīn gives in his letter, the part he declares to have played, and his behavior and attitude in such matters as reflected by his statements.

Ulugh Bey speaks of Ghiyāth al Dīn as 'the perfecter of the awāil sciences' and 'the unraveler of the intricacies of problems' in the introduction to his *Zīj*.⁴⁷ Ghiyāth al Dīn himself refers, moreover, in the present letter, to such praise made about him by Ulugh Bey.⁴⁸ It is true that Ulugh Bey as well as other sources refer to Qāḍīzāda too in very laudatory terms and sometimes more so than is the case with Ghiyāth al Dīn,⁴⁹ but this should not necessarily indicate that Qāḍīzāda was regarded as a scientist of greater stature than Ghiyāth al Dīn.

Unfortunately, Ghiyāth al Dīn does not mention any other names besides that of Qāḍīzāda, whom he describes as the most learned among them. In speaking of Qāḍīzāda, he seems to contradict himself in two sentences coming one after the other. He says first that Qāḍīzāda possesses the theoretical knowledge contained in the *Almagest*, and immediately after this he adds that Qāḍīzāda is a beginner in theoretical astronomy.⁵⁰ This latter statement is probably an exaggeration. For Ghiyāth al Dīn himself informs us that Qāḍīzāda had already finished writing his commentaries on Chaghmīnī and on a book dealing with the Fundamental Theorems of Euclid's *Elements*,⁵¹ books which secured him fame as a scientist.

⁴⁶ P. Luckey, *Die Rechenkunst bei Gamshīd Bin Mas'ūd al Kāshī*, 1951, pp.

4-5.

⁴⁷ Sayılı, *ibid.*, p. 265.

⁴⁸ See below, pp. 68, 104-105 (515a-515b).

⁴⁹ Sayılı, *ibid.*, p. 270, note 28, p. 265.

⁵⁰ See below, pp. 71, 107 (516a).

⁵¹ See below, pp. 57, 95 (511a).

It may be conjectured that although Ghiyâth al Dîn speaks of the scientists of Samarqand in two different contexts, one of which necessitates his emphasizing their proficiency and the other leading him to illustrate their deficiencies, these two types of statement need not necessarily be irreconcilable. In fact, we learn from Ghiyâth al Dîn that most of the scientists in Samarqand were apparently specialized or specializing in various narrow scientific fields. Thus, Qâḍîzâda and certain others were poor calculators,⁵² but there were specialist calculators among the scientists of the group.⁵³

Such a conciliatory scheme does not seem to be entirely satisfactory, however, and Ghiyâth al Dîn does leave us undecided between the two extremes. He apparently did not strike very neutral lines in the choice and the presentation of his facts or in his general statements, or in both.

Specific examples of scientific problems in which the scientists of the group had difficulty are cited, and their study gives us concrete ideas concerning the state of the knowledge of these scientists, although it is likely that Ghiyâth al Dîn chose here the examples which were most flattering to himself and least flattering to the rest of the group in general. I shall consider here most of these examples, and I shall do so mostly with an eye to detecting possible exaggerations.

Ghiyâth al Dîn asserts that Qâḍîzâda could not calculate except by setting up lattices with the help of manuals. Then he changes into the plural third person and adds, 'they read line by line and complete the lattice step by step'.⁵⁴ It is possible that this last description was not applicable to Qâḍîzâda, and it should certainly not be applicable to the "calculators", but the impression created is that even Qâḍîzâda, the most learned of the group, knew so little.

Ghiyâth al Dîn does the same sort of thing on one other occasion. He refers to a previous statement of his concerning leveling operations and says, "As I mentioned before, they

⁵² See below, pp. 72, 107-108 (516b).

⁵³ See below, pp. 57, 95 (511a).

⁵⁴ See below, pp. 72, 107-108 (516b).

objected, but I explained to him (to Qâḏizâda) that I was right."⁵⁵ It seems that, as Qâḏizâda was, after Ghiyâth al Dîn himself, the most learned in the group, our author is interested in particular in illustrating his superiority over Qâḏizâda.

In the problem concerning the visual ray and the true horizon⁵⁶ the difficulty encountered probably concerned calculation and the derivation of numerical results with a given degree of accuracy.

Ghiyâth al Dîn says that the scientists of the group were unaware of the existence of a *suds-i Fakhri* of about three meters diameter at the Marâgha Observatory.⁵⁷ This is strange. For apparently there was no *suds-i Fakhri* at Marâgha. Moreover, his statement would have been important if he had said that they did not know the instrument called *suds-i Fakhri*, but this is not what he says.⁵⁸

The details given by Ghiyâth al Dîn concerning his explanation, lasting for two "siderial hours", of why leveling could be done with a certain kind of triangle⁵⁹ also produce the impression that his statements are not free from exaggerations and they too indicate that he was perhaps a bit over-anxious to prove his superiority over the rest of the scientists around Ulugh Bey.

We may finally mention the example wherein Ghiyâth al Dîn says that he brought to the attention of the group a mistake found repeated in all books on astronomy, namely the inaccurate assertion that the maximum equation for the moon's anomaly on its epicycle takes place at a point of the eccentric region such that when this point is joined to the prosneusis center the line connecting these two points is perpendicular to

⁵⁵ See below, pp. 74, 110 (517b).

⁵⁶ See below, pp. 60, 97-98 (512a).

⁵⁷ See below, pp. 61, 98 (512b).

⁵⁸ See, Sayılı, *ibid.*, pp. 285-286.

⁵⁹ See below, pp. 64-65, 101-102 (513b-514a). Şâlih Zakî remarks that, in contrast to Qâḏizâda, Ghiyâth al Dîn was pretentious (*ibid.*, p. 189), and speaking of Qâḏizâda's commentary on Ghiyâth al Dîn's tract on the derivation of the value of $\sin 1^\circ$, he says that Qâḏizâda's work is in reality more than a mere commentary (*ibid.*, p. 133).

the diameter passing through the apogee and similar statements made in connection with the planets.⁶⁰

Ghiyâth al Dîn is apparently speaking here in terms of the system of spherical shells, and it is of interest that according to E. S. Kennedy one of the rare mistakes found in Al Birûnî is one of a similar nature.⁶¹

It is probably true that in spite of ten or twelve years of "serious" work the scientific level of the group still left much to be desired. The nature of their scientific meetings, as described by Ghiyâth al Dîn, indicates that the scientists of the group themselves did not claim to know everything but that they were making a concerted effort to improve and enrich their knowledge.

Apparently, Ghiyâth al Dîn's superiority over the other scientists around Ulugh Bey did not consist merely of the fact that his knowledge was more profound in certain branches but also in that, in contrast to most of them, he had a very good knowledge of all the branches of astronomy and mathematics. This may be surmised from the nature of his publications as well as from certain statements of his found in the present letter.⁶²

Ghiyâth al Dîn states, e.g., that he knows well the branches of practical astronomy whereas Qâdîzâda does not.⁶³ Apparently he does not mean to say, however, that there was nobody in the group who was skilled in these fields. For at the beginning of his letter he speaks of the existence of many astrologers and calculators, and of people representing all scientific fields, in the group.⁶⁴

One point that comes out in relief from the flattering remarks of Ulugh Bey concerning Ghiyâth al Dîn is that Ghiyâth al Dîn had a substantial knowledge of things and that he had it ready at his disposal.⁶⁵ That consultation of books, except for ascer-

⁶⁰ See below, pp. 62-63, 99-100 (513a-513b).

⁶¹ E. S. Kennedy, *The Sasanian Astronomical Handbook Zīj-i Shâh*, *Journal of American Oriental Society* vol. 78 1958, p. 250.

⁶² See below, e.g., pp. 71-73, 107-108 (516a-516b).

⁶³ See below, pp. 71-72, 107-108 (516a-516b).

⁶⁴ See below, pp. 57, 95 (511a).

⁶⁵ See below, pp. 68, 104-105 (515a-515b).

taining factual data, was considered a sign of shortcoming for a scientist is clearly seen from Ghiyâth al Dîn's comment intended to put his father's mind "at ease".⁶⁶

The other most distinguished members of the group were Ulugh Bey himself, Qâdizâda, and 'Alî Qushjî. 'Alî Qushjî and Ulugh Bey were younger than Ghiyâth al Dîn. In fact, Ghiyâth al Dîn probably did not know 'Alî Qushjî. Qâdizâda survived Ghiyâth al Dîn for a number of years, but he may not have been younger than him.

We have concluded that the present letter was written in 1421 or 1422. Ghiyâth al Dîn's arrival in Samarqand would therefore seem to have taken place in 1420 or 1421. Certain sources speak of him as having been invited, together with another scientist from Kâshân, and upon Qâdizâda's recommendation, to join the group of scientists around Ulugh Bey.⁶⁷

Strong words of praise emanating from Ulugh Bey and concerning Ghiyâth al Dîn's character are quoted by Ghiyâth al Dîn in the present letter.⁶⁸ Another source states that Ghiyâth al Dîn lacked refined manners but that because of his profound knowledge Ulugh Bey used to put up with him and respect him.⁶⁹

Ghiyâth al Dîn states that he had left his home for the first time in his life to join Ulugh Bey's circle.⁷⁰ In view of a certain statement he makes at the beginning of his *Zij-i Khâqânî* to be referred to presently, it is possible that what he really means is that he had left Kâshân for the first time to be attached to the service of a king. It may be surmised from the opening remarks of his *Zij-i Khâqânî* as well as from the immediately following items that Ghiyâth al Dîn had for some time been cherishing the idea of being invited to a royal court.

Ghiyâth al Dîn's short tract on astronomical instruments written in 818 (1415-16) for Sultan Iskandar, the Qaraqoyunlu king according to Barthold's guess,⁷¹ probably formed therefore

⁶⁶ See below, pp. 72-73, 108 (516b).

⁶⁷ Barthold, *ibid.*, p. 162; Sayılı, *ibid.*, p. 271, note 34.

⁶⁸ See below, pp. 68-69, 104-105 (515a-515b).

⁶⁹ Barthold, *ibid.*, p. 164.

⁷⁰ See below, pp. 69, 105 (515b).

⁷¹ Barthold, *ibid.*, p. 163.

part of a letter. This indicates that although he had not joined any royal courts before 1420, his name was, as would be expected, quite well-known in scientific circles.

Again, his *Zīj-i Khâqânî fi Takmil-i Zīj-i Ilkhânî fi'n Nujûm* (the Khâqânî Zīj in Completion of the Ilkhânî Zīj...), which was written not later than 816 (1413-14),⁷² is also dedicated, as is seen from its title, to a king (khâqân), who according to Barthold was probably Ulugh Bey's father Shâhrukh;⁷³ reference is seen at the beginning of this *zīj* to Ulugh Bey himself, however. This too was therefore a dedication made from a distance.

In his present letter Ghiyâth al Dîn clearly denies the existence of any serious scientific deficiencies in the *Ilkhânî Zīj*.⁷⁴ The word *completion* (takmil) in the title of his book in question should not therefore be interpreted as referring to the correction of any serious mistakes but rather to the greater variety of subject matter and the richer content of Ghiyâth al Dîn's new *zīj* and to his work in bringing the tables up-to-date.⁷⁵

The relation of the origin of this Samarqand group of scientists to the project of founding an observatory is not clear. From the passage from Tashköprüzâda given above, the initiative for the creation of that institution is seen to have come from Ulugh Bey himself and this is corroborated by Ulugh Bey's own statement in the opening words of his Zīj.⁷⁶

It is likely that Ulugh Bey had conceived this project at a rather early date. For, as we have seen, this idea was probably traceable in his mind to his visit of the Marâgha Observatory during his childhood. Again, as mentioned before, the impression gained from one source is that the idea of founding the observ-

⁷² P. Luckey, *ibid.*, p. 5.

⁷³ Barthold, *ibid.*, p. 163.

⁷⁴ See below, pp. 66-67, 103 (514b).

⁷⁵ See also, E. S. Kennedy, *A Survey of Islamic Astronomical Tables, Transactions of the American Philosophical Society, New Series*, vol. 46, part 2, 1959, zīj 20.

A copy of Ghiyâth al Dîn's *Zīj-i Khâqânî*, written in a very readable hand, exists in the private collection of Mr. Nakhjawânî in Tabriz. I mention this as I have never seen any reference to it in the literature.

⁷⁶ See, Sayılı, *ibid.*, p. 265.

atory grew out of the scientific work started at the Samarqand madrasa referred to above.

It seems quite certain, at any rate, that the decision to found an observatory antedated Ghiyâth al Dîn's arrival in Samarqand. For the matter had apparently been taken up and an instrument constructed already before his arrival.⁷⁷ This instrument was destroyed upon Ghiyâth al Dîn's recommendation and another one constructed in its place.

Ghiyâth al Dîn states that the observatory building was constructed in accordance with his recommendations,⁷⁸ and another source mentions Ghiyâth al Dîn and Mu'in al Dîn al Kâshî as the two persons who prepared the plan of the observatory.⁷⁹ The construction of the observatory must therefore have started shortly after Ghiyâth al Dîn's arrival in Samarqand. On another occasion Ghiyâth al Dîn says that he secured great fame as a result of the argument connected with the leveling of the observatory grounds.⁸⁰ This too suggests that he was relatively new in Samarqand at the time.

Ghiyâth al Dîn had apparently much to say in the choice of the instruments, but his recommendations were not adopted without alteration. The alterations are said by him to have been due especially to Ulugh Bey himself.⁸¹ Certain details he gives show that he was not only in favor of instruments of large size but also that he attached great importance to the special type of meridian arc called *suds-i Fakhri*.⁸² The dominant feature of Ulugh Bey's Samarqand Observatory was its huge meridian arc. Ghiyâth al Dîn must therefore have played a major part in determining the main characteristic of this observatory. But there are certain doubtful points in the details of this question.⁸³

⁷⁷ See below, pp. 60-61, 98 (512a).

⁷⁸ See below, pp. 61, 73, 98-99, 109 (512b, 517a).

⁷⁹ See, Sayîh, *ibid.*, pp. 264-265.

⁸⁰ See below, pp. 64-65, 101-102 (513b-514a).

⁸¹ See below, pp. 73, 109 (517a).

⁸² See below, pp. 61, 98 (512b).

⁸³ See, Sayîh, *ibid.*, pp. 285-286.

The nature and extent of Ghiyâth al Dîn's influence on the work done in the Samarqand Observatory should probably be based primarily on a detailed comparison of Ulugh Bey's *Ẓij* with Ghiyâth al Dîn's above-mentioned *Ẓij-i Khâqânî*.⁸⁴ Certain points concerning general policies and plan of work can be studied on the basis of the present letter, however. I have done this on another occasion, but the conclusions may be repeated here in a summarized form.

Ghiyâth al Dîn makes it clearly understood that he wished and hoped to do the work at the observatory almost single-handed, and he states, furthermore, that it is in general not necessary to have more than one or two persons work in the observatories.⁸⁵ This runs contrary to Islamic practices, and apparently Ghiyâth al Dîn could not make Ulugh Bey entirely break away from tradition. For his point of view was not adopted, as is seen from the fact that several persons were associated with that institution. His influence seems, however, to have probably resulted in reducing the number of scientists on the staff of the observatory. Again, Ghiyâth al Dîn speaks of a period of work lasting for ten or fifteen years,⁸⁶ whereas the minimum of the ideal period of work generally associated with the observatory in Islam was thirty years. In this respect Ulugh Bey followed tradition.⁸⁷

The present letter of Ghiyâth al Dîn constitutes one of our richest sources on the instruments of the Samarqand Observatory and supplements the other sources of information on this topic.⁸⁸ His classification of the branches of astronomy and the details he gives in this connection are of great interest with respect to fields of specialization prevalent among the scientists of Islam.⁸⁹ He also gives information concerning classical methods of work and techniques of observation.⁹⁰

⁸⁴ See, e. g., E. S. Kennedy, *Parallax Theory in Islamic Astronomy*, *Isis*, vol. 47, 1956, pp. 33-52.

⁸⁵ See below, pp. 67, 103 (514b).

⁸⁶ See below, pp. 70, 106 (515b-516a).

⁸⁷ See, Sayılı, *ibid.*, pp. 268-270, 278-280, 319.

⁸⁸ See, Sayılı, *ibid.*, pp. 286-287.

⁸⁹ See, Sayılı, *ibid.*, pp. 249-252.

⁹⁰ See, Sayılı, *ibid.*, p. 278.

The letter contains, furthermore, interesting data and items of news concerning the Marāgha Observatory⁹¹ and also on the big ceremony accompanying the initial acts of foundation of the Samarqand Observatory.⁹² Finally, isolated bits of information are found in it touching certain technical matters such as leveling and construction of instruments. As I have discussed most of these items in another connection, as indicated in the preceding footnotes, I shall not repeat them here.

⁹¹ See, Sayılı, *ibid.*, pp. 196-197.

⁹² See below, pp. 61, 64-65, 99, 101-102 (512b, 513b-514a); see also, Sayılı, *ibid.*, p. 277.

FARŞÇA METİN

(PERSIAN TEXT)

صورت کتابتی که مرحوم غیاث الدین کاشی
از سمرقند بخدمت والد مرحوم نوشته

اشتیاق والتیاع بشرف دستبوس خداوندی تا حدیست که معنی
« لو كان البحر مدادا لكلمات ربي لنفد البحر قبل ان تنفذ كلمات ربي »
واردست . حق سبحانه وتعالی لطیفه که متضمن ادراك آن سعادت باشد
کرامت کناد ، بمنه وجوده .

این عبودیت سابع ذی قعدة الحرام شرف اصدار یافت . والحمد لله¹
علی جزیل آلائه .

بعدهما^{1a} ، نصیحتی که فرموده بودند مبنی برآنکه چون بشغل
رصد مبارك مشغول است بفن دیگر مشغول نشود ، بتخصیص عروض
وامثال آن ، چه بقدر اشتغال ثباتی^{1b} از اول قاصر آید و نیز مردم حل
مقدار معرفت آن بر مقدار معرفت آنچه مجدداً بآن | مشغول شده کنند ،
این نصیحت در عین^{1c} صوابست ، وبر حسب فرموده مطیع و منقاد است .

اما حمل کردن مردم را جوابی هست . پیشتر^{1d} مطول مصحوب
تاجران قم ارسال رفته بود وثانیا^{1e} در قلم می آورد تا شاید از هر دو یکی
بشرف مطالعه همایون رسد .

1 والحمد لله

^{1c} نصیحت عین

^{1b} مبانی (ثباتی)

^{1e} بود ، ثانیا

^{1a} بعدما

^{1d} پیشتر

حال آنکه در کاشان و آن نواحی که ² در هر فنی ^{2a} يك دو کس
 بآن فن موسوم باشد و بعضی ^{2b} احباب او بر حسب مدعاء او اورا ^{2c}
 معتقد اند اگر نیز نداند و بعضی ^{2d} اورا متکرنند اگر نیز داند و حقیقت ³
 حال کسی را معلوم نمی باشد ، اکنون در خطه⁴ سمرقند ، حرسها الله
 عن الآفات ، چنین نیست . چه اولاً پادشاه اسلام ، خلد الله ملکه و سلطانه ،
 فرمان ^{3a} فرمای هفت اقلیم ، دانشمند است ، بحمد الله و المنة . و این معنی
 نه بر سبیل رسم ادب میگوید و می نویسد .

حقیقت آنکه اولاً قرآن مجید اکثر بحفظ می داند و تفاسیر ^{4a}
 آن و سخن مفسران را در هر آیتی مستحضراست و هر سخنی آیتی بر فور
 باستشهاد آورد . و اقتباسات لطیف فرمایند و هر روز دو جزو برد خوانند
 بقراءت و حفاظ حاضر باشند ، هیچ ^{4b} غلطی واقع نشود . نحو و صرف
 نیکو داند و ترکیب عربی بغایت خوب نویسند ، و همچنین از فقه
 خیلی واقفند و از منطق و معانی بیان با خبر و از اصول همچنین .

و اقسام ریاضیات را خود تمام ^{4c} میوزند ⁵ و بحدی رسانیده اند که
 روزی در سواری خواسته اند که تاریخی معلوم بوده که دوشنبه بوده از
 رجب که ما بین عاشر و خامس عشر ^{5a} واقع باشد ثمان ^{5b} عشر و ثمانمیه ،
 چه روز بوده باشد از موسم سال . از همین معلوم بحساب هوائی⁶
 بر پشت اسب تقویم آفتاب بیرون آورده اند بدرجه^{6a} دو دقیقه ، ^{6b} و چون
 فرود آمدند ازین بنده پرسیدند .

⁵ میوزند	⁴ اکثری دارد تفاسیر	³ حقیقه	² کر
			⁶ بحیات هوایی
^{2c} مدعاء اورا	^{2b} شده باشد بعضی	^{2a} اگر در فنی	
^{4a} اکثری از بردارد ، تفاسیر	^{3a} و فرمان	^{2d} نداند ، بعضی	
^{5a} خامس و عاشر	^{4c} خود	^{4b} هیچ	
	^{6a} بدرجه و دقیقه	^{5b} سه ثمان	

واقعا چون در حساب هوایی⁷ مقادیر در ذهن نگاه می باید داشت
 $\frac{510b}{511a}$ و دیگری بیرون آورد و در قوت حافظه قصوری هست نتوانست که
 آنرا^{7a} بدرجه و دقیقه بیرون آورد و بدرجه اکتفا کرد. و این عمل
 هیچکس را از ابنای روزگار میسر نشود و نتوانند.^{7b}

غرض که درین فن مهارتی تمام دارد و براهین بر اعمال نجومی نیکو
 بیرون می آرند^{7c} و استنباط ضوابط میفرمایند کما ینبغی و درس تذکره
 و تحفه چنان میفرمایند که هیچ مزیدی بران متصور نمی شود.

و ثانیاً^{7d} در سمرقند اکنون فحول علما جمعد و مدرسانی که در جمیع
 علوم درس میگویند متعدد هستند و غلبه^{7e} تمام بفن ریاضیات مشغولند
 و از انجمله چهارکس اشکال تاسیس نصف کرده اند و یکی شرح تجنیس⁸
 حساب و دیگری رساله نوشته در برهان هندسی بر مسئله^{8a} خطائین،⁹
 وقاضی زاده روی که از آنها همه اعلم است شرح¹⁰ (10a) چغمینی و شرح
 اشکال تاسیس نوشته، و منجم و مستخرج خود بسیارند.

و همچنین هر فن که هست غلبه^{10b} از ارباب آن فن جمع اند.
 غرض که چون این بنده بهمچنین جای^{10c} در آمد هر¹¹ (11a) کس
 چشم و گوش برگذاشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصابست.
 هر چند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقه درس حاضر
 می شوند^{11b} و چون حاضر شد درس ریاضیات مقدم میدارند. این^{11c}

7 حاب هوایی	8 تجیس	9 خطائینی ؟
10 و شرح	11 و هر	
7a آن	7b نتواند	7c می آورند
7d ثانیاً	7c طلبه	8a بر مسائل
10a و شرح	10b طلبه	10c همچین جانی
11a و هر	11b میشود	11c و این

بنده هم حاضر شد و یکی^{11d} از امتحان طلبه اینست که کس که بخلقه^{11e} درسی در آید غافل است از آنکه چه مسئله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آنرا بتجدید مطالعه^{11f} بلیغ کرده اند.

چون آغاز بحث میشده^{11g} هر بار بعناية الله تعالی و بیمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی¹² کرده ، چنانکه چند چیز که ایشانرا از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارد^{12a} بر سخن ایشان | کرده^{511a}
^{511b} و نکتههای لطیف^{12b} بیرون آورده که همه حیران مانده اند.

و پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشانرا واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است.

مثلا خواسته بوده اند که^{12c} اسطرلابی که يك گز قطر آن باشد بسازند و ۱۰۲۲¹³ ثابته¹³ مرصوده¹³ مجموع بر آن ثبت کنند . بمطالع ممر آنها احتیاج بوده . همه مستخرجانرا فرموده اند که^{13a} باتفاق عمل کنند . قریب صد و پنجاه ازان بوده است که بطریقی که در زیج ایلخانی مذکور است و چنانچه ایشان فهم کرده بوده اند^{13b} مطلوب حاصل نمیشده و در مانده بوده اند .

ریاضی دانان را اشارت فرموده بودند که بقوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند . هیچکس نتوانسته است که تحقیق آن بکند . و آن چنان¹⁴^(14a) بوده که چون مطالع ممر آن کواکب بحسب ظاهر زیج بیرون می آورده اند و بر کره یا اسطرلاب می نهاده اند بر^{14b} محل شکل صورت نمی افتاده . مثلاً^{14c} انورالفرق دین جائی می افتاده که بسیار¹⁵^(15a)

15	14	12
بسیاری	و آنچنان	دخل کامل 12
12a	11e	11d
وارد	میشد	شد . یکی
13a	12c	12b
نرمودند که	خواستند که	لطیفه
14b	14a	13b
اند صورت بر	آنچنان	بودند
	15a	14c
	بسیاری	نمی افتاد و مثلاً

از صورت دب اصغر^{16a} دورتر. و هر چند عمل می کرده اند و فکر دران مینموده اند راست نمی آمده.

چون این بنده رسید در روز این مسئله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده اند و این بنده بر فور و هم در مجلس تصحیح یکی از ان بکرد^{16b} و منشاء غلط ایشان بیان کرد^{16b} و تطبیق کلام زیج برین سخن بیان^{16c} کرد چنانکه^{16d} در خاطر بندگی سلطنت پناهی نشاند، و همچنین در خاطر ریاضی دانان. و نیز طریقه دیگر بیان کرد. چون هزار کوکب بر اسطرلاب نهد^{16e} احتیاج آن نیست که مطالع ممر استخراج کنند. همه را که کار بسیار است بطریق^{16f} دیگر هم می توان نهاد. غرض که نهادن آن باین^{16g} بنده رجوع کردند و این بنده آنرا تمام کرد.

دبگیر خواسته بوده اند که بر^{16h} سطح | دیوار¹⁷ سرای بندگی^{511 b / 512 a} حضرت مقیاسی نصب کنند و خطوط ساعات مستویه بران رسم کنند. و چون سطح آن دیوار در سطح نصف النهار با^{18a} اول سمت نبود و مثل¹⁹ آن هرگز کسی نکرده بود هیچ کس نتوانست²⁰ کردن. بعضی گفته بودند که در یکسال توان کرد. یعنی هر گاه که آفتاب^{20b} باول برجی رسد^{20c} دران روز مترصد باشند،²¹ تا ساعتی نشانی میکنند^{21b} تا تمام شود.

18 دب الاصغر	17 دیواری	18 تا
19 نبود مثل	20 هیچ نتوانست	21 باشد
16a دب الاصغر	16b کرده	16c براین بیان
16d چنانچه	16e نهد	16f همه را، که کار بسیار است و طریق
16g براین	16h بودند بر	18a یا
19a نبود مثل	20a هیچ نتوانست	20b هرگاه آفتاب
20c برج برسد	21a باشد	21b میکنند

چون این بنده رسیده^{21 e} فرمودند که این بنده در یکروز تمام کرد، چنانکه^{21 d} امتحان آن باسطرلاب بزرگ کردند، موافق و مطابق²² بود. و همچنین فرمودند که از یک سوراخ توان چنان کنند که هر بار^{23 a} وقت عصر بمذهب ابوحنیفه²³ آفتاب درآید و در دیگر اوقات نه. آنرا هم در روز راست کرد. و امثال هذه بسیار.^{23 a}

دیگر فرمودند که شخصی بر موضعی که استدارت زمین آنجا صحیح است بایستد.^{24 (24 a)} فرضاً قامت آنکس بذراع²⁵ الید^{25 a} سه گز و نیم باشد. خطی^{25 b} شعاعی که از وجه^{25 c} او خارج شود^{25 d} و تماس سطح زمین شود بر^{26 (26 a)} چه بعد افق حقیقی را قطع کند و بر²⁶ چه^{26 b} انخطاط²⁷ بفلک اعلی²⁸ رسد. این^{28 a} هم چند مدت فکر کرده بودند و کسی بیرون نیاورده است، با وجود آنکه سهل است. آنرا هم که در روز که^{28 b} پرسیدند این بنده بیرون آورد. و طلبه خود هرکس علیحده امتحان میکردند.

آمدیم بسخن رصد. بندگان حضرت سلطنت پناهی، خلد الله ملکه و سلطانه، در طفولیت عمارت رصد مراغه دیده بوده اند. فرموده که^{28 c} من آنرا به چشم و قوف ندیدم.^{28 d} اصحاب پیش از آمدن این بنده گفته بوده اند^{28 e} که او زیر آن بلند نیست^{28 f} و آنکه مردم در آن نشینند.

موافق مطابق		23	مذهب حنفی
موضعی استدارت زمین صحیح بایستد		24	
هر		26	
21 c	رسید	21 d	چنانچه
23 a	وامثال اینها بسیار است	21 a	موضع استدارت زمین صحیح بایستد
25 b	خط	25 c	از بصر
26 a	شود درجه	26 b	کند و درجه
28 b	روزی که	28 c	بودند، فرمودند که
28 e	بودند	28 f	که آویزان به بند نیست
		25	ذرع
		28	بفلک الاعلی
		22 a	هر روز
		25 a	بذرع ید
		25 d	میشود
		28 a	در این
		28 d	ندیده

ودو حلقه فرموده بودند از برنج ریخته شش گز قطر جهت رصد میل و رصد آفتاب برنج بطلمیوس، غافل از آنکه بعد از بطلمیوس هر رصد که کردند انواع دقتها²⁸ استنباط کردند و ازان حلقه که بطلمیوس کرده بود²⁹ عدول کردند، چه آن از خللی خالی نیست.

$$\frac{512 a}{512 b}$$

و هیچکس معلوم نداشت که منبر هندسی که در میان عمارت رصد مراغه است چیست و از چه چیست. این بنده صورت حال بعرض همایون رسانید و تفاوتی که بواسطه حلقه تواند بود بعرض رسانید و نیز آنکه در زمان عضدالدوله حلقه²⁹ ساخته بوده اند که ده گز^{29 b} قطر داشته و این^{29 c} ازان نیز کمتر^{29 d} است و عوض آن در رصد مراغه منبر هندسی ساخته بوده اند و آنرا سلس فخری خوانند نصف^{29 e} قطر این شش گز بود.

این حلقه را فرمودند که شکستند و بالت دیگر که بنده گفت ساختند و بناء عمارت رصد بموجبی^{29 f} که این بنده شرح داد فرمودند. آن جمیع حالات و امثال ذلك اعیان مملکت معلوم کردند.^{29 g}

و همچنین هر روز و هر هفته چیز دیگر در میان می آید و این بنده بیمن همت آن خداوند^{29 h} آنرا بچوگان استحضار از میدان اشکال بیکموی^{29 i} بیرون میبرد.

روزی بندگی حضرت سلطنت خلد الله ملکه و سلطانه بمطالعه مشغول بوده^{29 j} و قاضی زاده روی در آن مجلس بوده. حواله برهانی

²⁹ بودند

²⁸ g وقتها

²⁹ c قطرداشت و آنرا سلس فخری خوانند و این

²⁹ e ساخته بودند نصف

²⁹ h همت خداوند

²⁹ a حلقه ای

²⁹ f بوجهی

²⁹ i بیک روی

²⁹ b بودند ده گز

²⁹ d از آن کتر

²⁹ g مملکت را معلوم کردید

²⁹ j بود

بقانون مسعودی کرده بوده اند.^{30k} در انجمن مجلس قانون را حاضر فرموده اند و آن³⁰ برهان طلبیده^{30a} در آن . چون در مجلس محقق نمیشده^{30b} قاضی زاده قانون را بوثاق برده که تحقیق کند . بعد از دو روز باز برده و گفته که همانا^{30c} درین محل ترکی هست که مسئله بتام ازان بیرون نمی آید ، نسخه دیگر باید طلبید و بان مقابله کرد . و این بنده در آن دو روز بجمعی یومی³¹ (31a) از خانه بیرون^{31b} نرفته³² در آن حال پیش رفته بود . هنوز قاضی زاده در مجلس بود . همین که نظر بندگی حضرت سلطنت پناهی برین بنده افتاد فرمود که مولانا این مسئله را بیرون آورد . قانون مسعودی بدست این بنده | داد . همین که این بنده پنج شش سطر ازان مسئله فروخواند تمامی مسئله^{32a} بیان کرد . و هیچ ترک در آن نسخه نبود .

512 b
513 a

وامثال ذلك درین مدت بسیار واقع شده . شرح همه نوشتن بتطویل انجامید . غرض که درین مجمعی چنین بعد از اظهار این همه ناموس کسی را مسلم میدانند نه بر تقلید^{32b} یا بمجرد لاف^{32c} اینکس . در ابتدا که این بنده آمده بود مسئله³³ چند هست که در تحفه و نهایی الادراک و شرح تذکره ، مولانا نظام الدین نیشابوری و شرح تذکره سید شریف قدس سره بیکسختن^{33a} بود اما غلط بود ، این بنده آنرا در مجلس حضرت سلطنت پناهی عرضه میداشت . بافواه بمسامع تمام علما رسید . در غیبت بر خروشیده بوده اند که^{33b} چون کسی در سخنی که چندین بزرگ بران اتفاق کرده اند اعتراض کند این را اثبات³⁴ (34a) می باید .

30 اندان	31 حی یومیه	32 گرفته ؟	33 مسئله	34 اثنا
29 k بودند		30 a فرمودند، آن برهان را طلبیده	30 b نمیشد ، بیرون	
33 c گفته همانا		31 a جمعی یومیه	31 b بیرون	
32 a مسئله را		32 b میدانند بر تقلید	32 c یا مجرد قول و لاف	
33 a تذکره میرسد شریف بیک سخن		33 b بودند که	34 a کند اثبات	

روزی در مجلسی که اکثری حاضر بودند چنان ³⁵ (35 a) بجای مستوفی هم بطریق تخیل و هم ³⁶ برهان ^{36 a} هندسی بیان کرد که همه باتفاق مسلم داشتند. و چون بندگی حضرت سلطنت پناهی صاحب فن است و بغایت نیکو میدانند و نیز ارباب فن بسیارند کسی نمیتواند که چون مسئله محقق شد چون پیشتر سخن دیگر گفته باشد ³⁷ (37 a) بخیرگی لم ولا نسلم کند تا عوام معتقد شوند. چه خواص صاحب فن حاضرند.

ویکی ازان مسایل آنست که گفته اند غایت تعدیل خاصه^۱ قر از منطقه^۲ خارج آنجا باشد که چون خطی ازان بنقطه^۳ محاذاة کشند قایم باشد بر قطری که باوج گذرد. و در جمیع نسخ این فن که الی یومنا هذا نوشته اند این مسئله چنین ^{37 b} نوشته اند و غلطست چرا که اگر بهفت ³⁸ (38 a) جزو و پنجاه دقیقه ^{38 b} زیر نقطه^۴ محاذاة گذرد قایم باشد والا قایم نباشد. و در متحیره بهمین قیاس غلط کرده اند | و منشاء غلط همه آنست که در آفتاب غایت تعدیل آنجاست ^{38 c} که چون خطی ازان بمركز عالم کشند بر قطر مذکور قایم باشد. و بطالمیوس در مجسطی بران برهان کرده ^{38 d} و در ³⁹ قر و در دیگر کواکب بران حمل کرده، و هیچ تأمل نکرده اند که درینها بران حمل نمیتوان کرد.

و دیگر روزی که تسویه^۵ زمین جهة استخراج خط نصف النهار در موضع رصد شده و آنرا بنایان فاخر کرده بودند، بعد ازان خشک شده بود، رفته بودیم که خط نصف النهار پیدا کنیم. خواستیم که امتحان کنیم اول که سطح مستوی است یا نه. بندگی حضرت سلطنت

35 وچنان	36 و هم	37 باشد
38 که بهفت	39 کرده در	
35 a اکثر حاضر بودند وچنان	36 a برهان	
37 a بیشتر سخن گفته باشند	37 b مسئله را چنین	
38 a که بهفت	38 b دقیقه	
38 c آنجائی است	38 d برهان اقامه کرده	

پناهی خلد الله ملکه و سلطانه و جمیع اکابر و اعیان و علما و ارباب فن حاضر بودند جهة میزان بنایان⁴⁰ که بآن تسویه⁴¹ سطح کنند^{41a}. معتمدا⁴² جهة رصد مثلثی تراشیده بودند که هر سائی ازان چهارگز هاشمی بود.

پسر^{42a} استاد بنا که سرآمده^{42b} بنایان است گفت که اول مثلث را احتیاط می باید کرد که هر دوسای او متساوی اند یانه. این بنده گفت که اگر نیز متساوی نباشند میتوانیم تسویه^{42c} سطح بدان کردن. ^{42e} قاضی زاده و سایر موالی که درین فن دخل دارند بیکبار گفتند چون شود، هرگز همچنین نتواند بود. این بنده گفت که حالی هوا هنوز خنک است و آفتاب بلند بر نیامده. تحقیق تسویه کنیم. بعد ازان در خاطر شما بنشانیم که چون است.

الغرض که چون تسویه را تمام کرد ایشانرا فراموش نمیشد. تقاضاء اثبات دعوی کردند. همه^{42d} نشستیم و این بنده آغاز کرد و گفت فرض کنیم که^{42e} یکی ازین دو ضلع مثلث که شما میگوئید متساوی می باید فرض کنیم که بیک گز ازان دیگر کوتاه تر است. و برین موجب مثلث | برجایی کشید⁴³ و برهان هندسی بران بیاورد و یکساعت نجومی مقدمات و براهین گوناگون بران گفت تا در خاطر ایشان نشاند و همه مسلم داشتند. بعضی که اعلم بودند پیشتر و بعضی دیگر پستر، بعد ازان که⁴⁴ (44a) مسلم داشتند.

$\frac{513 \text{ b}}{514 \text{ a}}$

⁴² معتمدا ؟

⁴¹ تسوید

⁴⁴ آنکه

^{42b} سرآمد

^{42e} و گفت که

^{42a} پس

^{42d} همه

⁴⁰ بنایان

⁴³ کنند

^{41a} میکنند

^{42c} کرد.

^{44a} آنکه

این بنده تقصیر نکرد، چه قریب پانصد کس از خاص^{44b} حاضر بودند؛ و گفت که شما این مسئله^{44c} همچنان آسان در مدت دو ساعت نجوی که این همه دلایل بران بیاوردم^{44c} و هم میکنید. ⁴⁵ حق علم است که پیش من امثال این^{45a} بدیهیت. و درین حال ^{45b} استاد اسمعیل گفت اول احتیاط کنیم^{45c} که هر دو ضلع متساوی است یا نه این بخاطر من^{45d} در آمده است. چه احتیاج باین همه گفت و شنید دارد. و همه خلق از خواص و عوام^{46a} گوش داشتند که ببینند که مال این مسئله چون میشود. چه اول مسئله بود که در رصد روی نمود و خلاف واقع^{46b} شده بود. و چون ظفر یافتن این بنده را معلوم کردند موجب شهرتی تمام گشت.

و هر که خواهد که این^{46c} حالات بعین الیقین ببیند^{46d} اینک فرس و سوار و اینک^{46e} میدان. بیابند و تفرج کنند. سخن دراز کشیدیم و همچنین باقیست.

آمدیم بآنکه^{46f} نوشته بودند که شمس الدین نامی گفت که مرا فرستاده اند که از مولانا بدرالدین ذات الخلق⁴⁷ بستانم جهت نمودار. حال آنکه آنکس این سخن را بتمامه دروغ گفته. اولاً آنکه اینجا هیچ شمس الدین نامی نیست که مقرب باشد و او را بمهمات فرستند. دیگر^{47a} آنکه اینجا هیچ کس احتیاج بنمودار ذات الخلق⁴⁷ ندارد. و اینجا استاد ابراهیم صفار را فرمودند بخانه^{47b} این بنده آید و بحضور

45 میکند		46 خواص و عوام	47 ذات الخلق
44b خواص	44c بیاورند	45a آن	45b بخاطر این بنده
45b و در آن حالی که	45c کنید	46c خواهد این	46d آمدیم بر سر آنکه
46a خاص و عام	46b نموده خلاف در روی واقع		
46d ببیند	46e سوار، اینک		
47a و دیگر			

این بنده يك ذات الخلق⁴⁷ تمام کرده . و در ذات الخلق⁴⁷ مشکل کار
کار صفاست⁴⁸ (18a) نه معرفت آلت، بخلاف اسطرلاب که در آن
هر دو مشکل است .

واستاد ابراهیم را در صفاری چنان یدبست⁴⁹ که این بنده دو
نقطه یکی بر مقعر⁵⁰ حلقه | ویکی بر محدب آن جهة موضع قطب را^{51a}
51b نشان کرد و بر هر^{50a} يك دائرة صغيرة رسم کرد .^{50b} مثقب بر يك
طرف آن نهاد^{50c} و راست آن طرف دیگر سوراخ بدر کرد . ده سوراخ^{50d}
در همه حلقها برینصورت کرد که یکی غلط نگردید و راستی حلقها در
یکدیگر خود چه شرح دهد . و دیگر اینجا هیچ خبر^{50e} نبود راست
یا دروغ که مولانا بدرالدین ذات الخلق⁴⁷ دارد و یا ندارد ، و اگر
اکنون جایی⁵¹ بدست آورند یا بسازند .
مردم سفری دروغ
بسیار میگویند .

دیگر آنچه قلدوة المحققین و زبدة⁵² السالکین مولانا ابراهیم ادام الله
بره و انقاسه⁵³ (53a) الشریفه روایت کرده بودند که از مولانا بدرالدین
نقل بود^{53b} که گفت در رصد مراغه غلبه بودند و مع هذا^{53c} در
زیج ایلخانی چند جا ناقص است ، حال^{53d} آنکه آنها که میگویند در زیج
ایلخانی⁵⁴ چند جا ناقص است از نقصان علم و فکر و ذهن ایشانست .
و اگر در بعضی مواضع اندك خدشه^{54a} هست امثال مولانا بدرالدین
آنها نمیدانند ، و آنجا که او می گوید که غلطست راست و در^{54b}

جای 51	مقعر 50	49 یدبست	48 صفاست
خانی 51		53 بره	52 رنده
50b کرده	50a کرده و پیر		48a مشکل عمل صفاری است
50c خبری	50d کرده سوراخ		50c نهاده
53c مراغه طلبه بودم . مع هذا	53b نقل کرده بود		53a بر انقاسه
54b راست در	54a خدشه ای		53d و حال

غایت خوبیست. تفاوتی که حال ازو معلوم نمیشود^{54c} بواسطه تفاوت سستی^{54d} است که ازان مدت تا اکنون تفاوت واقع شده.

و آنچه^{54e} گفته که دران رصد بسیار کس بودند، حال آنکه کسی از برای آن میبایسته⁵⁵ (55a) که پادشاهان سابق که رصد فرموده اند خود نمی دانسته اند هر آینه چند کس میبایسته^{55b} که درگاه که سخن همه موافق آید اعتماد بران کنند. اینجا چون پادشاه خلدالله تعالی ملکه^{55c} و سلطانه خود بنفسه صاحب رصد است و خود هم عمل میکند، اینجا اگر بسیار نباشد باکی نیست. بطلمیوس خود پادشاه بود و خود را رصد و یک پسر او⁵⁶ یک کس و دو کس میتوان⁵⁷ (57a) کرد. آن مقداری⁵⁸ (58a) باشد که یک کس را کار بیشتر باید کرد. این چنین نیست که سنگ هزار من که آنرا البته^{58b} یک کس بر نمیتواند داشت. بلکه همچنانست که^{58c} گندم هزار من که آنرا^{58d} یک کس بجای نقل تواند کرد.

و آنکه فرموده که مولانا^{58e} بدرالدین ریاضیات نیک میداند: ریاضیات بی مسئله^{58f} چند از اقلیدس یاد دارد | و قطعا^{58g} بعمل در نمیتواند آورد. چنانست که کسی بعضی قواعد نحوی⁵⁹ یاد دارد و هیچ ترکیب عربی نتواند کرد. و همچنین^{59a} مولوی حقیقت شعاری چون اکثر اوقات بعلوم⁶⁰ حقانی مشغولند و ملتفت نجوم و ریاضیات نمیشوند و صدق در جبلت⁶¹ دارند چون مولانا بدرالدین سخن چند از اقلیدس گفته باشد او پنداشته که ریاضیات میداند. این بنده او را بسیار دیده است، و مردم اینجا او را هم نیک میدانند.

55 پایسته	56 ویک برار؟	57 سوال؟	58 مقدار
59 نجومی	60 معلوم	61 جبلت	
54c میشود	54d سخن	54e آنچه	55a نمیبایست
55b میبایست	55c الله ملکه	57a سؤال	58a مقدار
58b که البته	58c همچنان که	58d من را	58e آنکه فرموده مولانا
58f میداند بی مسئله ای	58g دارد، قطعا	59a کرد. همچنین	61a میدانند

جماعتی که اندك وقوف از نجوم دارند سالها لاف زده اند. اکنون میشوند که در سمرقند رصد میکنند وایشانرا التفاتی نمیکند و بخود فکر نمیکند. میدانند که از رصد هیچ نمیدانند. هر آینه جز بنی وانکار⁶² خاطر خود را خوش نتوانند کرد. بغیر از مولانا بدرالدین خیلی دیگر هستند که همان سخن گویند. اگر چنان شود که آن کسان اکنون سمرقند در آیند و بمجالس مباحث ریاضیات حاضر شوند خواص و عوام را معلوم شود که لافهای ایشان هیچ بوده.

امروز در سمرقند حرسها الله عن الحدثان امثال آن کسان شصت هفتاد هستند^{62a} وایشانرا بحساب ریاضی دانان در می آورند. ^{62b} چه اکنون ده دوازده سالست که مردم این شهر باین فن مشغول شده اند و بجد در کارند. چه حضرت سلطنت پناهی بدین فن مشغولست. هم رحمت بر مولانا بدرالدین باد که بهمین قدر اکتفا کرده است. باری هیچ دروغ از خود بر نمی سازد.

از تحسینهای حضرت سلطنت پناهی که ذکر کرد آنست^{63c} که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان باین بنده نرسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا⁶³ امروز چنین وچنین^{63a} نکتها فرمودند. امثال آن: ^{63b} مستحضر است و بغایت خوب میدانند؛ ^{63c} و از همه این بهتر میدانند؛ و از قاضی زاده^{63d} مستحضر تر و پر ماده^{63e} تراست و درین⁶⁴ فن پر ذهن تر؛ چیزی که او بده روز مشکل در می یابد مولانا غیاث الدین بر فور یا در روز | می یابد؛ و جمیع^{64a} اقسام این $\frac{515a}{515b}$ فن را میدانند.

62 بنی انکار	63 است تا	64 است درین
62a هفتاد نفر هستند	62b در می آورند	63c پناهی آنست
63a چنان	63b آنها	63c میدانند
63d قاضی	63e مایه	64a مییابد، جمیع

و نیز: مرد نيك و سليم القلب است؛ هرکس از جنس موالی
و غیره که پیش ما آید همین که ما او را اندک تربیتی کردیم خود را
نگاه نداشتند و با مردم جنگ میکردند و فضولها پیش^{64b} می گرفتند،
مولانا غیاث الدین با وجودیکه انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم
و دایما بشرف مجاورت و مکالت مستعد است درین⁶⁵ مدت هرگز
با کسی نزاع نکرد و نه او از کس و نه کس از او گله کرد؛ و بسخنها
مردم در آوردن و بعرض رسانیدن جهة طمع دخل نکرد؛ و نیکو
معاشی^{65a} دارد. و امثال هذه بکرات فرموده.^{65b}

الحمد لله على ذلك و «ذلك»^{65c} فضل الله يؤتیه من یشاء.

مردم سالها سعی مینمایند تا معاش ایشان و هنر^{65d} ایشان در پیش
مردم هم جنس نیکو⁶⁶ نماید. مگر اندکی که توانند⁶⁷ (67a) چنان
کنند که پیش مردم بزرگ نیکو نماید.^{67b} بحمد الله و المنة که بعد از
چندین مدت که در کنج خانه بسر برده بود چون بیرون آمد بچنان
شهری عظیم بر چنین مردی^{67c} هنرمند و بحضرت جهان پادشاهی
هنرمند دانا و عالم ملتفت بحال مردم مستفسر⁶⁸ احوال خلایق رسید،
بین عنایت ازلی و سعادت لم یزلی و ببرکت همت آنخداوند چنان
زیست که دران حضرت مستحسن افتاد.

و اگر حضرت پادشاه لایلتفت بودی بامور⁶⁹ مردم شایستی^{69a} که
نيك بد نمودی و بد نيك. اما چنان آنحضرت با مردم که بدین^{69b}
آستانه ملازمند مخالطست⁷⁰ (70a) و چنان بتفحص احوال هرکس است که

67 تواند
70 مخالطت
65b فرمودند.
67a تواند
69a ممکن

66 جنس و نیکو
69 مامور
65a معاش
65d سر
67c مردمی
70a محافظت دارند

65 و درین
68 مستمر
64b فضولی با پیش
65c ذلك، ذلك
67b مردم نیکو نماید
69b باین

هیچ رعیتی نیست که او را کما ینبغی نشناسند ، و کیف^{70 b} کسانی که شبانروزی ملازم باشند .

دیگر آنچه جمعی فرموده اند که چرا رصد در يك سال تمام نمیشود . ده سال و پانزده⁷¹ سال میگویند که حال آنکه حالاتی چند مخصوص بتعیین^{71 a} کواکب را هست که در آن حال که ایشانرا آن حال باشد رصد می باید کرد . مثلاً دو خسوف می باید که در هر دو مقدار منخسف یکی باشد | و در یکجهت منخسف باشد و نزدیک يك عقده باشد . و همچنین $\frac{515 b}{516 a}$ دو خسوف دیگر که بشرائط دیگر موصوف باشد و امثاله . و عطارد را رصد کنند^{71 b} در حالی که در غایت بعد صبحی باشد و یکبار که در غایت بعد مسائی باشد ، بشرائط چند دیگر . و ازان کواکب دیگر بمثله .

و این جمیع حالات را یکسال واقع نمیشود که کس در یکسال رصد کند . انتظار می باید کشید تا این حال واقع شود . و اگر در آن حال ابر باشد آن نوبت فوت شد و رفت تا یکسال یا دو^{71 c} سال دیگر که مثل آن واقع شود . ده سال پانزده سال بدین واسطه می باید .

کسانی که این کار نمیدانند و نیز ندیده اند که کسی کرده است ، از آنکه کسی بآن کار مشغول شود عجب میدارند . اما کسی که کاری میدانند بس آسانست آن کار کردن . ان شا الله تعالی حق سبحانه و تعالی عمر و توفیق دهد که بیمن دولت پادشاه اسلام خلد الله ملکه و سلطانه این رصد بمبارکی و خرمی تمام شود .

71 و پانزده ؟

70 h کیف

71 c یکسال دو

71 a معین

71 b کند

اکنون اکثری از عمارت برآورده شده. قریب پانصد تومان
خشت پخته و گچ بکار رفت و یکذات الحلق تمام شد و یکی دیگر^{71d}
هم در کار است، و بعضی آلات دیگر هم نیمکاره،^{72 (72a)} قبیل^{73 (73a)}
ذات السمّت و ذات الهدفة السیاره⁷⁴ و غیره در دست دارند.

دیگر آنچه استفسار^{74a} فرموده بودند که کار رصد باین بنده
مفوض است یا شریکی دارد، عجب که آنخداوند بعد از شهرتی
چنین استفسار فرموده بودند. حال آنکه اگرچه این مردم بسیار
هستند که در ریاضیات دخلی دارند، اما هیچ کدام چنان نیستند که
ایشان^{75 (75a)} از علمی و عملی⁷⁶ رصد و قوفی دارند. ^{76a} چه هیچکدام
مجسطی نمیدانند.

یکی قاضی زاده است که علمی^{76b} مجسطی میداند و عملی نه،
و چیزی که بعمل تعلق دارد نکرده. و او اعلم ایشان دیگر است،^{76c}
و در علمی نیز که^{76d} شروع کرده. در هر مبحث که سخن درمی آید
از حضرت سلطنت پناهی این بنده سرور پای بحث پیدا میکند چنانکه
بیشتر ذکر رفت در مسئله قانون مسعودی و امثال ذلك، و در اعمال
خود تمام داخل^{77 (77a)} است.

516 a
516 b

و عملی نیز منقسم میشود بعلمی و عملی. اما عملی آنست که مثلاً
دو کوکب بیکحال بدائرة^{77b} اول سموت⁷⁷ رسیده اند. ارتفاع بالائی⁷⁸
معلوم کرد^{78a} و طول و عرض یکی ازین هر دو معلوم است، و خواهد که
طول و عرض آن دیگر^{78b} ازین معلومات معلوم کند. معرفت آنکه

72 سکاره	73 قبل	74 ستاره	75 ایشانرا
76 علمی عملی	77 راجل	78 ارتفاعی	78 مالی
71d دیگری	72a سکاره	73a قبل	74a دیگر استفسار
75a ایشان را	76a باشد	76b علم	76c ایشان است
76d که نیز	77a راجل	77b اول السموت	
78a ارتفاع هریک معلوم کرده	78b عرض دیگر		

چگونه معلوم باید کردن ، یعنی دانستن ^{78 c} آنکه چه درجه ضرب کنند و بر چه قسمت کنند و چون کنند تا آن معلوم شود . و این علمی آن عمل باشد . و علمی مطلق دانستن فن ^{78 d} است .

و عملی مطلق ⁷⁹ مسئله ^{79 a} آن باشد که ضرب و قسمت بتقدیم رسانند ، و برج و درجه و دقیقه تقویم کواکب و عرض آن حاصل کند و بگوید چنین است و چند نیست .

و قاضی زاده از ^{79 b} علمی این عمل ضعیف است و عمل مطلق بغیر از شبکه ضرب و قسمت هیچ دیگر نه . و آن هم چنانست ^{79 c} که چون میخواهد که شبکه نهد بی مطالعه کتاب میسر نیست . سطر سطر میخوانند ^{79 d} و خانه خانه تمام میکنند ^{79 e} . جویای گر بود ⁸⁰ (80 a) بسیار سود ⁸¹ می ندهد (؟) . ^{81 a}

لاف نمیزند . و آن خداوند هم میدانند ^{81 b} که بعنایت الهی چنان در خود می بیند که بقوت استحضار علمی فن و علمی علم و علمی عمل ⁸² (82 a) و قدرت در علمی مطلقا که اگر بی کتاب بدار الرصد از اول مدت تا آخر مدت تمامت اعمال بکند و زیج بیرون آورد ، که در هیچ مسئله رجوع بکتاب نکند ، مگر حاصل اوساط روزی معین از رصد سابق که آن امر یقینی ^{82 b} است ، و تاریخ آن روز . و در رصد بآن ⁸³ احتیاج می باشد که تا ⁸⁴ (84 a) تفاوت حاصل اوساط این رصد با این حاصل اوساط بگیرد و بر مدت ما بین الرصدین ^{84 b} قسمت کند تا مقدار حرکت معلوم شود ، و آن مجموع را بر دو ورق میتوان نوشت .

79	عملی آن مطلق	80	کر بوه	81	شود ؟	82	استحضار علمی فن و عملی عمل
83	رصدیان	84	یا			84 b	الرصد
78 d - 78 c	یعنی دانستن فن	79 a	مطلق آن مسئله	79 b	وقاضی از		
79 c	هیچنان است	79 d	سطر بطر میخوانند	79 e	میکند .	80 a	کر بوه ؟
81 a	میدهد	81 b	میداند	82 a	استحضار علمی فن و عملی عمل		
82 b	تعیینی	84 a	با	84 b	الرصدین		

آن ^{84 c} خداوند خاطر مبارك آسوده فرمایند که مطالعه کتب در استحضاری چنین چندان خلل در نمی آرد ^{84 d} که برابر مطالعه اکنون دیگران نباشد.

اینمقدار حکایت قاضی زاده که نوشته ^{84 e} مردم | تصور نکنند که مگر خلافی هست. میان این بنده و او اتحاد و ^{84 f} دوستی تمام است و او این بنده را مسلم میدارد. و او دران نصاب نیست که استنکاف داشته باشد و منصف نباشد. آنچه بنده باو نسبت کرده او هم ^{84 g} بر سر جمع خود میگوید. آنچه میداند میگوید و آنچه نمیداند بی تحقیقی مقرر است که نمیداند.

آنچه از کار رصد درینمدت روی نمود چنان بود که این بنده کیفیت ^{85 a} آن ^{85 a} بعرض حضرت سلطنت پناهی خلد الله ملکه و سلطانہ رسانیده. مثلاً کیفیت عمارت رصد و کیفیت هر ^{85 a} (85 a) آلت. آنحضرت بذهن وقاد و خاطر نقاد دران تأمل فرمودند. بعضی که ^{85 b} پسندیدند بترتیب آن اشارت فرمودند و در بعضی اختراعی و استنباطی مزید فرمودند، برین ^{85 c} موجب بترتیب آن اشارت فرمودند.

و واقع که آن استنباطات لطیف ^{85 d} میفرمایند که هیچ خدشه دران نیست. و اگر در بعضی نکته ایست ⁸⁷ که در خاطر این بندگان نمی نشیند بران مباحثه میشود. و اگر غلط ازین طرف روشن میشود و اگر ازان طرف فی الحال مسلم میدارند و هیچ استنکافی نمیفرمایند. چه غرض ایشان برانست که تحقیق مسایل شود و بخوبترین وجهی اعمال رصد کار بند شود.

		85 گفت	
87 آنست		86 بر	85
84 f اتحاد کامل و 86 b بعضی را که	84 e نوشت 86 a بر	84 d آورد	84 c و آن
		85 a گفت و آن	84 g کرده هم
		86 d لطیفه	86 c بدین

ازینجا غایت کرم و اخلاق آنحضرت معلوم فرمایند. چه جای اینست، که در غایت⁸⁸ (88a) لطف و مزجت کریم الاخلاق اند⁸⁹ (89a) که احیانا در مدرسه میان حضرت ایشان و یکی از تلامذه⁹⁰ طلبه در مسئله⁹¹ از هر علم که هست چندان رد ورد⁹² و لانسلم واقع میشود که شرح نتوان. و برینمعنی حکم فرموده، و رخصت داده که مسئله⁹³ علمی تا در خاطر نمی نشیند مسلم ندارند⁹⁴ و مزاجی نگویند. و اگر احیانا کسی بتقلید مسلم داشته او را انفعالیها داده که تجهیل ما میکنی. و بجهت امتحان مسئله⁹⁵ غلط در میان می اندازند. همین که کسی او را مسلم داشت باز خواست میفرمایند و انفعال میدهند.

و چون آن آلت تمام کرده شد بموضع⁹⁶ رصد آورده شد و گاهی | که^{517 a}
^{517 b} در موضع رصدکاری هست مثل استخراج نصف⁹⁷ النهار و غیره قاضی زاده هم بانجا آید و اگر سخنی در میان هست او هم دران بتحسین یا بانکار سخنی گفت⁹⁸ چنانکه پیشتر نوشته بود⁹⁹ که در باب تسویه¹⁰⁰ سطح انکار کردند و بعد ازان در خاطر او نشاند که چو نیست.

سایر مدرسان هم بموضع رصد حاضر میشوند و توحی¹⁰¹ میکنند. هنوز وقت کارهای مشکل نیامده¹⁰² (102a) است. چه حالیا¹⁰³ عمارت بر می آورند. چون تمام شود و آلات تمام شود و نصب کرده شود و رصد چند که همین نگریستن باشد بچشم از ثقب¹⁰⁴ بکواکب کرده شود

80 اید	88 ایست که غایت
91 خالیا	90 نهاده
80 c رد ورد	88 a این است که غایت
80 g کوید	89 d تمیدارند
91 n ثقبه	89 h شد
80 a مسئله ای	89 a آید
80 f خط نصف	80 e بموضع
90 a نهاده	80 j لوحی

و ثبت کرده شود ، و بعد ازان که ^{91b} ازان مقادیر ما بین المکزین و نصف
 قطر تدبیر و مقدار میول ^{91c} اقطار الماره بالذروه و الخضیض و حاصل
 اوساط و بعد مراکز ^{91d} معدلات المسیر از مراکز حوامل ^{92a} و غیر ذلک
 پیدا باید کرد . کار آنگاه است .

زیاده اطناب نیارست نمود . ظلال عالی پاینده و مستدام باد . ^{92b}

بنده کمترین ^{92c} بندگان

غیاث



^{91d} و مراکز
^{92c} بنده کمترین

^{91c} مقدار از میول
^{92b} عالی مستدام پاینده بادا

⁹² موایل

^{91b} آنکه

^{92a} موایل

TÜRKÇE TERCÜME

MERHUM GİYASÜDDİN-İ KÂŞÎ'NİN MERHUM BABASINA SEMERKANDDEN YAZDIĞI MEKTUBUN SURETİ

Efendimin elini öpmek istek ve iştihakım o derece şiddetli ki, bunu, "Deniz Rabbimin vasıflarını anlatan kelimeler için mürekkep olsa, bu kelimelerin yazılması sona ermeden deniz tükenir" âyeti¹ ile dile getirmek yerinde olur. Bütün kusurlardan münezze olan yüce Tanrı, cömertliği ve feyzi ile, bu saadetin idrakini tazammun eden mutlu fırsatı nasip etsin.

Bu mektup mübarek Zilkade ayının yedisinde kaleme alındı. Bol nimetlerinden dolayı Allaha şükürler olsun.

Mutlu rasathanenin işleri ile meşgul olduğumdan, başka ilimlere ve hususiyle arüz ile ona benzer konulara vakit vermemi tavsiye ediyor, bu gibi meşguliyetlerin çokluğu nisbetinde asıl konu üzerindeki tekâsüf derecesinin azalacağını, ve bundan başka, herkesin, insanı, en son ne üzerinde çalışmışsa ondaki bilgi ve başarısı ile ölçtüğünü söylüyorsunuz. Nasihatiniz tamamen yerindedir. Gösterdiğiniz yolda sadakatle yürümekteyim.

Bununla beraber, başkalarının takdiri üzerinde söylenecek bazı sözler var ki bunları Kum şehri tacirleriyle daha önce göndermiş olduğum uzun mektupta sözkonusu etmiştim. Burada, iki yazıdan hiç olmazsa biri size ulaşmak şerefine nail olur ümidi ile, aynı şeyi ikinci defa olarak kaleme alıyorum.

Kâşan ve dolaylarında çeşitli ilim dallarının her biri için o dalda bilgi sahibi olmak iddiasında olan biriki kişi bulunur, ve bu gibi kimseler böyle bir bilgiye sahip olmasalar da kendilerini sevenler onların iddialarının doğruluğuna inanır, ve gerçekten bu dallarda bilgili de olsalar bazı kimseler onların ilmini inkâr ederler. Böylece işin hakikati kimsece bilinmez. Halbuki Semerkand bölgesinde durum hiç de böyle değil. Tanrı burasını âfet-

¹ Kuran, sure 8, âyet 109.

lerden korusun. Çünkü, bir defa, Allaha ve nimetlerine çok şükürler olsun ki yedi iklimde hükmü geçen İslâm Padişahı bilgin bir insandır. Tanrı onun devletini ve hükümranlığını daim kılsın.

Bu sözü nezaket icabı söylemiyorum. Gerçek şu ki, Kur'anı Kerimin çoğunu ezber biliyor. Tefsirleri ve müfessirlerin her âyet hakkındaki sözleri hep aklında, bunları iyice biliyor. Her vesile ile de o durumda münasip düşen âyetleri kolaylıkla hatırlayıp zikrediyor, ve çok güzel iktibaslar yapıyor. Kendisi hergün hafızlar huzurunda iki Kur'an cüz'ünü akıcı bir şekilde ve kaidelere tamamen uygun olarak okur. Bunda da hiçbir yanlış yaptığı vâki değildir. Arapça sarf ve nahiv bilgisi çok iyi ve Arapça kompozisyonu mükemmel. Aynı suretle fıkıhta vukufu derin, mantık ile edebî sanatlarda ve usulde (arûzun esasları) de behre sahibi.

Matematiğin çeşitli dallarına gelince, bunlarda büyük maharet kazanmış ve bu mahareti o dereceye erdirmiş bulunuyor ki, bir gün atla dolaşırken, sekizyüz onsekiz yılının Recep ayının onu ile onbeşi arasındaki bir Pazartesi gününe rasladığı bilinen bir tarihin güneş yılına göre senenin hangi gününe isabet ettiğini bu bilgiye dayanarak zihnî hesaplama bulmak istedi; bu maksatla, at üzerinde, güneşin o güne tekabül eden boylamını iki dakikaya varan bir teferruat sınırına kadar hesapladı, ve attan inince sonucu bana sordu.

Zihnî hesapta bazı miktarları akılda tutmak ve hesap neticelerini bunlara dayanarak çıkarmak icabeder. Halbuki ^{510b}/_{511a} hâfızada bir yetersizlik mevcuttur. Bu sebeple, vâkıa sonucu derece ve dakika cinsinden (doğru olarak) çıkaramamış, derece ile iktifa etmişti. Fakat bunu günümüz insanları arasında hiç bir kimse yapamaz; zihnî hesapta bu derece maharet kimseye müyesser değildir.

Kısaca, matematik ilimlerinde kendisinin çok derin mahareti var, astronomide cari usullerin isbatlarını çok güzel yapar, ve kaideler istihracını gereği gibi bilir. *Tezkire*² ve *Tuhfe*³ üzerinden okadar iyi ders veriyor ki buna hiçbir ilâve tasavvur olunamaz.

* Bu kitabın müellifi Nasîrüddîn-i Tûsî'dir.

² Müellifi Kutbüddîn-i Şîrâzî.

Semerikand bölgesinde farklı olan ikinci şart da şu ki, ilim adamlarının en seçkinleri burada toplanmış bulunuyor. Bütün ilim dallarında ders veren müderrisler burada çok sayıda mevcut, ve bunların çoğu matematik ilimler üzerinde çalışıyor. Bu arada iki kişi *Eşkal-i Tesis* (Öklid'in ana teoremleri) üzerinde yazdıkları birer eseri yarıya getirmiş bulunuyor, bir kişi *Tecnis-i Hesab*'a⁴ bir şerh yazıyor, bir başkası da hataeyn meselesine geometrik isbat üzerinde bir risaleyi sona erdirmiş vaziyette. İçlerinde en bilginleri olan Kadızade-i Rûmî ise *Şerh-i Çağmînî*⁵ ve *Şerh-i Eşkal-i Tesis*⁶ adlı eserlerini yazmış bulunuyor. Münec-cimler ve hesaplama uzmanları da çok sayıda mevcut.

Hulâsa, hangi ilim dalını alırsak alalım, o fen erbabının çoğu burada toplanmış bulunuyor. Bu vaziyet neticesi olarak, ben böyle bir yere çıkıp gelince, herkes büyük bir dikkatle beni incelemeye koyuldu ve bilgimin ne derecede olduğunu keşfetmeye çalıştılar. Ulu Başbuğ birkaç günde bir derslerde hazır bulunuyorlar ve huzurlarında matematik ilimler üzerinde ders verilmesini tercih ediyorlar. Ben de, tabii, bu derslerde isbatı vücut ettim. Burada ilim taliplerinin (ilim adamları ve bilginler) bilgilerinin mihenk taşlarından biri şu ki, ders halkasındaki dinleyici o gün ele alınacak meselenin ne olduğunu bilmez. Halbuki medrese müntesipleri bu münasebetle hazırlanmış ve eldeki konuyu etraflı bir şekilde etüt etmiş bulunurlar.

Derslerin takrirleri bitip münakaşalara geçilince, her defasında, Allahın inayeti ve siz efendimin emeklerinin feyzi ile, ben de tartışmalara katıldım ve bunu büyük başarı ile yaptım. Etütleri sırasında dikkatlerini çekmemiş olan birkaç noktaya işaret ettim, yerinde tenkitler yaptım, ve konunun bazı inceliklerine temas ederek bunları açıkladım. Öyle ki, hepsi de hayretler içinde kaldı.

511a
511b

⁴ Sözkonusu kitap, Sirâcuddîn Ebû Tâhir el Secâvendî'nin *Tecnis fi'l Hisâb* adlı eseridir (Brockelmann, *Geschichte der Arabischen Literatur*, cilt 1, s. 379, Supl., cilt 1, s. 651).

⁵ Çağmînî'nin *El Mülâhhas fi'l Hey'e* adlı eserine Kadızade şerhi.

⁶ Bu kitap, Muhammed ibn Eşref el Semerkandî'nin *Eşkal-i Tesis* adlı eseridir; Kadızadenin bu esere bir şerh yazdığını da esasen biliyoruz (Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und Ihre Werke*, 1900, s. 175).

Benim buraya gelişimden önce bir takım meselelerde güçlüklerle karşılaşmış ve uzun münakaşalara girilmiş, fakat üzerlerinde durdukları bu meseleleri çözmeye muvaffak olmamışlardı. Meselâ çapı bir *gez* olan bir usturlâb yaparak rasatla bilinen bin yirmi iki sabit yıldızın hepsini bunun üzerine tesbit etmek istemişlerdi. Bu yıldızların meridyen tranzitlerinin metâlilerine⁷ ihtiyaç vardı. Bütün hesaplama uzmanlarına birlikte çalışmaları emredilmişti. Yüzelliye yakın sabit yıldız vardı ki, onların anladığı şekilde *Zic-i İlhanî*'de verilen metodla işlemleri yapılnca bunların yerleri doğru çıkmıyordu. Şaşırıp kalmışlardı.

Hükümdar Hazretleri, matematikçilere, geometri kanunlarına istinaden meselenin tahkik edilerek açıklanmasını emir buyurmuşlardı: Fakat kimse durumu doğru olarak inceleyememiş, tatmin edici bir sonuca bağlayamamıştı. Durum şöyle idi: Bu yıldızların meridyen tranzitlerinin metâlii *İlhanî Zic*'inden anlaşıldığı üzere çıkarılıp küre veya usturlâba tatbik edilince, yıldız, kümedeki yerine isabet etmiyordu. Meselâ β Ursa Minoris yıldızının yeri hatalı çıkıyor, Küçük Ayı kümesindeki mevkiinden uzakta bir yere rashiyordu. Çok uğraşmalarına ve üzerinde zihin yormalarına rağmen doğru sonucu elde edemiyorlardı.

Ben aralarına katılınca, hemen ilk günü, bu meseleyi Hükümdar Hazretlerinin huzurunda açtılar. Ben derhal ve toplantı esnasında eldeki misallerden birini doğru sonuca bağladım, ve hem Ulu Başbuğu ve hem de hazır bulunan matematikçileri ikna edecek bir tarzda hatalarının menşeiini açıklayarak *Zic*'deki talimatın eldeki meseleye tatbik tarzını izah ettim. Kendilerine bu iş için başka bir usul de anlattım ve usturlâba bin yıldız vazedildiğinde meridyen tranzitlerinin metâlilerini bulmanın şart olmadığını, bu yoldan işlemleri uzun süren yıldızları başka bir metodla da ele almanın mümkün olduğunu gösterdim. Netice itibariyle, bu işi benim uhdeme verdiler ve bu işi ben yapıp tamamladım.

Yine Hükümdar Hazretlerinin sarayının duvarına bir müşir tesbit etmek ve eşit saatları gösteren çizgileri buraya resmetmek istemişlerdi. Fakat bu duvarın yüzeyi birinci vertikal ile

511b
512a

⁷ Metâlî-i memur teriminin tarifi *Zic-i İlhanî*'de verilmektedir.

çakışık olmak üzere meridyen yönüne dönük olmadığından^a ve daha önce kimse böyle bir saat yapmamış olduğu için, bu işte de kimse muvaffak olamamıştı. İçlerinden bazıları bunu bir yıl içinde yapmanın mümkün olacağını söylemişlerdi. Yani güneşin ayrı ayrı burçların başlangıçlarına ulaştığı zamanlara tekabül eden bütün günlerde rasat yapıp saat çizgilerinin yerlerini işaretleyecekler ve bu yoldan giderek sathın taksimatını tamamlayacaklardı.

Ben gelince meseleyi bana açtılar. Hükümdarımızın emriyle bu işi bir günde tamamladım, ve kontrolünü büyük usturlâbla yaptıklarında doğru ve hatasız olduğu görüldü. Yine, güneş ışıktı için o şekilde bir menfezin tertiplenip yapılmasını istediler ki, Ebû Hanîfe mezhebine göre ikindi zamanı gelince güneş ışınları bu delikten nüfuz etsin ve günün diğer zamanlarında etmesin. Bunun da çözümünü sordukları gün içinde verdim. Bunlara benzer daha başka misaller de pek çok.

Yine buyurmuşlar ki bir kimse yer sathının hatasız bir şekilde 'kürevi olan bir mevkiinde ayakta dursa ve meselâ boyu *zirâü'l-yed* cinsinden üçbuçuk *gez* olsa, bu şahsın gözünden çıkıp yer yüzeyine teğed olan doğru bir ışın gerçek ufku hangi noktada keser ve en üst feleğe hangi inhitat açısı ile ulaşır. Bunun üzerinde de bir zaman düşünmüşler, fakat kolay olmasına rağmen bu problemi de kimse çözememişti. Bunu da sordukları gün cevaplandırdım. İlim talipleri bu mesele ile kendi başlarına ayrı ayrı uğraşıyorlardı.

Gelelim rasathane bahsine. Hükümdar Hazretleri, Allah onun mülkünü ve saltanatını daim kılsın, çocukluğunda Merâğa Rasathanesi yapılarını görmüş. Fakat kendisi, bu rasathaneye o zaman, meseleye vâkıf bir insan gözü ile bakmamış olduğunu söyleyerek bu hususta izahat istemiş. Benim gelişimden önce, kendisine Merâğa Rasathanesinin, içinde oturulan ve Rasat Tepesinin üst kısmının altında bulunan yer olduğunu söylemişler. Tutulma düzlemi eğimi ile güneş rasadı için de, Batlamyus metoduna uygun olarak, altı *gez* çapında iki pirinç halka, Batlamyus'un verdiği talimat gereğince dökülmüş bulunuyordu.

^a Metin bu noktada tamamen sarıh sayılmayabilir. Buna göre tercüme de takribî olarak kabul edilmelidir.

Batlamyus aletlerinin kusurdan azade olmadıklarından, ve bu sebeple, Batlamyus'danberi yapılan her rasat (rasathane) münasebetiyle rasat aletlerinde dakiklik sağlayan çeşitli değişikliklerin yapılmış bulunduğundan buradakilerin haberi yoktu. 512a
512b

Merâğa Rasathanesi yapıları (tesisleri) arasında bulunan "hendesî minber" in ne olduğunu ve neye yaradığını da kimse bilmiyordu. Ben durumu Yüce Başbuğa arz ettim ve bu halka ile baş gösterebilecek hataları izah ettim. Yine, Adudü'd-Devle için on gez çapında bir halka yapılmış olduğundan bahsederek eldeki aletin bundan da küçük olduğuna dikkati çektim, ve bu alet yerine Merâğa Rasathanesinde "hendesî minber" yapılmış bulunduğunu, buna süds-i Fahri adı verildiğini, ve yarı çapının altı gez olduğunu söyledim.

Bunun üzerine, eldeki halkanın kırılması emredildi ve bu halka benim tarif ettiğim alete tebdil olundu. Rasathane binasının da benim anlattığım şekle uygun olarak inşasına karar verildi, ve bunlarla ilgili bütün hususlar memleket âyanına bildirildi.

Bu minval üzere, her gün ve her hafta, ortaya yeni bir mesele çıkıyor. Fakat bütün bunları, siz efendimin emeklerinin feyzi ve uzun gayretlerimin kazandırdığı bilgi ve meleke sayesinde, büyük bir ustalıkla, müşkülât sahasından sıyrıp çıkarmaktayım.

Bir gün, Ulu Başbuğ, Allah onun devletini ve hükümranlığını daim kılsın, mütalaa ile meşgulmuş ve Kadızade de yanında hazır bulunanlar arasında imiş. Bir isbat münasebetiyle *Kaanûn-i Mesûdî*'ye⁹ atıf varmış ve *Kaanûn-i Mesûdî* oraya getirilmiş. Aranan isbat bu toplantıda anlaşılamadığı için, Kadızade, meseleyi incelemek üzere, bu kitabı hücreğine götürmüş. İki gün sonra kitabı geri getirdiğinde, eldeki nüshanın bu yerinde atlanmış bir kısım olduğunu, meselenin bu yüzden tamamiyle aydınlanmadığını, bir başka nüsha bulup onunla karşılaştırmak gerektiğini söyledi. Önceki iki gün ben rahatsızdım. Ateşim vardı. Bu sebeple evimden çıkamamış, ilk defa olarak o gün toplantıya katılmışım. Kadızade henüz meclisten ayrılmamıştı. Bir ara, Ulu Başbuğ bana baktı ve "bu mes-

⁹ Birûnî'nin meşhur eseri.

512b eleyi mevlamız çözsün" diyerek *Kaanın-i Mesûdî*'yi bana uzattı.
513a Meseleden beş altı satır okur okumaz bütün problemi açık-
ladım. Yazmada atlanmış hiçbir şey yoktu.

Buraya geleli beri buna benzer durumlarla sık sık karşılaştıldı. Hepsini anlatmak çok uzun sürer. Bunları sözkonusu etmekten maksadım şu ki, böyle bir toplulukta ve bukadar çok sayıda otorite arasında, bir kimsenin ilimdeki mertebesinin teslim ve takdiri o şahsı tutan otoriteli bir takım insanlara tebiyet esasına dayanmadığı gibi, sadece o kimsenin kendi iddialarına da istinat etmiyor.

Tuhfe'de, Nihâyetü'l-İdrâk'ta,¹⁰ *Tezkire'nin*¹¹ Nizâmüddin-i Nîşâbüri şerhinde, ve yine *Tezkire'nin* Seyyid Şerif şerhinde, Allah onun ruhunu takdis etsin, aynı suretle ifade olunan fakat buna rağmen yanlış olan birkaç nokta var. Buraya ilk geldiğim sıralarda bir gün Ulu Başbuğ'un huzurunda bunlardan bahsediyordum. Sözlerim ağızdan ağıza dolaşarak buradaki bilgilerin hepsinin kulağına gitmiş. Bunlar bu münasebetle bir hayli heyecanlanmışlar, ve "bukadar ünlü bilgilerin üzerinde müttetik oldukları bir meseleye itiraz eden bir kimse iddiasını isbat etmelidir" diye arkamdan söylenmişler.

Bir gün, çoğunluğun hazır bulunduğu bir toplantıda, bu bahislerden çok derin ve etraflı bir şekilde incelemiş olduğum bir tanesini hem muhayyileye hitap eden bir tarzda ve hem de geometrik isbat yolu ile o şekilde anlattım ki hepsi de bunu ittifakla kabul ettiler. Ulu Başbuğ ilim adamı olduğu için ve ilme vukufu son derece derin olduğundan, ayrıca ilim adamları da çok sayıda mevcut olduğundan, burada bir mesele bir defa tahakkuk edince, daha önce başka türlü konuşmuş olan kimseler, konuyu anlamayanların gözünü boyamak için inatçılık edip bir takım kusurlar bulmak iddiası ile işi uzatamaz. Çünkü ilim adamlarının en seçkinleri burada hazır bulunuyor.

Söz konusu meselelerden biri şu. "Ayın episikli üzerindeki azami tadili dış merkezli bölgede öyle bir noktaya raslar ki bu noktadan muhâzât noktasına bir doğru çizilecek olursa bu

¹⁰ Bu eser de Kutbüddin-i Şîrâzî'nin.

¹¹ Yani, Nasîrüddin-i Tûsî'nin *Tezkire*'sine Nizâmüddin-i Nîşâbüri şerhi.

doğru apoleden geçen çapa dik olur" şeklinde bir beyan mevcuttur. Bu ilim dalında günümüze kadar kaleme alınmış olan bütün eserlerde bu mesele böylece ifade edilmiştir. Halbuki bu bir hatadır. Çünkü, böyle bir doğru muhâzât noktasının yedi derece elli dakika altından geçerse, sözü geçen çapa dik olur, aksi halde dik olmaz. Gezegenlerde de aynı suretle yanılmışlardır. Bunların hepsinin hatası şuradan geliyor ki güneşte azami tadil öyle bir noktaya raslar ki oradan kâinatın merkezine bir doğru çizilecek olursa bu doğru mezkûr çapa dik olur. Batlamyus *Almajest*'te bunun isbatını vermiş ve ay ile diğer gezegenlerde o isbata atıf yapmıştır. Kimse düşünmemiştir ki bu sonuncularda o isbata atıf yapılamaz.

513a
513b

Bir gün, meridyen doğrultusunun tesbiti için, rasathane mevziinde yer tesviyesi yapılmıştı. Bu işi meşhur ustalar yapmışlar ve tesviye edilmiş olan satıh kurumuştur. Biz de meridyen doğrusunu tayin etmek üzere oraya gitmiştik. İlk sathın doğru tesviye edilip edilmediğini kontrol etmek istiyorduk. Ulu Başbuğ, Tanrı onun devletini ve saltanatını daim kılsın, ve bütün memleket ileri gelenleri ve âyanı, bilginler ve ilim adamları, hep ustaların tesviye için hazır bulundurdıkları alet etrafında toplanmışlardı. Bu maksatla, her kenarı dört Hâşimi gez olan bir üçgen hazırlamışlardı.

Mimarın oğlu olan ustabaşı, ilkin üçgenin kontrol edilerek iki kenarının eşit olup olmadığının tesbit edilmesine gerektiğine işaret etti. Ben, "eşit olmasalar da yine onunla tesviyeyi yapabiliriz" dedim. Kadızade ile bu fende behre sahibi olan diğer bilginler derhal itiraz ettiler ve katiyen böyle olamaz dediler. Ben ise, "hava daha serinliğini muhafaza ediyor ve güneş henüz fazla yükselmemiş bulunuyor, ilkin tesviyenin kontrolünü yapalım, sonra size meselenin izahını yaparım" diye cevap verdim.

Tesviye bitti. Fakat onlar sorularını unutmuyorlardı. Meselenin isbat edilmesi talebinde bulundular. Hep oturduk ve ben söze başladım. Dedim ki, "farz edelim ki üçgenin sizin eşit olmaları gerekir dediğiniz iki kenarından biri öbüründen bir gez daha kısa olsun." Buna göre üçgeni bir yere çizerek geometrik isbatlar yaptım ve bir yıldız saati müddetince hazırlayıcı bilgiler ve çeşitli deliller zikrettim. Neticede hepsini ikna

513b
514a

ettim ve hepsi de fikrimi kabul etti. Daha bilgili olanlar daha çabuk anladılar, öbürleri daha sonra, fakat hepsi de hakikati teslim etti.

Gayet açık konuştum. Çünkü memleket ileri gelenlerinden beşyüze yakın insan burada hazır bulunuyordu. Dedim ki, "siz bukadar kolay bir meseleyi iki yıldız saati içinde ve bukadar delil getirdikten sonra kavrayabiliyorsunuz. Allah şahittir ki bu gibi şeyler benim için bedihidir. Meselâ burada, İsmail Usta, ilkin üçgenin iki kenarının eşit olup olmadığını kontrol edelim der demez ben bunu düşündüm. Bütün bu konuşmalara ne ihtiyaç vardı?"

Seçkin şahsiyetlerden ve halktan bütün orada bulunanlar meselenin neticesinin nasıl bağlanacağını merak ederek dinliyorlardı. Çünkü rasathanede karşılaşılan ve aramızda fikir ayrılığı gösteren ilk mesele bu idi. Münakaşada benim haklı çıktığım görülünce bu benim büyük şöhret kazanmama sebep oldu.

Bu durumları kim bizzat kendi gözleriyle görmek isterse, işte at ve işte meydan. Gelsin ve görsün. Sözü fazla uzattım. Vaziyet işte bu şekilde.

Şemsüddin adlı kimsenin sözleri hakkında yazdığınıza gelelim. Bu adam örnek olarak kullanılmak üzere Mevlânâ Bedrüdindinden zâtülhalak almaya gönderilmiş olduğunu söylemiş. Bu zatın bu sözlerinin hepsi yalan. Bir defa, burada sarayla münasebeti olan ve önemli işlere koşturulan Şemsüddin isimli bir kimse yok. Sonra, burada kimsenin zâtülhalak örneğine ihtiyacı yok. Bu iş için Bakırcı İbrahim Ustayı benim evime gönderdiler ve kendisi benim nezaretim altında bir zâtülhalak yaptı. Zâtülhalakta işin güç tarafı bakırcının işidir, yoksa aletin teorisinde güçlük yok. Halbuki usturlâbda durum böyle değil. Onda bunların her ikisi de güç.

İbrahim ustanın bu işlere eli öyle yatkın ki, ben halkanın dışbükey ve içbükey satırlarında mihver yeri olan iki noktayı
514a
514b işaretledim ve bu noktaların ikisine de birer küçük daire çizdim. Matkabla halkanın bir yanından delmeye başladı ve deliğin öbür ucunu karşı satıhta tamı tamına istenen yere rasgetirdi. Bütün halkalarda bu şekilde on delik deldi ve hiçbirinde hata

olmadı. Halkaların birbirleri içine gayet güzel yerleşmeleri de başka bir şey söylemeye lüzum bırakmıyor. Esasen burada, doğru veya yanlış olsun, Mevlânâ Bedrüddinin zâtülhalakı var veya yok diye hiçbir söz sarf edilmiş değil. Yine, böyle bir aletin nerede bulunabileceği veya nerede yapılabileceği şeklinde bir mesele de mevzuubahis olmadı.¹² Seyyahlar çok yalan söylüyorlar.

Sözü şimdi gerçek araştırmacılarının örneği ve Allah yolunun sâliki olanların en seçkini Mevlânâ İbrahim'in buyurduklarına getiriyorum. Tanrı onun iyi amellerini ve asıl nefeslerini daim kılsın. Kendisi Mevlânâ Bedrüddinden naklen, Merâğa Rasathanesinde kalabalık oldukları halde *Zîc-i İlhanî*'de kusurlu bazı yerler bulunduğunu söylemiş.

Gerçekte, *Zîc-i İlhanî*'de birkaç yerde noksan bulunduğunu söyleyenlerin bu sözü kendi bilgi, düşünce, ve akıllarının noksanlığından ileri gelir. Bazı noktalarda ufak zühuller olsa bile, Mevlânâ Bedrüddin gibi kimseler bunu bilmezler. Onun hatalı dediği yerler doğru ve son derece iyidir. Günümüz müşahadeleri ile bu zîc arasında karşılaşılan uyuşmazlıklara gelince, bunlar, o çağdan günümüze kadar geçen zaman zarfında hissedilir dereceye balığ olmuş olan batî değişmelerden neşet etmektedir.

Aynı rasathanede çok sayıda astronom bulunduğu yolundaki beyanına gelince, durum şöyle. Bu iş için birtek insan kâfi gelirdi. Rasathane kurduran eski padişahlar, aralarında tam bir uyuşma bulununca her defasında sözlerine itimadın caiz olması için bir rasathanede kaç kişiye ihtiyaç olduğunu kendileri bizzat kesin olarak bilmiyorlardı. Halbuki burada padişahın kendisi, Tanrı onun ülkesini ve saltanatını daim kılsın, astronom olarak rasathanenin başında bulunuyor ve bilfiil rasat işi ile meşgul. Burada çok kimse bulunmasa da bir zarar vermez. Batlamyus hem padişah hem de râsıttı, ve bir de oğlu vardı.¹³ Bu işi bir iki kişi ile yapmak mümkündür. Bu öyle bir iştir ki, bunu bir tek insan üzerine alırsa, daha çok çalışması gerekir. Bu iş bin *men* ağırlığında olup tabii olarak bir insan

¹² Bu noktada metinde boş bir yer bırakılmış.

¹³ Yukarıda anlatıldığı üzere (s. 10) burada doğru mâna belki de "o tek başına çalışıyordu" olacaktır.

tarafından kaldırılamayacak bir kayaya değil, bin *men* ağırlığındaki buğdaya benzer. Onu bir tek insan bir yerden başka bir yere taşıyabilir.

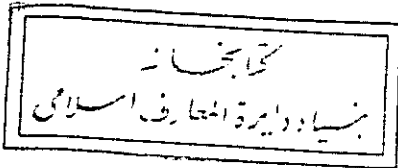
514b
515a

Mevlânâ İbrahim'in "Mevlânâ Bedrüddin iyi matematik bilir" demesine gelince, problem çözememek şartıyla, matematiği bir dereceye kadar Öklid'den öğrenmiştir. Fakat bu bilgisini katıyen tatbikat alanına dökemez. Onun durumu, bazı nahiv kaidelerini bilen fakat Arapça kompozisyonunu hiç beceremeyen bir insanın durumuna benzer. Doğruluğu şiar edinmiş olan Mevlevî (Mevlânâ İbrahim) ekseriyetle ilâhiyat ilimleriyle meşgul olup astronomi ve matematiğe vakit ayırmadıklarından ve gayet samimi ve temiz kalbli bir insan olduklarından, Mevlânâ Bedrüddin Öklid'den bazı sözler edince onun matematik bildiği neticesine varmış olacaktırlar.

Ben Mevlânâ Bedrüddini çok defalar gördüm. Buradaki insanlar da onu iyi tanır. Az bir şey astronomi bilen bir takım kimseler yıllarca bilgiçlik tasladılar. Halbuki şimdi, Semerkandde rasat işlerine başlandığını işitince hiç oralı olmuyorlar ve biz de oraya gitsek diye akıllarına birşey gelmiyor. Çünkü rasat işlerinden hiç anlamadıklarının farkındalar. Herhalde, başkalarını beğenmezden gelmek ve kötülemekten başka suretle de kendi kendilerini avutamıyorlar. Mevlânâ Bedrüddinden başka aynı sözleri eden birçok kimseler var. Eğer bunlar çıkıp Semerkandde gelseler ve orada matematik konularındaki toplantılara katılsalar, gerek seçkin kimseler ve gerekse umumiyetle diğer insanlar bunların öğrenmelerinin ne kadar boş olduğunu anlamış olacaklar.

Günümüzde Semerkandde, Allah burasını felâketlerden korusun, bu gibi insanların benzerleri altmış yetmiş kadar var ve burada bunları matematik bilenler arasında sayıyorlar. Çünkü on oniki senedir bu şehrin insanları bu konu ile meşgul olmuşlar ve şimdi de büyük bir ciddiyetle çalışmaktalar. Nitekim, Ulu Başbuğun kendisi de bu ilim üzerinde uğraşıyor. Yine Allah Mevlânâ Bedrüddin'in kusurlarını affetsin. Hiçolmazsa kendiliğinden yalan uydurmuyor.

Ulu Başbuğun daha önce zikri geçen teveccüh ve takdirleri üzerinde biraz daha durayım. Hiçbir hafta geçmiyor ki bazı



arkadaşlar bana "bu gece veya bugün kendisi senin için şu ve şu şekilde sözler söyledi" diye haber getirmesinler. Meselâ: O, hafızasını tazelemeye ihtiyacı olmaksızın biliyor ve bildiklerini çok iyi hatırlıyor; bilgisi fevkalade iyi; herkesten daha iyi biliyor; derhal filî olarak istifadeye sunulacak durumdaki ilmî mahfuzatı Kadızadeninkinden daha çok ve bilgisinin muhtevası onunkine nazaran daha zengin; bu ilimde zihni Kadızadeninkinden daha işlek; Mevlânâ Gıyasüddin bu ilmin bütün kısımlarını biliyor ve Kadızadenin on günde hallettiği bir müşkülü derhal veya bir ^{515a}_{515b} gün içinde çözüyor. .

Yine hakkımda şunları söylemişler: O iyi ve temiz kalbli bir insan; ister yakınımız ve mevki sahibi insanlardan, ister onlardan gayri kimselerden olsun, huzurumuza kabul ettiklerimize biraz iltifat edince, bunu hazmedemeyip ölçülerini kaçırdılar ve başkalarıyla kavga ettiler. Mevlânâ Gıyasüddin ise, kendisine çok iltifat ettiğimiz ve hakkında çeşitli inayetlerde bulunduğumuz halde, ve her zaman için yanımızda bulunma ve bizimle konuşma şerefine sahip olmasına rağmen, ne şimdiye kadar kimse ile kavga etti ve ne de kimse ondan şikâyetçi oldu; şahsî hırs saikasıyla başkalarını çekiştirmek ve söz getirmek gibi hareketlere hiç baş vurmadı; gidişi ve tavruhareketi çok iyi. Buna benzer sözleri birçok defalar söylemiş.

Bütün bunlar için Allaha şükürler olsun. "Bu Allahın bir inayetidir ve Allah onu dilediğine verir." ¹⁴ İnsanlar, hareket tarzlarıyla ve başarılarıyla akranlarının takdir ve teveccühlerini kazanmak için bile yıllarca gayret sarf ederler. Büyük insanların takdirlerini celbedebilenler ise pek nadirdir. Allaha ve feyzine çok şükürler olsun ki evimin içinde geçirdiğim bunca yıldan sonra, çıkıp böyle muazzam bir şehre, böyle bilgili insanların karşısına, ve cihana hükmü geçen marifet sahibi, akıllı, bilgin, ve aynı zamanda insanların durumları ile yakından ilgilenen, kulların refah ve saadetini kollayan bir padişahın huzuruna gelince, Tanrının inayetinin feyzi ve tükenmez mutluluğu ve siz efendimin himmetlerinin bereketi ile, davranışım o Ulu Başbuğun teveccüh ve takdirlerini çekecek şekilde tecelli etti.

¹⁴ Kuran, sure 5, âyet 59, sure 57, âyet 21, sure 62, âyet 4.

Padişah hazretleri insanların vaziyetlerine karşı yakın ilgi gösteren bir kimse olmasa idi, kendisine iyyinin fena ve fenanın iyi görünmesi mümkün olabilirdi. Fakat kendileri, bu devlet eşiğine bağılı bulunan kimselerle okadar sıkı münasebette ve herkesin durumu ile okadar yakından alakalı ki, tebaasından gereği gibi tanımadığı hiçbir kimse yok. Gece gündüz yakınında bulunan kimselere karşı olan alakası da buna göre tasavvur edilsin.

415b
516a

Bir de bazı kimselerin, "rasat işleri neden bir yılda tamamlanmıyor da on onbeş yıl sürüyor" diye sorduklarını söylüyor-sunuz. Meselenin mahiyeti şöyle. Gezegenlerle ilgili hususların tesbit ve tayini işinde bazı şartlar var ki, bu şartlar tahakkuk edince bunları rasat etmek gerekir. Meselâ öyle iki ay tutulması bulmak icabeder ki, bunların her ikisinde de ayın tutulmuş olan kısmı eşit olsun, aynı yönde bulunsun, ve aynı düğüm noktasının yanında olsun. Aynı suretle, birincilerden farklı fakat yine birbirlerine tamamen uygun vasıflarda başka iki ay tutulmasına, ve buna mümasil diğer durumların tahakkukuna ihtiyaç vardır. Merkür'ün sabahleyin, güneşe olan mesafesinin azamî olduğu bir durumda, ve bir defa da, akşam üzeri güneşe olan mesafesinin azamiyi bulduğu sırada, birkaç başka şartın da inzimamiyle, rasat edilmesi lâzım. Diğer gezegenler için de buna benzer şartlar var.

Bütün bu durumlar bir sene içinde meydana gelmez ki rasatları bir yıl içinde yapılsın. Bu şartlar tahakkuk edinceye kadar beklemek gerekir. Ve eğer tam o sırada bulut bulunursa fırsat kaçıp gider ve aynı durum tekrar zuhur edinceye kadar, yani bir veya iki yıl daha beklemek icabeder. On onbeş yıla ihtiyaç bu yüzdendir.

Bu işleri bilmeyenler ve kimsenin bu faaliyetine şahit olmamış olanlar insanın bu gibi şeylerle meşgul olmasına hayret ederler. Fakat bir kimse bir işi bilince onu yapmak kolaylaşır. İnşaaallah, bütün kusurlardan münezzeh olan yüce Tanrı ömür verir ve yardımcı olursa, İslâm Padişahının devletinin feyzi ile bu rasat işi mutlu ve sevinçli bir şekilde tamama erdirilir. Tanrı Padişahımızın devletini ve hükümrânlığını daim kulsın.

Hali hazırda, rasathane binasının büyük bir kısmı meydana çıkmış bulunuyor. Beşyüz *tûmân*'a yakın tuğla ve kirece sarfedildi.

Bir zâtülhalak yapıldı, bir ikincisi de yapılmakta. Zâtüssemî, zâtü'l-hedefeti's-seyyâre, vesaire gibi bazı diğer aletler üzerinde de çalışılıyor. Bunlar da yarı tamamlanmış durumda.

Rasat işinin benim uhdememi verilmiş olduğunu ve bu işte bir ortağım bulunup bulunmadığını soruyorsunuz. Acıbdır ki bunu benim burada bu derece ün kazanmamdan sonra öğrenmek istediniz. Vaziyet şöyle ki, gerçi burada matematik ilimlerde behre sahibi kimseler çoksa da, bunlar rasat işlerinin ilmi ve amelî yönlerine (teorik ve pratik astronomiye) aşına değiller. Çünkü hiçbir *Almajest*'i bilmiyor.

İçlerinden biri Kadızade. Kendisi *Almajest*'in ilmi yönünü biliyor fakat amelisini değil. Tatbikatla ilgili hiçbir şey yapmamış. O buradakilerin en bilgilisi. Kendisi teorik astronomiyi de ancak öğrenmeye başlamış durumda. Hangi konudan söz açılrsa, *Kaanûn-i Mesûldî* meselesi ve diğer misaller münasebetiyle daha önce zikredildiği üzere, meseleyi gerektiği şekilde ele alıp çözen ve açıklayan ben oluyorum. Yine tatbikî yönde tamamiyle hâkim durumdayım.

Pratik astronomi de amelî ve ilmi (tatbikî ve teorik) olmak üzere ikiye ayrılır. Amelisine şöyle bir misal verebiliriz. İki yıldız birinci vertikala birlikte gelmiş bulunuyorlar. Yükseklik açısı bir aletle ölçülüyor ve iki yıldızdan birinin boylam ve enlemi biliniyor. Diğerinin boylam ve enleminin bu bilgilere dayanılarak çıkarılması matlup. Bunun nasıl çıkarılacağı, yani neyin ne ile çarpılacağı ve hangi miktara bölünmesi gerektiği ve ne gibi işlemlerle sonucun elde edileceği bilgisi, pratik astronominin ilmi yönüne râci bir husustur. Mutlak olarak ilmi olan kısım ise, astronomi ilminin kendisi ve onun bilgisidir.

Bir meselenin mutlak olarak tatbikî yönüne gelince, bu da çarpma ve bölmelerin yapılması ve burç, derece, ve dakika cinsinden gezegenlerin boylamını ve ayrıca enlemlerini bulup çıkarmak ve adedî olarak ifade etmek işidir. Kadızade pratik astronominin ilmi kısmında zayıftır ve mutlak olarak tatbikî astronomide çarpma ve bölme için şebeke kurmaktan başka birşey bilmez. Onu da şu şekilde yapabiliyor. Şebeke kurmak istediğinde bunu kitap yardımı olmaksızın yapamıyor. Kitabı açıp satır satır okuyorlar ve şebekeyi hane hane tamamlıyorlar.

Yeni bir tarzda araştırmayı gerektiren bir şey ile karşılaşırsa, bu çalışma tarzı ona pek faydalı olamaz(?).¹⁵

Öğünmek gibi olmasın ama, siz efendimin de bildiği üzere, Allahın inayeti ile, kendime okadar güvenim var ki, teorik astronominin gerek ilmi ve gerekse tatbiki branşında, ve yine pratik astronominin ilmi ve tatbiki dallarındaki¹⁶ hazırlığım ve müktesep bilgim sayesinde, elimde hiçbir kitap olmasa bile, rasathanedeki bütün işleri başından sonuna kadar yapar ve zici meydana getiririm. Hiçbir meselede kitaba baş vurmaya ihtiyacım olmaz. Ancak, geçmiş rasatlara göre muayyen bir güne ait ortalama yer sonuçları—ki bu vâkıaya taalluk eden bir husustur— ve o günün tarihi, buna bir istisna teşkil eder. Rasat işinde bu bilgiye ihtiyaç vardır. Çünkü şimdiki rasatların meydana çıkardığı ortalamalarla o günün ortalamaları farkı alınarak arada geçen zamana bölünür ve hareket miktarı bu suretle tayin edilir. Bütün bu işlemleri iki sahifeye sığdırmak mümkündür.

Bu hususta hiç endişe buyurulmasın. Çünkü böyle bir işte kitaba başvurmak pek nakîsa teşkil edecek birşey değildir ve zamanımızdaki bazı başka kimselerde misaline raslanan kitaba-müracaat ihtiyacına benzemez.

516b
517a

Kadızade hakkında yazdıklarımın kimse kendisi ile aramızda geçimsizlik olduğu mânasını çıkarmasın. Kendisi ile aramızda tam bir dostluk ve anlaşma var ve o benim üstünlüğümü kabul ve teslim ediyor. Kendisi hakikati inkâr edecek ve başkalarının hakkını teslim etmeyecek tıynetle bir insan değil. Benim onun hakkında yazdıklarımı kendisi de herkes arasında bizzat söyler. Bildiği şeyleri bildiğini ifade eder, fakat bilmediği bir şeyi bilmediğini de tereddütsüz olarak muteriftir.

Şimdiye kadar geçen zaman zarfında, rasat işleri ile ilgili inkişaflar, benim Ulu Başbuğa tavsiyelerime uygun bir şekilde tecelli etti. Allah onun devletini ve hükümranlığını daim kılsın. Meselâ rasathane binasının ve aletlerin ne şekilde yapılacağı hususu bu suretle takarrür etti. Kendileri, inceleyici bir zihin ve nüfuz edici bir görüşle bu teklif ve tavsiyeler üzerinde düşün-

¹⁵ Yukarıda sahife 11 ve not 6'ya bakınız.

¹⁶ Bakınız, metin not 82.

düler. Bunlardan bir kısmını beğendiler ve olduğu gibi yapılmalarını emrettiler. Bazı diğerlerini ise, bir takım buluş ve istidlaller ilâvesile tadil ederek o şekilde yapılmasına karar verdiler.

Hakikat şu ki, bu buluş ve istidlalleri gayet güzel yapıyorlar, ve bunlarda en küçük bir nakisa mevcut değil. Şayet bunların bazısında biz kullarının aklımızın yatmadığı bir şeyler olursa, bunlar üzerinde konuşuluyor, ve yanlış ister bu yönden ister öbür yönden aydınlansın, kendileri derhal ve hiç tereddüt göstermeden kabul ediyorlar. Çünkü kendilerinin gayesi, bütün meselelerin teferruatlı olarak incelenmesi ve rasat işlerinin en iyi bir şekilde başarılip tamamlanmasıdır.

Bu misalden Başbuğumuzun ne kadar vicdanlı ve güzel huylu bir insan olduğu açıkca görülür. Bunun üzerinde durmaya bile lüzum yok. Kendisi okadar lütufkâr, iyi kabli, ve alçak gönüllü bir insan ki, bazan Medresede kendileri ile herhangi bir öğrenci arasında, hangi ilim dalında olursa olsun, öyle bir karşılıklı münakaşa olur ki, bunun tavsifi imkânsızdır. Kendileri bunun böyle olmasını irade etmişler ve ilmî meselelerin iyice anlaşılmadıkça kabul edilmemesine ve nezaket icabı olarak anlaşılmış gibi davranılmamasına müsaade etmişlerdir. Arada sırada bazı kimseler onun fikrine ittibâ suretile herhangi bir şeyi kabul edince de, bizi techil ediyorsun diyerek gücenikliğini izhar etmiştir. Yine, denemek maksadiyle, ortaya yanlış bir mesele atar, ve bunu kabul eden olursa, meseleyi yeni baştan açar ve gayri samimi bir şekilde konuşmuş olan kimseyi mahcup eder.

Zikri geçen alet (zâtülhalak ?) tamamlanınca rasat yerine getirildi. Arada sırada, rasat mahallinde meridyen doğrultusunun tayini gibi bir iş olunca Kadızade de oraya gelir. Ortaya atılmış bir fikir varsa, o da müsbet veya menfi olarak mütalaasını söyler. Meselâ, daha önce anlattığım gibi, rasat tepesinin tesviyesi bahsinde ilkin itiraz ettiler, fakat fikrimin doğru olduğunu ona izah ettim.

Diğer müderrisler de rasat yerinde isbatı vücut ediyorlar ve faydalı olmaya çalışıyorlar. Daha, güç işlerin zamanı gelmedi. Çünkü halen bina inşa edilmekte. Bina bitince ve aletlerin de yapılması tamama erdirilip yerlerine konunca, sukbelardan gezegenleri gözlemekten ibaret olan rasat işi başlayacak, gerekli

ölçüler yapılacak, ondan sonra da bu ölçü neticelerine istinaden, dış merkezlerle kâinat merkezi arasındaki mesafeler, episikl yarı çapları, apslardan geçen çapların meyilleri, ortalama hareketlere tekabül eden gezegen yerleri, sabit hız merkezlerinin havâmil merkezlerine mesafeleri, ve bu gibi hususların tesbiti gerekecektir. İş asıl o zaman başlayacak.

Sözü daha fazla uzatmak doğru olmaz. Koruyucu gölgeniz devamlı ve sürekli olsun.

Kölelerinizin en değersiz
GİYAS

ENGLISH TRANSLATION

COPY OF THE LETTER WHICH THE LATE GIYÂTH
AL DÎN AL KÂSHÎ WROTE FROM SAMARQAND
TO HIS LATE FATHER

Yearning and craving for the honor of kissing the hands of your Lordship is to such an extent that it is proper to say for this occasion, "Were the ocean ink for the description of my Lord, the ocean would be used up before the words concerning my Lord were exhausted."¹ May God, he is exalted and high, grant, with his beneficence and magnanimity, the pleasure which encompasses the realization of that good fortune.

This token of servitude attained the honor of issuance on the seventh of the holy month of *Dhû'l qa'da*, and praise is to God for his many favors.

As to the advice you had given to the effect that as I am busy with the affairs of the auspicious observatory I should not occupy myself with any other science, especially with prosody and the like, as in proportion to such occupations perseverance in the former will be jeopardized and also people will form their judgement concerning one's proficiency upon their knowledge concerning one's latest accomplishment, this advice is the epitome of truth, and I am obedient and submissive to the order given. 510a
510b

There is a remark to be made, however, concerning the question of people's judgment. I had dwelt upon this matter in a long letter which was previously sent in the care of the merchants of Qum, and I am writing it once more with the hope that at least one of these letters will be honored with the perusal of your Lordship.

Whereas in Kâshân and its environs where one person, or two, is associated with each science, and his friends concur

¹ Qurân, ch. XVIII, verse 109.

with him with respect to his claim even if he does not know that science while certain others deny his assertion even if he knows, and the truth of the matter does not become clear to anyone, at the present in the district of Samarqand, may God protect it from catastrophes, the situation is not so.

For firstly, the King of Islam, the issuer of orders to the seven climes, may God preserve his realm and sovereignty, is a learned person; gratitude is to God and to his munificence. And I do not write this and make this assertion out of politeness.

The truth is that, first of all he knows most of the holy Qurân by heart, and he has a ready knowledge of its exegeses and the statements of the exegetes. For each occasion he cites an appropriate verse of the Qurân, and he makes elegant quotations. Every day he reads fluently and in the proper manner two sections from the Sacred Book, in the presence of experts who know the whole of the Qurân by memory, and no mistakes occur. His knowledge of grammar and syntax is very good, and he writes Arabic extremely well. Likewise, he is well-versed in jurisprudence, and he is acquainted with logic and the theory of literary style, as well as with the principles (of prosody).

His Majesty has great skill in the branches of mathematics. His accomplishment in these matters has reached such a degree that one day, while riding, he wished to find out to what day of the solar year a certain date would correspond which was known to be a Monday of the month of *Rajab* in the year eight hundred and eighteen and falling between the tenth and the fifteenth of that month. On the basis of these data he derived the longitude of the sun to a fraction of two minutes by mental calculation while riding on horseback, and when he got down he asked this servant (to check his result).

It is true that, as in mental calculation it is necessary to retain quantities in one's mind and to derive others from them, and because in the faculty of memory there is a shortcoming, he could not find the result (correctly) in degrees and minutes and was satisfied with degrees only. But it is not given to any person of our time to do the like; no one else is capable of it.

Suffice it here to say that he is thoroughly skilled in this

510b
511a

science, that he is proficient in giving proofs to astronomical procedures, that he derives the rules as is due, and that he lectures on the *Tadhkira*² and the *Tuhfa*³ in such a manner that the slightest addition to it cannot be imagined.

Secondly, the most preeminent among the scientists are at the present gathered together in Samarqand. Professors lecturing on all the sciences are numerous, and the majority among them is occupied with the mathematical sciences. Thus, four persons are half through writing the fundamental theorems of geometry and one a commentary on the *Tajnis*;⁴ another has written a tract on the geometrical proof of the rule of two errors; and there is Qāḍizāda-i Rūmī, who is the most learned among them, and he has written a commentary to Chaghmini⁵ and a commentary on the *Ashkāl-i Tasīs* (fundamental theorems of geometry).⁶ Astrologers and calculators too exist in large numbers.

In each branch of science in existence, in fact, the majority of the people well-versed in that branch are assembled here. Naturally, therefore, when, this servant arrived, everyone began to observe closely and to listen carefully in order to find out what the rank and the quality of this newcomer was.

Every few days, His Majesty, the King, is present at the circle of listeners, and when he is present lectures on the mathematical sciences are preferred. This servant too began to attend the lectures. One of the procedures adopted here, in order to weigh attentively the calibers of these seekers of knowledge, is that the person who joins the circle of listeners is unaware of the problem which shall be brought forth, whereas the people of the Madrasa make a thorough study of the subject and refresh their knowledge on the matter for this particular occasion.

² The author of this book is Naṣir al Dīn al Ṭūsī.

³ The author of this book is Quṭb al Dīn al Shīrāzī.

⁴ The reference here is to *Tajnis fi'l Hisāb* by Sirāj al Dīn Abū Ṭāhir al Sajāwandī (see, Brockelmann, *Geschichte der Arabischen Literatur*, vol. 1, p. 379, Supl., vol. 1, p. 651).

⁵ This is Qāḍizāda's commentary to Chaghmini's *Al Mulakkhḥaṣ fi'l Hay'a*.

⁶ This is the *Ashkāl-i Tasīs* of Muḥammad ibn Ashraf al Samarqandī; for Qāḍizāda wrote a commentary to it (see, Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und Ihre Werke*, 1900, p. 175).

Every time that the debates started, with the help of God, he is exalted, and with the felicity of your Lordship's magnanimity, this servant was able to take part in the discussions in a very substantial manner. I introduced certain points that had not come to their attention while preparing their lectures; 511a I made apt criticisms of the material they presented; and I 511b drew their attention to such fine points that all were astonished.

Before my arrival here people had encountered difficulties in dealing with certain problems. These had led them into long arguments, and none had been able to find satisfactory solutions.

They had wished, e.g., to construct an astrolab with a diameter of one *gaz* and to inscribe upon it the totality of the 1022 observed fixed stars. There was need for the knowledge of the distances to the vernal equinox of the points of the equator traversing the meridian together with these stars.⁷ All calculators were given instructions to act in collaboration with each other. There were nearly one hundred and fifty fixed stars for which the desired results could not be obtained on the basis of the information available in the *Ilkhânî Tables*, as they understood it, and they had come to a standstill in their work.

The mathematicians were asked to check these rules and to rigorously derive them with the help of geometry, but no one could do it. The situation was such that when they deduced, in accordance with the outward appearance of the information contained in that *zîj* (the *Ilkhânî Astronomical Tables*), the vernal equinox distances of the points of the equator traversing the meridian together with these stars and placed them upon the sphere or the astrolab, these positions did not coincide with the proper places of these stars within their constellations. For example, β Ursa Minoris fell into a position which was too far from its true place in the constellation of the Little Bear. No matter how hard they tried and put thought into the matter, it would not come out right.

⁷ This translation of the term *maṭālî'-i mamar* is based on the definition of this term as given in the *Zîj-i Ilkhânî* to which Ghiyâth al Dîn refers in this connection.

On the very day this servant arrived this problem was brought up anew in the presence of His Majesty. This servant found immediately, and at the meeting, the correct answer for one of these stars. I pointed out the source of their mistake and explained the manner in which the details given in the said *zij* should be applied to the case in hand, and this was done in such a manner that the problem was clarified to the entire satisfaction of His Majesty as well as the mathematicians. I also gave another method, explaining that when one thousand stars are set upon the astrolab there is no need for finding the vernal equinox distances of the points of the equator traversing the meridian together with the star. I showed them that the positions of all the stars which require much work may be determined in another way also. The result was that this servant was charged with the task, and he completed the work.

They had also wished to set upon a wall of His Majesty's palace a shadow staff and to trace upon the wall the lines of equinoctial hours. As the surface of that wall did not extend along the first vertical, i.e., as it did not face the plane of the meridian,⁸ and as no one had ever constructed a similar sun clock before, they were unable to do it. Some had said that it could be done in one year. Observations were to be made each day the sun reached the beginning of a sign of zodiac and each hour-line was to be marked until the scale was completed.

When this servant arrived he was asked to do it, and this servant completed it in one day. It was tested with the help of the large astrolab and was found to be correct and accurate. They, likewise, wished to have a hole constructed in such a manner that each time it was afternoon (time of afternoon prayers) according to Abū Ḥanīfa's definition the sun would shine through the aperture but not at other times. This too I set right on the day it was brought up. Similar circumstances have occurred in great number.

Another question was this. Suppose that a man stands at a spot around which the curvature of the surface of the earth

⁸ The text may be considered not to be very clear at this point, and in that case the translation given above would be approximate.

is quite accurate; let his height be three and a half *gaz*, by the *dhirâ' of the arm*. At what distance will a visual ray, leaving his face and touching the surface of the earth tangentially, intersect with the true horizon and with what angle of depression will it reach the outermost sphere of the firmament? They had thought on this question too for some time, and no one had been able to solve it although it is easy. This too, I solved on the day they asked it. The seekers of knowledge were each working on it independently.

We now come to the subject of the Observatory: His Majesty, may God keep his realm and preserve his sovereignty, had seen the constructions at the Marâgha Observatory in his childhood, but he had said that he had not seen them with a discerning eye. Before the arrival of this servant they had told His Majesty that the observatory was the place underneath the top (of the observatory hill) where people live (sit).

Two brass rings of six *gaz* diameter had been cast, for the measurement of the obliquity and solar observations, in accordance with Ptolemy's directions, unaware of the fact that, as that instrument was not free from defects, astronomers had brought about many refinements after Ptolemy's time and that they had deviated from the ring constructed by him.

512a
512b

No one knew either what the *geometrical pulpit* standing in the middle of the building (or, constructions) of the Marâgha Observatory was and for what purpose it was constructed. This servant brought the matter to His Majesty's knowledge and explained the divergences which may arise from their above-mentioned instrument. I also pointed out that in 'Aḍud al Dawla's time a ring was constructed the diameter of which was ten *gâz* and that the present one was smaller than that ring, adding that at the Marâgha Observatory they had constructed a *geometrical pulpit* instead, which is called *suds-i Fakhri*, and that this had a diameter of six *gaz*.

His Majesty ordered the ring to be broken, and they made it into another instrument which this obedient servant had described. The construction of the building of the observatory too was ordered to be carried out in accordance with the ex-

planations given by this servant. All these circumstances and other similar matters were made known to the notables of the country.

In like manner, every day and every week something new comes up, and through the felicity of your Lordship's magnanimity, this servant extracts it from the sphere of difficulty, with the mallet of preparedness, with the greatest ease.

One day His Majesty, may God preserve his realm and sovereignty, was busy studying, and Qâdizâda-i Rûmî was among those present. A proof had been referred to the *Qânûn-i Mas'ûdî*,⁹ and the *Qânûn* had been made ready. As the required proof could not be ascertained at the meeting, however, Qâdizâda had taken the *Qânûn* to his lodge in order to study it. After two days he brought it back and said that in the passage in question there was a lacuna. He believed this to be the reason why the problem could not be clarified and said that another copy of the book should be found for comparison. This servant had not left his house during the previous two days because of feverish lassitude and had at this juncture joined the meeting. Qâdizâda was still there. His Majesty chanced to look at this servant, and he said "Let our Mawlâ solve this problem", passing the *Qânûn-i Mas'ûdî* on to me. As soon as this servant read through five or six lines from that problem, he explained the whole matter, and the particular copy contained no lacunas.

512b
513a

Such things have happened many times since my arrival here. It will take too long to relate them all. Suffice it to say that in such a gathering and in the presence of so many authorities, one's knowledge is appraised neither through reliance upon other people's opinions and nor merely on the basis of the claims made by that person himself.

Shortly after the arrival of this servant here and in a meeting in which His Majesty took part, this servant was speaking about a few problems on which there was agreement between the *Tuhfa*, the *Nihâya al Idrâk*,¹⁰ Mawlânâ Nizâm al Dîn-i Nishâ-

⁹ This reference is of course to Al Bîrûnî's well-known work.

¹⁰ This too is one of Quṭb al Dîn al Shîrâzî's books.

bûri's *Commentary of the Tadhkira*,¹¹ as well as the commentary of the *Tadhkira* by Sayyid Sharif, may God bless his soul, but which were nevertheless wrong. My contention reached the ears of all the learned people by word of mouth. They were excited and busy speaking behind my back. "When a person objects to a thing on which so many authorities are in agreement," they declared, "he should prove his statement."

One day, at a gathering where the majority was present, I spoke on one of these controversial topics which I have thoroughly investigated, and I explained it both in a descriptive way and by geometrical proof in such a manner that it was accepted unanimously. As His Majesty is a scientist himself and well-versed in the subject, and as scientists are present here in large numbers, when a question becomes settled, no one who has previously spoken in another vein can demur, pretending to find faults, so as to make those who are not familiar with the topic believe in him. For the most distinguished scientists are present here.

One of the problems in question is this. It has been said that the maximum equation for the moon's anomaly on its epicycle takes place at a point of the eccentric region such that when this point is joined to the prosneusis center the line joining these two points will be perpendicular to the diameter passing through the apogee. This is the assertion made in all the books written on the subject up to our day, but it is wrong. For if the line in question passes through a point seven degrees and fifty seconds underneath the prosneusis center it is perpendicular and otherwise not. The same sort of mistake has been made in the case of the planets also, and the source of the error of them all is that in the case of the sun the point of maximum equation occurs at a place such that when a line is drawn from it to the center of the universe the line is perpendicular to the said diameter. Ptolemy has given the proof for this in the *Almagest* and has referred to this proof in the cases of the moon and other planets. People have never realized that the cases of these latter cannot be referred to that of the sun.

513a
513b

¹¹ Nizâm al Dîn's commentary is on Naşîr al Dîn al Tûsî's *Tadhkira*.

Another day, the ground had been leveled at the site of the observatory for the purpose of finding the meridian line. This had been performed by renowned masons, and the ground had become dry. We were there for fixing the direction of the meridian. We wished to check first to see whether the surface was level or not. His Majesty, God preserve his kingdom and sovereignty, and all people of high rank and notables, as well as the scientists, were present around the leveling instrument the masons had prepared for this work. For this purpose a triangle had been constructed, each side of which measured four Hâshimî *gaz*.

The son of the architect who is the head of the masons said that, as a precautionary measure, one should first check to see whether both sides of the triangle were equal or not. This servant said that even if they were not equal the leveling could be done with it. Qâdizâda and other masters who are conversant with these matters objected at once. They said, "How can it be? This is impossible." This servant said, "Now the weather is still cool and the sun has not risen high. Let us first check the leveling. Then I shall explain why this is possible."

When the work was done, they came back to their question and asked me to prove my claim. We all sat down, and I began to explain. This servant said, "Suppose that in this triangle one of the two sides, which according to your claim should be equal, is shorter than the other by one *gaz*." I drew such a triangular figure and brought geometrical proofs bearing upon the question. For one sidereal hour I gave preliminary explanations and proofs of various kinds for it, until they thoroughly understood it and gave their consent. Some who were more learned understood it in a shorter time and some others in a longer time, but they all gave their consent.

This servant minced no words. For nearly five hundred of the distinguished personalities were presents. I said, "You can comprehend such an easy problem, on which I gave all these proofs, in two sidereal hours. God knows that with me such problems are self-evident. Indeed, in this case, the question was clear in my mind as soon as Master Ismâ'il said we should first check and see whether both sides are equal or not. What need was there for all this talk and argument?"

513b
514a

All those assembled, distinguished personalities as well as ordinary people, were listening to see what the outcome of the discussion was going to be. For it was the first problem which had arisen in which there was lack of agreement. And when it was seen that the victory was on this servant's side, this brought me great fame.

Whosoever wishes to become assured of the situation can easily find out. Here is the horse and the rider and here are the grounds; let them come and behold. I have made my discourse lengthy, but such is the recurring situation.

As to what you write concerning the statement of someone by the name of Shams al Dîn to the effect that he was sent to fetch an armillary sphere from Mawlânâ Badr al Dîn to serve as a model, the fact is that this person has completely lied in this statement of his. For, first of all, there is no one here called Shams al Dîn who has access to His Majesty and who would be entrusted with important affairs. And secondly, no one here has need for a model of an armillary sphere. Master Ibrâhîm, the coppersmith, was sent to this servant's house, and he has completed one armillary sphere in my presence. In the armillary sphere the difficulty lies in the coppersmith's work and not in the theory of the instrument, in contrast to the astrolab in which both are difficult.

514a Master Ibrâhîm is so extremely good with his hands that
514b when this servant marked two points, one upon the concave surface of the ring and the other on its convex surface, indicating the spots corresponding to the axis, and drew around each point a small circle, he placed the wimble on one surface and bore the hole, coming out exactly at the required spot on the opposite surface. He prepared ten holes in the rings in this manner and not one was faulty. The exactness with which the rings fit into each other is the best witness for the accuracy of his work and makes any further comment unnecessary. At any rate, there was no news here, whether right or wrong, that Mawlânâ Badr al Dîn has an armillary sphere or that he has not, and no talk as to where such an instrument could be found or constructed.

¹² Travelers lie a great deal.

¹³ There is a blank space at this point in the text.

We now come to the statement of the Model of the Teachers of Truth and the Best of Holy Men, Mawlânâ Ibrâhim, may God preserve his good deeds and his noble respirations, relating the words of Mawlânâ Badr al Dîn to the effect that although there were many scientists at the Marâgha Observatory, in the *Ilkhânî Tables* several places are deficient.

The fact is that, the assertion of those who say that in the *Ilkhânî Tables* there are several deficiencies comes from the imperfection of their own science, thought, and mind. Even if there are small flaws in certain places, such persons as Mawlânâ Badr al Dîn do not know them. The places wherein they find faults are perfectly correct and good. The divergences which are now discernible are due to slow variations in which the differences have become appreciable during the interval separating us from the time of the compilation of those tables.

And again, as to his statement that there were many people at that observatory, the fact is that one person would have been sufficient. For kings of bygone days who ordered observations to be made did not themselves know with certainty how many persons need be present so that each time they were all in agreement their assertions could be considered trustworthy. Here, as the King, may God preserve his realm and sovereignty, is, as astronomer, the director (or, the owner) of the observatory, and as he himself is actively engaged in this work, there should be no fear if there are not many people on the staff. Ptolemy himself was king and observer, and he had one son.¹³ This work can be done by one or two persons. The work in an observatory is the kind of activity which would require more work if done by a single person. It is not like a rock of one thousand *mans* weight which can certainly not be lifted by one person; it is rather like one thousand *mans* of wheat which can be carried from one place to another by a single person.

We come now to his statement to the effect that Mawlânâ Badr al Dîn knows mathematics well. Mawlânâ Badr al Dîn

¹³ As explained above (p. 36), this may possibly mean "and he was alone by himself".

^{514b} knows some mathematics from Euclid's *Elements*, but he is unable
^{515a} to solve problems and he can never put that knowledge into application. He is like a person who knows certain rules of syntax but is utterly unable to write in Arabic. As the Mawlawi (Mawlânâ Ibrâhîm), who is a lover of truth, is mostly occupied with religious subjects and does not spend time on astronomical and mathematical sciences and as he is sincere and truthful himself, hearing that Mawlânâ Badr al Dîn indulges in talks on Euclid, he must have concluded that the latter knows mathematics. This servant has seen Mawlânâ Badr al Dîn many times, and the people here know him well.

A group of people who have little acquaintance with the science of the stars have for years talked boastfully. Now they hear that observations are being made in Samarqand, but they pay no attention and they do not think of themselves on this occasion. They are aware that they know nothing concerning observations. It is certain that they cannot bring their minds to ease except by negations and denial of the merits of other people. There are many others, besides Mawlânâ Badr al Dîn, who speak in the same vein. If these persons now happen to come to Samarqand and join the meetings held on mathematical subjects, both distinguished and ordinary people will find out that their words were devoid of factual content.

Today in Samarqand, may God preserve it from misfortune, there are sixty or seventy such persons, and they are counted among those who know mathematics. For it has been ten or twelve years now that the people of this city have busied themselves with this science and have worked with great earnestness. Indeed, His Majesty too occupies himself with mathematics. But may God have mercy on Mawlânâ Badr al Dîn as he has contented himself with this much; he at least does not manufacture any lies himself.

As to the complimentary remarks of His Majesty, of which mention has been made above, the situation is that no week passes without some friends reporting to this servant that His Majesty made such and such remarks tonight or today concerning me. They are such as follows: "He has the knowledge of

things ready at hand"; "He knows extremely well"; "His knowledge is superior to that of others"; "His knowledge is more readily at his disposal and more substantial than is the case with Qāḍizāda"; "His mind works better in this science than that of Qāḍizāda"; "Mawlānā Giyāth al Dīn knows all the parts of this science, and he solves at once or in a single day a difficulty which takes Qāḍizāda ten days to disentangle."

515a
515b.

He said, likewise, "He is a good and kind-hearted man. All those who have access to our circle, whether they be of the notables or not, have not restrained themselves but have quarreled with people and have transgressed their limits although I have shown them little courtesy. On the other hand, although I have extended much courtesy and many grants to Mawlānā Giyāth al Dīn and even though he is always honored with access to our company, he has not had any quarrels with anybody and nor has anyone complained about him." "He has not, out of greed, resorted to speak and gossip behind peoples' backs"; "He conducts himself very well." He has said things of this nature many times.

Much gratitude to God for all this; "This is God's magnanimity, he extends his generosity to whomever he wishes."¹⁴

People work hard for years in order to make their conduct and their achievements appear in a favorable light to people of their own class, and there are so few who can achieve this with great people. Gratitude is to God, and many thanks for his benevolence that after such a long time which I spent inside of my own home, when I came out to such a huge city and joined a group of such learned people and the circle of a learned, wise, scholarly, and world-ruling king, a king concerned with the lives of his people and interested in the well-being of his subjects, with the felicity of God's eternal bounty and his unending bliss, and thanks to the unstinted endeavors of your Lordship, I was able to conduct myself in such a manner that it was deemed to be laudable by His Majesty.

Were His Majesty the King not interested in the affairs of people, good might have appeared bad to him and bad good.

¹⁴ Qurān, V, 59, LVII, 21, LXII, 4.

But His Majesty has such close associations with the people who are attached to this threshold and is occupied so diligently with the conditions of everyone that there is no subject of his whom he does not know thoroughly, let alone those who are in his company day and night.

As to the inquiry of those who ask why observations are not completed in one year but require ten or fifteen years, the situation is such that there are certain conditions suited to the determination of matters pertaining to the planets, and it is necessary to observe them when these conditions obtain. It is necessary, e. g., to have two eclipses in both of which the eclipsed parts are equal and to the same side, and both these eclipses have to take place near the same node. Likewise, another pair of eclipses conforming to other specifications is needed, and still other cases of a similar nature are required. It is necessary to observe Mercury at a time when it is at its maximum morning elongation and once at its maximum evening elongation, with the addition of certain other conditions, and a similar situation exists for the other planets.

515b.
516a

Now, all these circumstances do not obtain within a single year, so that observations cannot be made in one year. It is necessary to wait until the required circumstances obtain, and then if there is cloud at the awaited time, the opportunity will be lost and gone for another year or two until the like of it occurs once more. In this manner there is need for ten or fifteen years.

Those people who do not know the nature of this activity and who have not witnessed others do it, are surprised when they see anyone occupy himself with it. But when someone knows how to do a thing, it becomes easy. It is to be hoped that God, he is exalted and high, will grant long life and give his help, so that with the felicity of the King of Islam, may God preserve his realm and sovereignty, this activity of observation will reach the stage of completion in a happy and successful manner.

At the present the greater part of the observatory building has been constructed. Nearly five hundred *tûmâns* worth of brick and lime have been used; one armillary sphere has been completed

and another one is in the process of construction. Still other instruments, such as azimuthal quadrant and the instrument with movable sights and others, are being attended to and have been half constructed.

As to your query concerning whether the task to be accomplished at the observatory is entrusted to this servant or whether he has a partner for the work, it is a strange coincidence that your Lordship should ask this question after my achieving such fame here. The situation is that although people who are conversant with the mathematical sciences exist in large numbers here, none of them is such that he is acquainted with both the theoretical ("scientific") and applied ("practical") sides of observations (of the work done in an observatory). For none of them knows the *Almagest*.

One of them is Qāḍizāda who possesses the theoretical knowledge contained in the *Almagest* but not its applied side. He has not done anything that pertains to the practical. He is the most learned among them, but even he is only a beginner in theoretical astronomy. For every topic which is put forward by His Majesty, this servant finds the correct approach and supplies the well-rounded and complete answer, as was previously mentioned on the occasion of the problem connected with the *Qānūn-i Mas'ūdi* and the like; and I am skilled in all the aspects of the applied branch of this science.

516a
516b

Applied astronomy too is divided into scientific and practical branches. The practical branch of applied astronomy may be illustrated with the following example. Suppose, e. g., that two stars have reached the first vertical at a certain condition. Elevation is measured with an instrument, and the longitude and latitude of one of these stars is known. It is required to derive the longitude and latitude of the other from these data. The knowledge of how to derive these, i. e., to know to multiply which quantity with which and to divide by what, and how to proceed in order to obtain the desired result, constitutes the scientific side of this operation (the scientific side of applied astronomy). The scientific side of theoretical astronomy ("the absolutely scientific") is the knowledge of the science itself.

The absolutely practical side of such a problem is the carrying out of the multiplications and divisions and the calculation of the longitudes of celestial bodies in terms of signs, degrees, and minutes, and the determination of their latitudes, giving their actual numerical values.

Qâdizâda is weak in the scientific side of applied astronomy, and he cannot carry out what pertains to the absolutely practical (the practical side of applied astronomy) except by performing multiplications and divisions with the help of the lattices of multiplication and division. And this is such that when he wishes to set up a lattice, he cannot do it without consulting a book. They read line by line and complete the operation step by step with the help of instructions. If something unusual is being sought this is not of much use(?).¹⁵

I am not boasting. Your Lordship himself knows that with God's assistance I have confidence in myself to accomplish the purely theoretical, the applied side of the theoretical, and the scientific side of the practical,¹⁶ as well as the purely practical, without consulting a book, so that if I were without any books at the observatory I could do everything necessary from the beginning of the period of work to the end and produce the astronomical tables. The only exception would occur in dealing with the results obtained concerning mean positions in previous observations performed on a given date, which is a matter pertaining to the factual realm, as well as the date of the given day. In observational work there is need for such data. For the difference between the mean positions resulting from the present observations and those of the earlier date is found and is divided by the time between the two observations so as to obtain the quantity of motion. All these calculations can be done on two sheets of paper.

Let your Lordship keep his blessed mind at ease. For recourse to books for such an investigation is not indicative of a serious shortcoming and is not the same as the kind of recourse to books practiced at the present by others.

¹⁵ See above, p. 36 and note 6.

¹⁶ See Persian text, note 82.

What I have related concerning Qâḍizâda should not make people think that there is ill-will and lack of understanding between the two of us. There is a strong feeling of friendship and attachment between Qâḍizâda and myself, and he acknowledges my superiority. He is not of such a disposition as to deny what is true or to be unfair. He himself asserts in the presence of others what this obedient servant has just said concerning him. He speaks and says so when he knows a thing, and he readily confesses it when he does not know. 516b
517a

The developments to date in the activity pertaining to the observatory have been in accordance with what this servant proposed to His Majesty, may God-preserve his realm and sovereignty. This was what happened, e. g., in the case of the nature of the observatory building and the nature of each instrument. His Majesty reflected upon the recommendations with lucid mind and prompt understanding. Whatever he approved he ordered to be carried out, and as to other cases, he enriched them with new ideas and inferences and ordered the adoption of the modified versions.

The truth is that his inferences are very apt and do not contain the slightest error. If in certain cases there happens to be anything concerning which we, his servants, have some doubt, the point is discussed; and no matter from what side the clarification of the mistake comes, His Majesty will at once accept it without the least hesitation. For it is his aim to see that everything is thoroughly investigated and to have the work at the observatory accomplished in the best possible manner.

Your Lordship may infer herefrom the degree of liberality and benevolence of that personage. And there is no need to expand upon this matter. He is, indeed, good-natured to the utmost degree of kindness and charity, so that, at times, there goes on, at the madrasa, between His Majesty and the students of the seekers of knowledge so much arguing back and forth on problems pertaining to any of the sciences that it would be difficult to describe it. He has ordered, in fact, that this should be the procedure, and he has allowed that in scientific questions there should be no agreeing until the matter is thoroughly

understood and that people should not pretend to understand in order to be pleasing. Occasionally, when someone assented to His Majesty's view out of submission to his authority, His Majesty reprimanded him by saying "you are imputing ignorance to me." He also poses a false question, so that if anyone accepts it out of politeness he will reintroduce the matter and put the man to shame.

517a
517b When the said instrument (armillary sphere?) was completed it was brought to the site of the observatory. Every once in a while, when there is something to be done at the site of the observatory, such as the determination of the meridian line, Qâdîzâda too comes there. If there is any problem, he too speaks in an approving or disapproving manner, as mentioned earlier apropos of the leveling of the observatory grounds wherein they disapproved, and I explained the matter to him.

The rest of the professors too present themselves at the observatory grounds and try to be obliging. The time for the difficult parts of the work has not come yet. For at the present the building is being constructed. When it is brought to completion and the instruments are completed and set up in their places, then observation, which consists of watching the stellar bodies through sights, will be made and measurements will be ascertained, and after that the eccentricities, the radii of epicycles, the degrees of inclination of the apse lines, the mean motions, and the distances of centers of constant speed to centers of eccentricity, etc., will have to be determined from these observations. It is then that work really starts.

It is not appropriate to be too lengthy. May your exalted shadow be unceasing and perpetual.

The least of your slaves,
GHİYÂTH

D İ Z İ N

A

Adnan-Adivar, A. : 16, 18.
Adudü'd-Devle: 81.
Almajest: 23, 83, 89.

B

Bailly, J. S.: 16.
Barselona: 7.
Barthold, W.: 14, 21, 27, 28.
Batlamyus: 10, 80, 81, 83, 85.
Bedrüddin: 11, 84, 85, 86.
Bîrûnî: 25, 81.
Brockelmann: 78.
Browne, E. G.: 14.
Bursa: 15, 16.

Ç

Çağmîni: 19, 23, 78.

D

Devletşâh: 14.
Dokuzuncu Milletlerarası İlim Tarihi
Kongresi: 7.

E

Ebü Hanîfe: 80.
Eşkâl-i Tesis: 19, 78.

G

Gıyasüddin: 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23,
24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 76,
87, 92.

H

hendesî minber: 81.
Horasan: 15, 18.
hücre: 18, 81.

İ

İbrahim Usta, bakırcı: 84.
İbrahim, Mevlânâ: 85, 86.
İsmail Usta: 84.

K

Kaanûn-i Mesûdî: 81, 82, 89.
Kadızaade: 12, 15, 16, 18, 19, 20,
23, 24, 25, 26, 78, 81, 83, 87,
89, 90, 91.
Karakoyunlu: 27.
Kari-Nîiazov, T. H.: 21.
Kâşan: 11, 12, 27, 76.
Kennedy, E. S.: 7, 25, 28, 30.
Kirman: 16.
Kum: 76.
Kuşçu: 15, 16, 20, 26.
Kutbüddin-i Şîrâzî: 77, 82.
Küçük Ayı: 79.

L

Luckey, P.: 22, 27.
Lugal, Necatî: 8.

M

Madrid: 7.
Maveraünnehir: 19.
Mecdi, M.: 20.
Medrese: 13, 17, 18, 19, 20, 21, 29,
91.
Merâğa Rasathanesi: 15, 24, 25, 29,
31, 80, 81, 85.
Minovi, Möjtaba: 7, 8, 11.
Mîrem Çelebi: 22.
Muhammed ibn Eşref el Semerkandî:
78.
Muinüddin-i Kâşî: 29.
El Mülâhhas fî'l Hey'e: 78.

- N
 Nahcevanî: 28.
 Nasirüddin-i Tûsî: 77, 82.
 Nihâyetü'l-Idrâk: 82.
 Nizâmüddin-i Nişâbüri: 82.
- Ö
 Öklid: 86.
- R
 rasat kuyusu: 20.
- S
 saat: 80.
 Sâlih Zeki: 18, 20, 25.
 Sarton, G.: 20.
 Semerkand: 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 76, 78, 86.
 Semerkand Rasathanesi: 28, 30, 31.
 Seyyid Şerîf-i Cürcânî: 16, 19, 20, 82.
 Sipehsâlâr Camii Kütüphanesi: 7, 8.
 Sirâcüddin Ebû Tâhir el Secâvendî: 78.
 Sultan İskender: 27.
 Suter: 78.
 süds-i Fahri: 24, 25, 30, 81.
- Ş
 Şâhruh: 28.
 Şemsüddin: 84.
- A
 Abû Hanîfa: 97.
 Adnan-Adivar, A.: 40.
 'Aḍud al Dawla: 98.
 Almagest: 45, 100, 107.
 Anatolia: 40.
 armillary sphere: 102.
 Ashkâl al Tarîf: 42, 95.
 astrolab: 96, 97, 102.
- Şerh-i Çağmîni: 78.
 Şerh-i Eşkâl-i Tesîs: 78.
- T
 Tabâtabâî, Muhammed Muhit-i: 7, 8.
 Tahran: 7.
 Taşköprüzâde: 18, 20, 28.
 Tebriz: 28.
 Tecnis fi'l Hisâb: 78.
 Tezkire: 13, 77, 82.
 Tuhfe: 13, 77, 82.
- U
 Ulug Bey: 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31.
 Ulug Bey Rasathanesi: 21, 30.
 Ulug Bey Zîci: 22, 30.
 β Ursa Minoris: 79.
 usturlâb: 79, 80, 84.
- Ü
 Ünver, A. S.: 16.
- Z
 zâtülhalak: 84, 85, 89, 91.
 zâtü'l-hedefeti's-seyyâre: 89.
 zâtüssemt: 89.
 Zîc-i Hâkaanî: 27, 28, 30, 79.
 Zîc-i İlhanî: 28, 85.
- B
 Badr al Dîn: 36, 102, 103, 104.
 Bailly, J. S.: 40.
 Barcelona: 32.
 Barthold, W.: 38, 44, 49, 50.
 Al Bîrûnî: 48, 99.

- Brockelmann: 95.
 Browne, E. G.: 38.
 Bursa: 40.
- C
- Chaghmini: 42, 95.
- D
- Dawlatshâh: 38.
- E
- Euclid: 45, 104.
 Euclid's *Elements*: 45, 104.
- G
- geometrical pulpit: 98.
 Ghiyâth al Dîn Jamshîd al Kâshî:
 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
 51, 52, 93, 96, 105.
- I
- Ilkhânî Zij*: 50, 96, 103.
 the instrument with movable sights:
 107.
- K
- Kari-Nîiazov, T. H.: 44.
 Kâshân: 36, 49, 93.
 Kennedy, E. S.: 32, 33, 48, 50, 52.
 Khurasan: 39, 40, 42.
 Kirmân: 39.
- L
- Little Bear: 96.
 Luckey, P.: 45, 50.
 Lugal, Necati: 33.
- M
- Madrasa: 37, 40, 41, 42, 43, 44,
 51, 95.
 Madrid: 32.
 Majdî, M.: 43.
- Marâgha Observatory: 39, 47, 50,
 53, 98, 103.
 Master Ibrâhîm: 102.
 Master Ismâ'il: 101.
 Mawlânâ Ibrâhîm: 103.
 Minovi, Mojtâba: 32, 33, 35.
 Miram Chalabi: 45.
 Muḥammad ibn Ashraf al Samar-
 qandî: 95.
 Mu'in al Dîn al Kâshî: 51.
Al Mulakhkhaṣ fi'l Hay'a: 95.
 Mu'tamid al Dawla: 33.
- N
- Nakhjawânî: 50.
 Naşîr al Dîn al Tûsî: 95, 100.
Nihâya al Idrâk: 99.
 Ninth International Congress of the
 History of Science: 32.
 Nishâbüri's *Commentary of the Tadh-
 kira*: 100.
 Nizâm al Nishâbüri: 99, 100.
- O
- observation well: 43.
- P
- Ptolemy: 35, 98, 100, 103.
- Q
- Qâdizâdâ: 36, 37, 39, 41, 42, 43,
 45, 46, 47, 48, 49, 95, 99, 101,
 105, 107.
Qânûn-i Mas'ûdî: 99, 107.
 Qaraqoyunlu: 49.
 Qum: 93.
 Qushji, 'Alî: 39, 43, 49.
 Quṭb al Dîn al Shîrâzî: 95, 99.
- S
- Şâlih Zaki: 41, 47.
 Samarqand: 36, 37, 38, 39, 40, 43,
 44, 46, 49, 50, 51, 93, 94, 95,
 104.

- Samarqand Observatory: 44, 51, 52, 53.
 Sarton, G.: 43.
 Sayyid Sharif-i Jurjāni: 40, 42, 43, 100.
 Shāhrukh: 50.
 Shams al Dīn: 102.
 Sipahsālār Mosque Library: 32.
 Sirāj al Dīn Abū Ṭāhir al Sajāwandī: 95.
 suds-i Fakhri: 47, 51, 98.
 Sultan Iskandar: 49.
 sun clock: 97.
 Suter: 95.
- T
- Ṭabāṭabāi: 33.
 Tabriz: 50.
 Tadhkira: 37, 95, 100.
 Tajnis fi'l Hisāb: 95.
- Tashköprüzāda: 42, 43, 50.
 Tehran: 32.
 Transoxiana: 42.
 Tuhfa: 37, 95, 99.
- U
- Ulugh Bey: 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52.
 Ulugh Bey's Zij: 45, 52.
 β Ursa Minoris: 96.
 Ünver, A. S.: 39.
- W
- wihāq: 41
- Z
- Zij-i Khāqāni: 49, 50, 52.

ح

حساب هوائی: 56, 57.

چ

چغیئی: 57.

د

دارالرصد: 72.

دب اصغر: 59.

ذ

ذات الخلق: 65, 66, 71.

ذات السم: 71.

ذات الهدفة السياره: 71.

ر

رصد: 55, 60, 61, 63, 65, 67, 68.

71, 73, 74.

رصد مراغه: 60, 61, 66.

ابو حنیفه: 60.

استاد ابراهیم صفار: 65, 66.

استاد اسمعیل: 65.

اسطرلاب: 58, 59, 60, 66.

اشکال تأسیس: 57.

انق حقیق: 60.

اقلیدس: 67.

انورالفرقدين: 58.

ب

بدرالدین: 65, 66, 67, 68.

بطليموس: 61, 63, 67.

ت

تجنيس حساب: 57.

تحفه: 57, 62.

تذکره: 57.

- ق
- قاسی زاده: 57، 61، 62، 64، 68، 71،
72، 73، 74.
قانون مسعودی: 62، 71.
قم: 55.
- ک
- کاشان: 56.
- م
- مجلسی: 63، 71.
مدرسه: 58.
مسئله خطائین: 57.
منبر هندسی: 61.
مولانا ابراهیم: 66.
مولانا بدرالدین: 65، 66، 67، 68.
- ن
- نظام الدین نیشابوری: 62.
نهایة الادراک: 62.
- و
- وفاق: 62.
- ز
- زیچ ایلخانی: 58، 66.
- س
- سدس نخری: 61.
سمرقند: 56، 57، 68.
سید شریف: 62.
- ش
- شرح اشکال تأسیس: 57.
شرح تجنیس حساب: 57.
شرح تذکره: 62.
شرح چغینی: 57.
شمس الدین: 65.
- ع
- عقد الدوله: 61.
- غ
- غیاث الدین کاشی: 55، 68، 69، 75.

فهرس المحتويات

١	بونگمباني، بَلْدَسار: حول جمع أس أربعة للأعداد الطبيعية (عند الكاشي). (بالإيطالية)
١١	لوكاي، باول: استخراج الجذور العددية وتربيع ذوات الحدين في الرياضيات الإسلامية. (بالألمانية)
٦٩	لوكاي، باول: حول فن الحساب عند المسلمين والجبر في القرون الوسطى. (بالألمانية)
٧٥	لوكاي، باول: فن الحساب عند جمشيد بن مسعود الكاشي، مع نظرات إلى ما كان قبله من تطور. (بالألمانية)
٢٢٧	لوكاي، باول: "الرسالة المحيطية" لجمشيد بن مسعود الكاشي. ترجمة ألمانية وشرح.
٣٣٠	لوكاي، باول: حول علم الرياضيات عند المسلمين . - الحساب والجبر. (بالألمانية)
٣٥٤	آبوي، أسفر: طريقة الكاشي لاستخراج قيمة جيب ١°. (بالإنكليزية)
٣٦١	صايلي، أيدن: رسالة غياث الدين الكاشي حول ألغ بك والنشاط العلمي في سمرقند. (النص بالفارسية مع ترجمة بالتركية وبالإنكليزية)

طبع في ١٠٠ نسخة

نشر بمعهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
بفرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية
طبع في مطبعة شتراوس، مورلنباخ، ألمانيا الاتحادية

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٥٦

الكاشي

غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمود
(توفي ٨٣٢هـ)

نصوص ودراسات

جمع وإعادة طبع
فؤاد سزكين

بالتعاون مع

كارل إيرج-إيجرت، مازن عماوي، إكهارد نوباور

١٤١٩هـ - ١٩٩٨م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية

يصدرها
فؤاد سزكين

الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي

٥٦

الكاشي
غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمود

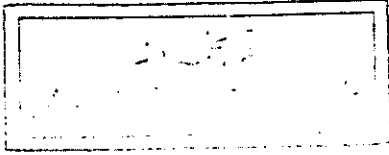
نصوص ودراسات

جمع وإعادة طبع

١٤١٩ هـ - ١٩٩٨ م

معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
في إطار جامعة فرانكفورت - جمهورية ألمانيا الاتحادية

منشورات
معهد تاريخ العلوم العربية والإسلامية
سلسلة الرياضيات الإسلامية والفلك الإسلامي
المجلد ٥٦



شعاره ثبت ٢٩٧٤٦
ردده بندي
تاريخ

